

A MATEMÁTICA POSSÍVEL DE SER TRABALHADA COM A UTILIZAÇÃO DE ESPELHOS PLANOS, ESPELHOS ARTICULADOS E CALEIDOSCÓPIOS

Rosemeire de Fátima Batistela
UEFS - Universidade Estadual de Feira de Santana/BA
rosebatistela@hotmail.com

Marli Regina dos Santos
UFV - Universidade Federal de Viçosa/MG
marliregs@gmail.com

Resumo

O objetivo dessa comunicação é apresentar resultados parciais de uma investigação interinstitucional sendo realizada por docentes que lecionam em cursos de Licenciatura em Matemática. A investigação foca o uso de espelhos e caleidoscópios no ensino de geometria na Educação Básica. Os espelhos permitem a reflexão e geram imagens e a exploração destas impulsiona a investigação para a geração de outras imagens. Nos caleidoscópios, a construção de bases para visualização de padrões previamente solicitados é um desafio que explora a visualização de pavimentações do plano e aplica-se também à visuais de tesselações espaciais e poliedros. Estes instrumentos foram utilizados em situações de ensino com alunos do curso de Licenciatura em Matemática da UEFS e UFRV e consideramos que as possibilidades do uso dos instrumentos destes para o ensino de matemática são diversas e sinalizam para a continuidade da utilização destes frutíferos recursos na formação inicial de professores de matemática.

Palavras Chave: Espelhos; Caleidoscópios; Ensino de Geometria; Educação Básica; Formação de Professores de Matemática.

1. Introdução

Desde os anos de 1990 é possível notarmos uma convergência de autores preocupados com o ensino de geometria. À época, (PEREZ, 1991; PAVANELLO, 1993; LORENZATO, 1995) denunciaram a calamitosa situação em que se encontrava o ensino de geometria nas escolas, a começar pela posição física em que esta se encontrava nos livros didáticos e a fragilidade de conhecimento geométrico dos professores em exercício. Ao mesmo tempo em que denunciam, estes estudos apontam a importância da aprendizagem de conceitos geométricos e recomendam que a resolução do problema nacional da omissão geométrica não passa por atitudes pontuais, mas por um amplo e contínuo esforço das diferentes instâncias do ensino de matemática.

De lá até nossos dias é evidente a quem se ponha a observar coleções de livros didáticos de matemática da década de 1990 e da atualidade que ações foram implementadas pelos órgãos diretores nacionais e parametrizadores da Educação Básica. Na maioria dos livros utilizados nas escolas de todo o país, os capítulos que se referem à assuntos de geometria estão dispostos de forma espalhada entre os blocos Números e operações, Tratamento da Informação, e Grandezas e medidas.

A preocupação com as dificuldades dos professores ao ensinar geometria ainda é perene e a abordagem desses assuntos de forma superficial ainda é um fato comum nas milhares de escolas da Educação Básica. O destaque à geometria tem sido enfatizado com o objetivo de resgatar o ensino de qualidade, objetivando a aprendizagem significativa, Fainguelernt (1999) e Fonseca et al (2001) sinalizam possibilidades do uso de tecnologias, de figuras de linguagem e de situações do cotidiano como aliados nessa construção do conhecimento geométrico nos estudantes.

A utilização de instrumentos produzidos com espelho para o ensino de geometria tem sido objeto de investigações, conforme se pode encontrar em Murari (1995; 1999), Batistela (2005), Santos (2006), e outros mais. A abordagem investigativa possibilitada pelo uso do caleidoscópio modificado para trabalho em grupo, somada à potencialidade de desafio inerente ao instrumento permite um trabalho exploratório principalmente a respeito de pavimentações do plano.

As pavimentações do plano são elementos disparadores de outras situações nas quais a tentativa de desenhar em regiões planas triangulares para a obtenção de determinado visual permite o trabalho de previsão de visual que envolve dedução, tentativa e erro, estabelecimento de conjecturas e constatação por meio do visual obtido nos espelhos.

O trabalho com pavimentações são ventilados principalmente nas obras de (DAFFER & CLEMENS, 1977; GRUNBAUM & SHEPARD, 1987; IMENES & LELLIS, 1987; SILVA, 1997; BARBOSA, 1993; MURARI, 1999; MARTINS, 2003; ALMEIDA, 2003) e incentivado por eles.

