Encontro Nacional de Educação Matemática
Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas
Curitiba, PR - 18 a 21 de julho de 2013

COMPARANDO ÁREA DE FIGURAS POR VISUALIZAÇÃO E SOBREPOSIÇÃO

Edilene Simões Costa dos Santos
UnB
edilenesc@gmail.com.br

Dr. Cristiano Alberto Muniz
UnB
cristianoamuniz@gmail.com

Dra. Maria Terezinha Jesus Gaspar
UnB
mtjg.gaspar@gmail.com

Resumo:
Este trabalho tem por objetivo apresentar e analisar uma atividade da sequência didática na qual comparamos áreas por visualização e sobreposição. A mesma integra a pesquisa de doutorado em fase de análise, intitulada História da Matemática como instrumento didático para aprendizagem do conceito da grandeza e de medida de área no quinto ano do ensino fundamental. O aporte teórico apresenta questões epistemológicas e metodológicas vinculadas à apropriação da História da Matemática utilizada como recurso didático para o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos como relacionadas à Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1996, 2003). A metodologia de pesquisa utilizada aproxima-se da engenharia didática (ARTIGUE, 1996). A atividade elaborada com base na concepção histórica propiciou a percepção dos conhecimentos prévios do aluno, além de demonstrar a apropriação, por algumas crianças, de procedimentos que apontam a relação existente na história entre o processo de composição e decomposição e a determinação da área.

Palavras-chave: História da Matemática; Matemática; ensino e aprendizagem.

1. Introdução

Este trabalho é um recorte da pesquisa de doutorado, em desenvolvimento, na Faculdade de Educação da Universidade de Brasília, intitulada História da Matemática como instrumento didático para aprendizagem do conceito da grandeza e de medida de área no quinto ano do ensino fundamental. Temos por objetivo, neste trabalho, apresentar e analisar uma atividade da sequência didática desenvolvida e aplicada no trabalho supracitado, cuja tese entende que mobilizar didaticamente a História da Matemática na ação pedagógica pode proporcionar, de forma significativa, a construção do conceito da grandeza e medida de área pelos alunos dos anos iniciais do ensino fundamental.

A opção por realizar a pesquisa com medida de área resultou da análise do currículo da Secretaria de Educação do Distrito Federal – SEDF, de reflexões fundamentadas nos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN para o ensino fundamental de matemática e das experiências ressaltadas pelas professoras colaboradoras, que apontam dificuldades dos alunos com a construção de tal conceito. Por ser um conteúdo do quinto ano, definimos trabalhar com essa turma.

Para Mendes (2009b) favorecer a integração de novos significados aos conhecimentos matemáticos prévios dos alunos é função da escola. Esse autor aponta a História da Matemática como uma alternativa para a superação de dificuldades no ensino e aprendizagem da matemática e na sua valorização, como produto cultural, ponderando que esta pontencialidade depende do modo como a mesma é inserida na sala de aula. Assim, é foco da investigação a análise de como a História de Matemática pode dar fundamentos para a elaboração de sequências didáticas, mesmo sem que tenhamos de explicitar a origem histórica da atividade pedagógica.

Nos últimos anos, tem aumentado o interesse em estudar o papel da História da Matemática na melhoraria do ensino e da aprendizagem da Matemática, resultando na elaboração de uma bibliografia consolidada para maior compreensão dos fatores envolvidos na associação entre a História da Matemática e prática pedagógica desenvolvida na educação básica. Em quantidade menor, existem trabalhos que envolvem a identificação de boas práticas em situações de ensino e aprendizagem. Com o nosso trabalho buscamos corroborar com a fomentação desse campo.

Para argumentarmos em favor da utilização da História da Matemática, como elemento mediador no desenvolvimento da aprendizagem, tomamos por base Mendes (2006, 2009a, 2009b), Miguel (1997), Fauvel e Van Maanen (2000), entre outros. Para a concepção histórica as referências básicas são pesquisadores de elementos históricos do conceito da grandeza e de medida de área como: Amma (1979), Gillings (1972), Joseph (2000), Katz (1998), e outros. As considerações teórico-metodológicas também são apoiadas na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1996, 2003) que orienta as análises a fim de responder nossas questões de pesquisa referentes à construção do conceito do tema em estudo por meio da História da Matemática.

Nesse sentido, a constituição de um conceito, em Vergnaud (1996), depende de três dimensões do conhecimento, as quais estão inter-relacionadas. O conceito é então definido pelo seguinte tripé: C= {S, I, R}. Sendo que, S é o conjunto de situações que dão sentido ao conceito; I = conjunto de invariantes operatórios que podem ser reconhecidas e usadas pelos sujeitos para analisar e dominar as situações que dão significado ao conceito; R é um conjunto de representações. Para analisarmos as representações produzidas pelos alunos nos apoiamos na Teoria dos registros de representação semiótica de Duval (1994, 2003).