Batistela (2005) construiu um kit com espelhos e caleidoscópios para o ensino de geometria e apresentamos diversas possibilidades educacionais para os instrumentos, tais

como, a visualização de pavimentações planas, de poliedros e de pavimentações esféricas, além do trabalho com ângulos e polígonos. Também, apresentamos cada instrumento do kit, o material necessário para a produção dos instrumentos em ambiente doméstico e o *modus operandi* para a construção do kit. Fazem parte do kit: o espelho mágico, o espelho simples, espelhos articulados, caleidoscópios especiais e caleidoscópios generalizados. A menos do espelho mágico, todos os demais instrumentos que compõe o conjunto de espelhos são construídos com espelhos planos, muito embora reflitam objetos tridimensionais são todos espelhos planos. Os ângulos de corte dos espelhos devem ser precisamente calculados e os cortes cuidadosamente executados.

Nesta ocasião apresentaremos uma situação que evidencia o foi percebido por estudantes do curso de Licenciatura em Matemática no que se refere à possibilidades de trabalho com matemática utilizando os instrumentos do kit. O trabalho se realizou em uma disciplina que prevê em sua ementa o trabalho com metodologias de ensino, recursos, estratégias diversificadas e tecnologias para o ensino e a aprendizagem de geometria.

2. Sobre espelhos e seu uso no ensino de conteúdos geométricos

Suspeita-se que os espelhos são construções inspiradas nos espelhos de água, mas para ter a forma e as inúmeras utilidades que tem atualmente, o espelho depende do vidro. Por isso, a seguir historiaremos sobre a da criação do vidro.

Uma das hipóteses mais aceitas para a invenção do vidro é que tenha sido “descoberto” por acaso, há quatro mil anos, nas redondezas do Oriente Médio, pela observação do líquido originário sob as fogueiras feitas sobre solo arenoso. Grãos de areia, quando submetidos à temperatura acima de mil graus centígrados, transformam-se em substância líquida, que se torna vidro.

O vidro foi responsável por duas importantes revoluções. Em 1285, a invenção dos óculos, prolongando assim a vida dos trabalhadores em mais de quinze anos, e possibilitando a invenção da prensa de Gutenberg, em 1445, com padrão pequeno de letras.

No século XVI foi responsável pela revolução iniciada quando Leonardo da Vinci utilizou um vidro metalizado para comparar a figura da tela à figura refletida pelo espelho. Essa prática se espalhou e foi utilizada por diversos artistas da época, desencadeando um

movimento artístico de busca pelo real e pelo humano, que precipitou o desmoronamento da ordem social vigente na Idade Média, que valorizava o irreal e o divino, dando origem ao movimento que determinou o período denominado Renascimento.

No que se refere aos espelhos, de acordo com Roger (1824), as primeiras manifestações desse objeto indicam que no início de sua existência não passava de um pedaço de metal polido, que produzia imagens por reflexões, chegando a ter a forma de disco de metal polido levemente convexo. Mais tarde apareceram os espelhos de mão, grandes o suficiente para refletirem o corpo todo. Estes espelhos foram adotados pelos Celtas, vindo dos Romanos, e no fim da Idade das Trevas tinham se tornado comum por toda a Europa, geralmente feitos de madeira, prata ou de bronze polido.

O espelho era feito de metal polido. Contudo, com o passar dos tempos, ele ganhou uma forma mais produzida e conhecida até os dias atuais: uma lâmina de vidro prateada nas costas. Estes espelhos feitos com sustentação de vidro e costa refletora existem desde o fim do século XII e são produzidos em grande quantidade desde o século XVII. Atualmente, técnicas baratas de produção levaram a uma proliferação de seu uso, não só como luxos salpicados pela mobília, mas em guarda roupas, aparadores, em decorações de espaços públicos, como restaurantes, bares, e tudo o mais que conhecemos hoje e que são ornamentados com espelhos. E até como recurso didático para trabalhar temas da geometria.