Segundo Duval (2003), um registro de representação semiótica é um sistema de signos que tem por objetivo três funções, a comunicação, o tratamento da informação e a objetivação. Assim sendo, as representações semióticas não cumprem somente o papel de comunicar, elas são igualmente fundamentais para as atividades cognitivas do pensamento. Para esse autor, o objeto matemático em estudo não deve ser confundido com suas representações, e sim reconhecido em cada uma delas. Logo, reconhecemos os registros de representação semiótica como um modelo pertinente para interpretarmos e analisarmos as relações entre as ideias e a produção do conceito de área pelos alunos inseridos em situações elaboradas diante da concepção histórica de tal conhecimento.

Diante do exposto e por acordarmos com a ponderação que o primeiro ato de mediação do professor é a escolha da situação para os alunos (VERGANUD, 2003), nesse trabalho, a História da Matemática é coordenadora das ações de aprendizagem. Dela apropriamo-nos para tomar decisões pedagógicas quanto ao ensino do conceito de área e sua medida. Seu papel é didático na problematização do saber matemático em estudo e na apropriação e ressignificação do mesmo pelo aluno. Para tal, assumimos que para a construção do conceito de área o aluno necessita, primeiramente, construir a noção de área, como grandeza autônoma, distinguindo área e superfície, bem como área e medida da área.

2. Metodologia

Para levarmos a História da Matemática para sala de aula optamos por realizar a transposição didática desse conhecimento por meio do desenvolvimento de uma metodologia que se aproximasse da engenharia didática (ARTIGUE, 1996), ou seja, construir situações cuja fonte, História da Matemática, fosse analisada para produzir certos efeitos, para fazer com que o aluno levantasse algumas perguntas e, a partir dos resultados obtidos na aplicação validar ou não a nossa tese. Projetamos uma sequência didática adaptada aos objetivos tomando como referência para a sua estruturação o trabalho desenvolvido por Douady e Perrin-Glorian (1989), que distingue três pontos na aprendizagem de área, os quais tomamos como eixos estruturantes.

O primeiro aborda a construção da noção de área como grandeza autônoma pela comparação direta de duas superfícies por inclusão ou indireta por recorte e colagem:

1) Por comparação direta de superfícies por meio da inclusão, ou indiretamente por recorte e colagem, ou seja, cortando uma superfície S em um número finito de peças que depois são coladas juntas, sem sobreposição. Uma nova superfície S' que substitui a S para comparação.

2) Por meio da atribuição de uma série de medidas de superfície (da mesma superfície) usando pedras de pavimentação (figuras) de várias formas.

Isso nos leva a:

- Diferenciar a forma da área de superfície: duas superfícies de formas diferentes podem ter áreas iguais.

- Distinguir a área de número, correspondência entre superfícies e números: a mesma superfície pode corresponder a números diferentes, dependendo da unidade escolhida, mas a área em si não muda.

O segundo eixo estende a aplicação de medida às superfícies que não podem ser recobertas por quadrados de área. Isso significa trabalhar com figuras não pavimentadas**.** Definimos para tal, por meio de contrato didático, o quadrado como unidade padrão de medida. Dizemos que uma superfície é não pavimentada por uma unidade quando não é possível cobri-la com um número inteiro de vezes dessa unidade. Nesse sentido, trabalhamos três situações quando a superfície é não pavimentada:

1) Por recorte e colagem podemos transformar uma superfície não pavimentada em superfície pavimentada**.** Então, medimos a área contando as unidades de medidas.

2) Não sendo possível cortar a figura, corta-se a unidade. Nessa situação o aluno deve tomar a decisão de utilizar uma subunidade e cobrir a área com tal subunidade.

3) Não resolve a situação nem por recorte e colagem da figura e nem utilizando uma subunidade, então se calculará a área por aproximação. Existem figuras planas cujas áreas podem ser obtidas por cálculos aproximados. Para obter a área, podemos quadricular a figura com quadrados iguais à unidade de área escolhida para medida.

Por fim, o terceiro aponta as diferenças entre perímetro e área e promove a construção de relações entre essas grandezas.

Então, definir área como grandeza articula o ponto de vista do desenvolvimento cognitivo com a ideia de conservação da área e a dissociação entre área e perímetro.

A sequência elaborada à luz da concepção histórica do conhecimento

Ao elaborarmos a sequência, o esperado era que ela produzisse alguns efeitos positivos sobre as concepções dos alunos e na evolução do conhecimento em questão. Ela foi estruturada com quatorze atividades, compostas por um número variável de questões. Sua organização orientou a ação do professor, esse por sua vez, adequou o material ao aluno. A elaboração da atividade de uso do professor e sua adequação para o trabalho junto ao aluno são resultantes de nossas análises *a priori*. Esta atividade é constituída de fundamentação histórica, de objetivos pontuais pertinentes à atividade em questão, de material e procedimentos. A dimensão epistemológica é intrínseca à atividade uma vez que ela faz parte das dimensões consideradas pela análise: epistemológica, cognitiva, didática (ALMOULOUD, 2007).

Os conceitos (Verganaud, 1996) envolvidos nesse trabalho para a concepção de área como grandeza e dos procedimentos para a sua medida são, entre outros: área, grandeza, medida, número, perímetro, recobrir, recorte e colagem, equivalência, sobreposição. Os alunos foram inseridos em situações propícias ao desenvolvimento de tais conceitos, situações nas quais a exposição à ação culmina na construção de resposta. Essa ação, paulatinamente, tornava-lhes o conhecimento significativo e nos permitiram entender o percurso tomado pelo aluno ao acertar ou errar no procedimento das resoluções.

Por conseguinte, as atividades não eram organizadas com a meta inicial de informar explicitamente ao aluno os fatos relativos à história da construção, pela humanidade, do objeto matemático em estudo. No entanto, foram imaginadas, planejadas e construídas fazendo uso de bases históricas com objetivo de proporcionar às crianças condições favoráveis à apropriação do novo saber.

Passemos, então, a apresentar a primeira atividade e sua análise. Ela pertence ao primeiro eixo da estruturação da sequência e tem o objetivo específico de identificar as concepções que as crianças tinham sobre a área como grandeza, ou seja, quais eram os conhecimentos prévios dos alunos em relação ao tema em estudo, e quais propriedades e procedimentos elas utilizam para resolver as situações apresentadas. Essa atividade, construída a partir do conhecimento histórico dos procedimentos utilizados por algumas civilizações para resolverem problemas relacionados ao conceito de área, além de permitir a identificação dos conhecimentos prévios dos alunos serviu de ponto de partida para a construção das demais atividades da sequencia didática aplicada. Em algumas dessas atividades a história da matemática aparece de forma explícita e, neste caso o conteúdo histórico chega ao aluno de diferentes formas. Nas demais atividades, inclusive na que é objeto de análise neste trabalho, a história serviu como referencial para a construção da atividade.

3. A Primeira Atividade

3.1 Atividade elaborada para orientar a ação do professor

3.1.1 Um pouco de História da Matemática

Foi a partir da necessidade de calcular áreas de terra e os volumes de celeiros e pirâmides que a geometria egípcia surgiu com um caráter peculiarmente prático. Se havia alguma motivação teórica, foi bem escondida, atrás de regras para a computação.

Os problemas mais comuns de medição baseados nos volumes de sólidos e áreas das figuras planas, na maior parte, eram calculados corretamente. Áreas de retângulos, triângulos e trapézios isósceles foram obtidas corretamente, provavelmente por um processo de "decomposição e composição", semelhantes aos encontrados nas geometrias indiana e chinesa (JOSEPH, 2000, p. 82).

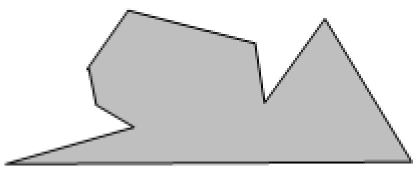
O processo de comparar superfícies por recorte e colagem nos remete aos procedimentos utilizados por diferentes civilizações da antiguidade – Egípcia, Babilônica, Indiana, Chinesa e Grega, na resolução de problemas envolvendo área.

Segundo Boyer (1996), no Papiro de Ahmes, existem problemas que utilizam o cálculo da medida de área com o uso de composição e decomposição de figuras. Nos textos indianos datados século V ao século IX a.C. existem vários problemas que solicitam transformar uma figura em outra de mesma área. Os métodos de recorte e colagem eram utilizados pelos indianos para resolver tais problemas.

Para Hogben (1958), o método utilizado nos elementos de Euclides para determinar a área de polígonos envolve a decomposição em triângulos, levando à inferência que também os gregos usavam esse princípio de composição e decomposição para determinarem a área de figuras.

3.1.2 Objetivo da atividade: Perceber que se uma figura está contida na outra por isometria, então, a área da primeira é menor do que a área da segunda.