Na ótica, um espelho é qualquer superfície polida que divirja os raios de luz de acordo com as leis da reflexão. Ele pode ter superfícies planas ou curvadas. Um espelho curvado é côncavo ou convexo, dependendo de como a superfície reflete os raios pelo centro da curvatura do mesmo. Espelhos curvados geralmente têm superfícies que são esféricas, cilíndricas, parabólicas, elipsoidais ou hiperboloidais.

Espelhos esféricos produzem imagens que são reduções, e são utilizados em automóveis. Espelhos cilíndricos convergem todos os raios de um feixe de luz para um único ponto. Espelhos parabólicos podem ser usados para focar raios paralelos para um foco real, como ocorre em um espelho de telescópio, ou para produzir um feixe paralelo de uma origem e seus focos. Um espelho elipsoidal refletirá a luz de um de seus dois pontos focais para o outro e um objeto situado no foco desse espelho terá uma imagem virtual. Os

espelhos que utilizamos para os instrumentos do kit são feitos com espelhos planos. Os espelhos planos refletem simetricamente um ponto-objeto colocado à frente.

No trabalho com espelhos planos é possível prever o visual a ser obtido nas reflexões. Por isso, pode-se lançar mão destes para fins educacionais, principalmente na geometria, devido aos inúmeros objetos que possuem linhas de simetria e que, assim sendo, podem ser visualizados nos espelhos. Alguns autores se referem aos caleidoscópios que permitem a previsão do visual como “caleidoscópios educacionais”. Desse modo, iremos nos apropriar desse termo e estendê-lo a todos os instrumentos articulados que constituem o kit, pois só o compõem por permitirem o visual previsto e, assim, possibilitarem utilização no ensino.

Os instrumentos que compõem o kit são: os espelhos simples e os articulados: espelho plano individual, espelho mágico (mira), caleidoscópios planos com dois, três e quatro espelhos, caleidoscópios generalizados, caleidoscópios especiais (ou espelhos articulados especiais).

O espelho mágico, o espelho simples, os caleidoscópios planos com dois, três e quatro espelhos permitem a visualização de objetos geométricos planos. Os caleidoscópios generalizados e os espelhos articulados especiais para “ver” poliedros possibilitam a visualização de objetos geométricos do espaço. A partir da visualização desses “entes” é que o trabalho torna-se possível. Todos os instrumentos construídos com espelhos servem para visualização de figuras que possuem linhas de simetria. Assim, permitem o trabalho com objetos do mundo geométrico e, por isso, endereçados para essa utilidade no ensino de geometria.

Os trabalhos de Murari (1999), Martins (2003), Almeida (2003), Gouveia (2005), Reis (2006) e Santos (2006) apresentam propostas de utilização destes instrumentos de espelho para a Educação Básica e para o Ensino Superior, trabalhando: pavimentações regulares do plano por meio de construção de regiões geradoras de visuais de pavimentações; tesselações do plano por polígonos e do espaço por poliedros utilizando um *software* de geometria dinâmica para a construção precisa dos polígonos, poliedros pavimentações durante a realização da proposta com os estudantes; pavimentações por polígonos regulares do tipo 1-uniforme e 2-uniforme, utilizando as bases geradoras e transformadas construídas com *software* de geometria dinâmica para o estudo das

progressões aritméticas, obtidas pelo número de regiões das bases transformadas de uma determinada pavimentação; fractais geométricos obtidos por meio da criação de bases caleidoscópicas transformadas fazendo uso de software de geometria dinâmica; geometria esférica utilizando um *software* de geometria esférica, esferas de isopor, tesselações esféricas e outros materiais; com professores de matemática e arte participando de uma capacitação envolvendo pavimentações do plano; respectivamente.

Há ainda outros trabalhos, tais como o de Silva (1997) que apresenta uma proposta de exploração da representação geométrica em ornamentos faixas, rosetas e mosaicos, a partir dos quais foram efetuados estudos sobre os movimentos de translação, reflexão e rotação das figuras; os de Barbosa (1993) e Barbosa (2002) que oferece oportunidades de envolvimento com a arte de descobrir e criar padrões euclidianos, trabalhar com pavimentações regulares e por polígonos irregulares, pavimentações por polígonos e padrões ornamentais; e, mostra as pavimentações obtidas quando são feitas interações que geram fractais, respectivamente.