3.1.3 Material: um par de figuras para cada aluno.



3.1.4 Procedimento:

a) Agrupar os alunos de quatro em quatro.

b) Entregar a cada aluno um par de figuras em um envelope (garantir a aleatoriedade da posição entre as figuras).

c) Identificar se eles conhecem as figuras.

d) Questionar qual figura tem a maior área? Pedir para os alunos justificarem a resposta.

e) Provocar no aluno a conclusão que ao compararmos duas figuras se uma delas "está contida por isometria" na outra figura (por superposição), a que a contém tem área maior do que a área da que está contida.

f) Solicitar aos alunos a escrita da conclusão a qual chegaram e o desenho ou o recorte e colagem dos pares de superfícies indicando a de maior área. O objetivo neste ponto é leva-los a perceber o atributo "estar contido" que, caso o par de figuras o possua , permite concluir que a área de uma delas é maior ou menor do que a área da outra. O esperado são desenhos ou colagens nas quais umas das figuras "está contida por isometria" na outra.

g) Pedir aos alunos que troquem seu par de figuras com as de um colega para que eles verificarem qual das figuras tem área maior e justificarem, depois que comparem suas respostas.

A proposta da atividade foi apresentada às duas professoras das turmas participantes do estudo, professoras Tatiana e Vitória. Ao final das discussões concluímos que essas questões deveriam estar detalhadas para serem entregues aos alunos. Então, juntamente com essas professoras, adequamos tal atividade para trabalhar em sala conforme exposição abaixo. Acordamos que as demais seriam trabalhadas da mesma forma. Ou seja, a proposta de atividade era apresentada às professoras, elas realizavam as adequações necessárias ao material apropriando-o aos alunos. Após essa reestruturação voltávamos e discutíamos com o professor orientador e a professora coorientadora, buscando a garantia de que o fundo histórico havia sido conservado, assim como, o percurso epistemológico para a construção do conceito de área. Por fim, as crianças eram localizadas nas atividades, ou seja, os alunos eram apresentados a situações que não sabiam resolver, mas sabiam o que estavam fazendo e onde deveriam chegar com suas ações, pois eram orientadas pela mediação da professora e pela própria atividade.

Após os primeiros momentos de trabalho com os alunos foi necessário realizarmos outras adequações quanto à estrutura das questões.

3.2 Atividade elaborada para orientar a ação do aluno

A fundamentação histórica foi suprida, pois esse saber foi apropriado pela professora mediadora do processo do ensino e aprendizagem**:**

Você recebeu um par de figuras que te ajudará resolver as questões abaixo.

1. Você conhece essas figuras?
2. Você conhece algum objeto que tenha a forma dessas figuras?
3. Qual das figuras dadas tem a maior área:

a) por visualização ? b) por sobreposição? c) Compare os resultados.

4. Cole aqui essas figuras indicando qual tem a maior área. Escreva a sua justificativa.

5. No papel dado desenhe e recorte duas figuras de áreas diferentes, mas que ao seu amigo possa parecer que elas tenham áreas iguais. Indique qual figura para você têm a área maior, depois troque esse par de figuras com um colega.

6. Cole aqui esse par de figuras. Qual figura tem a maior área?

7. Escreva a que conclusão podemos chegar ao analisarmos as áreas desses pares de figuras.

8. Compare a resposta do seu colega com a sua.

4. Análises

Nas análises *a priori* consideramos que os alunos poderiam ter dificuldades nas questões cinco e sete. Na primeira, a dificuldade para resolver a questão poderia ser, além da identificação da figura de maior área, em decorrência de parecer confuso, o entendimento do enunciado dado: figuras de áreas diferentes, mas que por visualização lhes parecerem iguais. Então, optamos por explicar bem o texto sem apontar-lhes nenhum exemplo com figuras, favorecendo, assim, a autonomia e criatividade de suas produções.

Quanto à questão sete, ficou definido que a atitude mais oportuna era explicitar o significado de “analisar” e de “concluir” a partir de tal análise, pois os alunos não estavam acostumados a esse tipo de exercícios, ou seja, analisarem os seus procedimentos na resolução de situações, formularem conclusões e expressá-las por meio da escrita.

Ponderamos a possibilidade da mudança dos enunciados. A professora Vitória defendeu a permanência de tais enunciados como fonte de reflexões, levando os alunos a interpretarem os enunciados. Continuou argumentando que os livros didáticos, com receio da criança não compreender a linguagem, apresentam perguntas muito simples e diretas, o que contribui para o empobrecimento do seu vocabulário, tirando-lhe a oportunidade de questionamentos e interpretações. A professora Tatiana concordou com tais argumentos e defendeu que o aluno já estaria refletindo desde o enunciado. Para a professora Vitória, uma das dificuldades dos alunos na resolução de algumas atividades é a escassez de vocabulário: “a linguagem corrente é pouco utilizada na escrita em aula de matemática, precisamos mudar isso”. Essa discussão fortaleceu nossa decisão. Acordamos, então, pela permanência dos enunciados, quando necessário orientaríamos favorecendo a aprendizagem e prática da leitura de textos matemáticos. Ao longo da aplicação da sequência fomos trabalhando a dificuldade do aluno de interpretar corretamente um enunciado e sua inexperiência em produzir por escrito a explicação dos procedimentos adotados nas resoluções das situações. ´

Nesse trabalho não separaremos as análises das questões por turma, procederemos como se tivéssemos trabalhado em uma única turma. Participaram dessa atividade cinquenta e seis estudantes.

4.1 Análises das questões

As figuras eram de cores variadas para evitar que os alunos relacionassem a grandeza área com a cor. Essa troca poderia ser considerada uma variante pelos alunos.

Questão 1- Você conhece essas figuras?

As respostas dos elementos de um mesmo grupo eram iguais, às vezes mais de um grupo exibia a mesma resposta. Respostas apresentadas pelos alunos: a figura verde é um trapézio; a figura rosa é um trapézio recortado; a figura verde é um trapézio; a outra não tem nome específico; a figura azul não tem um nome adequado; eu não sei o nome de nenhuma; eu só conheço o trapézio, ele é um quadrilátero; a figura rosa é chamada de quadrilátero e também de trapézio; a verde é um trapézio isósceles. Essa última foi expressa por três alunos do mesmo grupo, só um escreveu isósceles corretamente. Perguntamos a esses alunos o que era triângulo isósceles, apenas um soube explicar.

Aconteceram muitos casos nos quais a resposta era dada pelo grupo, mas nem todos os elementos sabiam explicitá-la. Em razão desse fato, consideramos de importância fundamental a mediação da professora nos grupos para que a aprendizagem fosse efetiva, evitando a imitação, a cópia sem reflexão. A afirmação: “um trapézio cortado” não era esperada por nós. Quando questionado o aluno explicou: “quando coloquei uma em cima da outra descobri que as figuras eram iguais e uma foi sendo recortada”.

As respostas dadas pelas duas turmas apontam que os alunos têm conhecimentos do campo geométrico (VERGNAUD, 1996).

Questão 2 - Você conhece algum objeto que tenha a forma dessas figuras?

Para o trapézio responderam: barco, vaso de flor, cabo de makita, pista de skate, telhado, chapéu, banheira, uma tigela que tem lá em casa, ferro de passar roupa, saia, escova de sapato. Para a outra figura dois grupos responderam caracol e montanha.

Essa atividade nos permitiu verificar que os alunos reconhecem as formas geométricas presentes no cotidiano e identificam algumas características geométricas do trapézio. Quando questionados como um dos objetos por eles citados parecia com o trapézio, eles desenhavam no ar tal objeto. A professora disse a eles que a pista de skate tinha forma de "u". Um aluno respondeu: "se olhar de frente para o 'u' dá para imaginar um trapézio passando um lado em cima fechando o u". Perguntamos se a turma concordava com ele, se mais alguém entendia a pista de skate como trapézio, a resposta foi sim. As respostas dadas para a questão dois nos levam a considerar que apesar da não terem a definição matemática para o trapézio eles reconhecem intuitivamente existência das retas paralelas entre si na formação do trapézio.

Questão 3- Qual das figuras dadas tem a maior área: a) por visualização? b) por sobreposição? c) Compare os resultados.

Devido à possibilidade dos alunos executarem movimentos nas figuras provocando mudança de posição das mesmas no plano, ocorreu o previsto, a maioria dos alunos usou a sobreposição. No entanto, ninguém explicitou a resposta dada, pois, normalmente, não são instigados a analisar e a justificar suas ações, a pensarem nos conhecimentos mobilizados para as tomadas de decisões. Alguns seguravam as figuras no alto da cabeça, uma sobre a outra e afirmavam: *"eu nem precisava por uma em cima da outra eu já sabia quem era maior".* Quando questionados como sabiam, as respostas eram convincentes, *"Eu tô vendo"!* E os semblantes tinham uma expressão desafiadoramente alegre e indagadora: eu vejo o óbvio, então, para que justificar? Outro aluno mencionou que tivera dúvida ao visualizar e para este a sobreposição, por sua vez, o ajudou ter certeza qual das figuras tinha a maior área. Como certeza, questionaram o que significava sobreposição.

A reflexão foi orientada até surgirem respostas do tipo "sobra mais espaço quando coloco uma em cima da outra, então a azul é maior". A sobreposição foi um procedimento para constatação que a figura de menor área está inclusa na de maior área. Foram feitas novas mediações para que ficasse claro aos alunos a necessidade de expressar o atributo da figura que está sendo medido. As professoras precisaram ser recorrentes nessa informação durante muito tempo. Quando as respostas não eram completas, era perguntado qual atributo estava sendo medido? São atividades e reflexões que o ensino brasileiro não faz regularmente, pois ao tratar do planejamento pedagógico do trabalho com área inicia-se, diretamente com a medida, por meio da contagem de unidades de medidas padronizadas em quadrados, em especial, em malha quadriculada.

Nos aspectos acima mencionados Duval (1994) comenta que ao utilizar a apreensão perceptiva os alunos poderão interpretar as figuras por meio da sobreposição das mesmas para solucionar o problema proposto. Nas demais questões os alunos também utilizaram da apreensão perceptiva para evidenciar as diferenças entre as figuras, concebendo que aquela que tem mais área é a que sobra espaço e a menor é a que cabe dentro da outra.

Questão 4- Cole aqui essas figuras indicando qual tem a maior área. Escreva sua justificativa.

Dos 56 alunos participantes sete colaram uma figura sobre a outra, a maioria uma embaixo da outra.

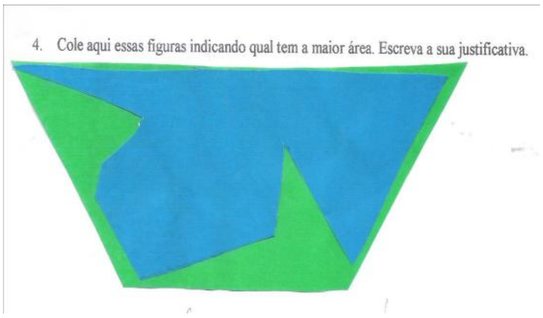


FIGURA 01: Colagem das figuras uma sobre a outra.

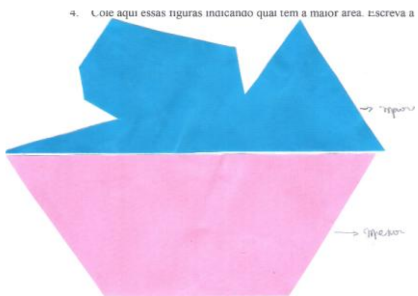


FIGURA 02: Colagem das figuras uma em baixo da outra.

As respostas dadas se assemelhavam com estas: A verde é maior porque a azul tem um formato menor, a verde tem um tamanho maior e, também, cada uma tem sua forma. A verde é maior porque quando eu coloco a azul em cima não cobre a rosa toda. A azul tem maior quantidade de área porque a rosa tem menor quantidade de área. A verde é "mais pequena" porque eu coloquei uma sobre a outra para achar o resultado. A maior área é do trapézio, porque a rosa foi recortada. Não são da mesma área, uma está recortada diferente. O trapézio é maior que a figura rosa, e é reta. Menor área porque está cortada. O trapézio é o maior porque eu medi e observei. Por visualização a área do trapézio é maior. A maioria justificou que tal figura é maior porque sobra espaço quando outra é colocada em cima dela. Esse raciocínio é caracterizado matematicamente por: são dadas duas superfícies S_1 e S_2 com áreas A_1 e A_2, respectivamente, se $S_1 \subseteq S_2$, então A_1 é menor ou igual a A_2.

Ao propormos essa atividade pensamos em todas as possibilidades nas quais os estudantes poderiam realizar as colagens. Então, nenhuma atuação nos surpreendeu, porém a observação das colagens nos ajudou a identificar que alguns alunos ao darem suas respostas consideravam o comprimento e não a área, uma vez que ao julgarem as áreas, por comparação, apoiaram-se, apenas em uma das dimensões lineares da figura. Isso nos levou a conjecturamos se tal fenômeno, dentre outras possibilidades, não se deve ao fato do aluno desenvolver sua análise centrado em um único atributo da constituição física, não coordenando mais de uma grandeza. Assim, essa confusão conceitual entre o comprimento e área se apesentará em outras atividades?

As questões cinco, seis, sete e oito foram analisadas conjuntamente. Essas questões têm por objetivo evocar no aluno os mesmos procedimentos adotados passo a passo pelas questões anteriores, uma vez que os conhecimentos dos alunos são moldados pelo domínio progressivo das situações, nas quais são inseridos e podem ser designados por meio do teorema em ação e do conceito em ação (VERGNAUD, 1996). Procuramos identificar nas respostas alguns teoremas em ação, sendo estes os conhecimentos utilizados pelos alunos no tratamento das situações propostas, sendo pertinentes ou não na resolução da atividade.

Expomos aqui algumas afirmações dadas em relação às figuras desenhadas:

Respostas: O coração é maior que o triângulo, porque se colocar a metade do coração na metade do triângulo vai saber que o coração tem mais quantidade que o triângulo. Eu cheguei a essa conclusão medindo, coloquei uma dentro da outra, (o aluno usa o termo medindo e faz essa medição comparando a medida das áreas). A porta é menor do que o quadrado, eu cheguei a essa conclusão por que eu medi as duas formas.

Teorema em ação: medir área é comparar a área das duas figuras.

Respostas: A figura maior é a que sobra mais área. A menor é que cabe dentro da outra. A maior é a que não cabe dentro da outra, maior número de respostas. A maior é a que cobre a outra figura. A azul é maior, pois ocupa mais espaço.

Teorema em ação: a figura maior é a que tem mais área.

Teorema em ação: a figura menor cabe dentro da outra figura.

Respostas: Colocando uma em cima da outra sobra mais espaço. Podemos perceber que quando medimos as figuras uma é maior que a outra, porque sobra mais espaço. Toda vez que coloco uma figura em cima da outra a que sobra espaço é a de maior área. Coloco uma em cima da outra para saber qual é maior. Uma sobrou espaço e a outra não. Quando sobra mais espaço a área é maior. Esse tem comprimento maior, mas a área dele é menor. Esta ultima, foi a única resposta na qual os alunos mencionaram comprimento.

*Teorema em ação***:** medir área é comparar área

Teorema em ação: a figura que tem mais espaço tem a área maior.

Respostas: Porque uma figura está recortada, a outra não. A figura tal é maior por que eu cortei a outra.

Teorema em ação: As figuras têm mesma área, quando cortamos um pedaço de uma figura ela fica com menor área.

Esses teoremas nos apontam os conhecimentos mobilizados pelos alunos na resolução das situações. Tanto a visualização quanto a sobreposição foram procedimentos importantes para a elaboração de tais teoremas. Para Duval (1994), a visualização é como um processo que examina o espaço da representação, da ilustração de uma afirmação, para a exploração heurística de uma situação complexa, por uma breve olhada ou por uma verificação subjetiva. Na turma da professora Vitória, uma aluna identificou que uma das figuras era o trapézio e a outra era um trapézio recortado. Na turma da Tatiana não teve nenhuma menção parecida, no entanto, na questão quatro, há referências que a área de uma é maior que a outra pelo fato da outra estar recortada. E na questão cinco, nas duas turmas, quando solicitamos que recortassem duas figuras de áreas diferentes, mas que por visualização pudesse ser consideradas como iguais, foi comum recortarem duas figuras iguais e retirarem um pedaço de uma delas.

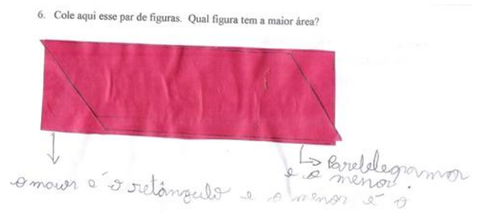


FIGURA 03: Exemplo1 de produção de aluno

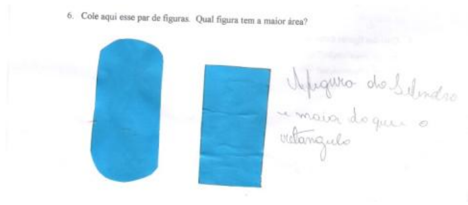


FIGURA 04: Exemplo 2 de produção de aluno

Um aspecto importante a ser salientado foi o compromisso e envolvimento dos alunos na resolução das atividades, tudo era muito bem feito, procuraram caprichar na escrita, faziam questão de colorir as figuras. Esse comportamento, com certeza, é consequência do contrato didático realizado em sala de aula entre as professora e seus respectivos alunos. Contudo, uma variável difícil de administrar é a ausência do aluno durante a aplicação da sequência didática. Quando uma criança faltava tínhamos que retomar alguns conhecimentos trabalhados na aula anterior para possibilitar a ela acompanhasse a atividade do dia.

5. Alguns Resultados

Os resultados propostos neste trabalho encontram-se fundamentados nas observações da aplicação da sequência didática. Assim, na entrevista realizada com os alunos, ao final da aplicação da sequência e da análise de algumas atividades podemos considerar, mesmo se tratando de uma conclusão parcial, que os alunos avançaram em seus conhecimentos em relação ao tema em estudo, pois demonstraram avanços conceituais no que diz respeito aos seguintes aspectos: a comparação de áreas de figuras por sobreposição; a utilização e conversão de registros de representação: figural, língua natural, linguagem matemática; a ordenação das informações que levam à elaboração de conclusões e generalizações; a elaboração das informações a fim de produzirem conclusões.

As respostas apresentadas pelos alunos nos levam a identificar variáveis que ao serem analisadas nos permitem conceber mudanças de valores no processo de resolução dos problemas por eles. Para Verganaud (1996), é por meio da resolução de diferentes problemas que um conceito adquire sentido para o aluno. Na atividade, em questão, colocamos os alunos em situações de diferentes representações, a fala, a escrita e desenho, as três expressaram a constância do argumento: a figura recortada tem área menor.

Enfim, a atividade elaborada com base na concepção histórica propiciou a percepção dos conhecimentos prévios do aluno. Além disso, o tratamento dado às situações pelos estudantes anteciparam a próxima atividade, na qual o objetivo era levá-los a perceber que se uma figura é obtida de outra retirando parte da primeira, a segunda está contida na primeira e, ainda, a área da segunda é menor do que a área da primeira. Tal antecipação aponta a utilização de procedimentos, por algumas crianças, que ressalta a relação existente na história entre o processo de composição e decomposição e a determinação de área. Dessa forma, como nas civilizações antigas, a decomposição e composição de figuras.

Boa parte das crianças identificou essa relação pela sobreposição, o que era esperado. Como já analisado por Duval (1994), nossos sujeitos também utilizaram a apreensão perceptiva na interpretar as figuras e por meio da sobreposição das mesmas, e assim, evidenciaram as diferenças entre as áreas das figuras dadas. Ficando institucionalizado com os alunos que a figura de maior área é a que sobra espaço e a menor é a que cabe dentro da outra. Os filtros para esse conhecimento foram a sobreposição, a forma visualizada e desenhada no espaço, a caracterização de objetos já conhecidos e o recorte de pequenas porções da figura.

6. Referências

ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática da Matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

AMMA, S. T. A. Geometry in Ancient and Medieval India 1a. ed. Índia: Motilal Banarsidass, 1979. 280 p.

ARTIGUE, M. Engenharia didática. In: BRUN, Jean. **Didácticas das matemáticas**. Tradução Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p.193-217.

BOYER, C. B. **História da Matemática**. 2. ed. Tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Edgar Blücher, 1996.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Matemática. Brasília: MEC/SEF – Terceiro e quarto ciclos, 1998.

DISTRITO FEDERAL. **Diretrizes curriculares da rede pública de educação básica do Distrito Federal. Brasília:** SEED, 2010.

DOUADY, Regine; PERRIN-GLORIAN, Marie-Jeanne. **Un processus d'apprentissage du concept d'aire de surface plane.** Educational Studies in Mathematics 20: 387-424, 1989. Netherlands: Kluwer Academic Publishers, 1989.

DUVAL, R. **Les différents fonctionnememts d'une figure dans une demarche géométrique.** N° 17. IREM de Strasbourg, 1994. p. 121-137.

______, R. (2003). Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: ALCÂNTARA, Sílvia Dias (org.) – **Aprendizagem em Matemática**: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p. 11-33.

FAUVEL, J.; VAN MAANEN, J. (Editores). **History in mathematics education**: the ICMI Study. Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers, v. 6, 2000.

GILLINGS, R. J. **Mathematics in the Time of the Pharaohs**. New York: Dover Publications Inc, 1972.

HOGBEN, L. **Maravilhas da matemática**: influência e função da matemática nos conhecimentos humanos. 4. ed. Rio de Janeiro: Globo, 1956.

JOSEPH, G. G. **The Crest of The Peacock.** 2. ed. USA: Princeton University Press, 2000.

KATZ, V. J. **A history of mathematics:** an introduction. 2. ed. USA: Addison-Wesley Educational Publishers Inc, 1998.

MENDES, I.A.; FOSSA, J. A.; VALDÉS, J. E. N. **A História como um agente de cognição na Educação Matemática**. Porto Alegre: Sulina, 2006.

MENDES, Iran Abreu. **Matemática e investigação em sala de aula:** tecendo redes cognitivas na aprendizagem. São Paulo: Livraria da Física, 2009a.

______. Investigação histórica no ensino de matemática. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2009b.

MIGUEL, A. As potencialidades pedagógicas da história da matemática em questão: argumentos reforçadores e questionadores. 73-105p. In: **ZETETIKÉ**, v.5, n.8, jul/dez.1997.

VERGNAUD, G. A teoria dos Campos Conceituais. In: **Didáctica das Matemáticas**, Jean Brunner. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. p. 155-191.

_______. A gênese dos campos conceituais. In: GROSSI, E. P. **Por que ainda há quem não aprende?:** A teoria. Petrópolis: Vozes, 2003