Para estes autores o uso de instrumentos de espelho tem se mostrado uma possibilidade educacional de abordagem e trabalho com assuntos, conceitos, procedimentos e propriedades geométricas que condizem com as sinalizações dos Parâmetros Curriculares Nacionais, Brasil (1998) no que se refere às atividades propostas pelos parâmetros, ao uso de recursos materiais no ensino e de recursos tecnológicos associados ao ensino dos conteúdos visando a aprendizagem. O viés artístico do trabalho com pavimentações também é um ponto ressaltado nas propostas.

A nossa preocupação é convergente com a preocupação dos pensadores da Educação no que tange à que as melhorias necessárias na Educação Básica têm início no ensino de geometria na formação inicial de professores de matemática. Desse modo a nossa investigação a respeito das possibilidades de trabalho com matemática, percebidas para os instrumentos de espelho se expõe em palavras no projeto e se desenvolve na prática na busca que está em marcha.

3. A utilização dos espelhos, espelhos articulados e caleidoscópios em disciplinas de matemática em um curso de Licenciatura em Matemática

O curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Feira de Santana tem em seu currículo disciplinas que pretendem contemplar a componente Prática e “situar os conteúdos tratados ao longo do curso numa perspectiva didático-pedagógica” Brasil (2004, p. 11). Essas disciplinas são chamadas de Instrumentalização para o ensino de matemática (INEM). A orientação para o desenvolvimento dessas disciplinas pontua que devem ocorrer por meio da

Análise diagnóstica e proposições acerca da implementação de propostas que auxiliem no ensino-aprendizagem em Matemática, avaliação de práticas realizadas, relatos de experiências, entre outras, sempre a partir de uma profunda relação entre observações in loco de atividades desenvolvidas nas Instituições de Ensino da Educação Básica (BRASIL, 2004, p. 11).

Tal curso perfaz o período de quatro anos contando oito semestres letivos. Sua estrutura prevê uma disciplina de INEM em cada semestre do curso. No quinto semestre, o INEM V tem como princípio o trabalho com Geometria e preocupa-se com a dimensão conceitual bem como com a perspectiva didático-pedagógica deste ramo da Matemática. O projeto pedagógico de INEM V salienta:

Deve-se objetivar através dessa atividade a (re) colocação da geometria nos currículos da educação básica. Para tanto, estará constantemente sendo alimentada pelas dificuldades encontradas nas relações entre a Educação Básica e esse saber matemático. Na perspectiva da interdisciplinaridade, é válido ressaltar que os alunos estarão fazendo a transposição didática de todas as disciplinas de caráter geométrico; estudo que se iniciou no 2^a semestre. É nesse momento que teremos a oportunidade de discutir formas simplificadas de inserir nos Ensinos Fundamental e Médio situações-problema que serão trabalhadas nas disciplinas de Geometria Euclidiana e de Construções Geométricas, como por exemplo, os três problemas clássicos: a duplicação do cubo, a trisseção do ângulo e a quadratura do círculo, além das relações entre a geometria e a aritmética através das medidas e da proporcionalidade (BRASIL, 2004, p. 13).

O objetivo geral da INEM V é examinar as dimensões conceitual, didática, histórica e curricular da geometria e integrar os conteúdos geométricos aprendidos na Universidade e a dimensão educacional destes.

A disciplina INEM V agenda discussões correntes sobre o ensino de geometria, que perpassam as dimensões didática, filosófica, histórica, e o conhecimento específico do conteúdo demandado por estas dimensões. Além disso, entre os objetivos do programa da disciplina está o de organizar e analisar atividades de ensino de conteúdos geométricos por meio da utilização de recursos didáticos, tecnologias e das metodologias de resolução de problemas, investigações matemáticas e do uso da história da matemática.

Embebidos desses e de outros objetivos, utilizamos alguns instrumentos do kit de espelhos trazido em Batistela (2005) quando do estudo de polígonos e poliedros. Em particular, utilizamos o caleidoscópio com dois espelhos, o caleidoscópio modificado de três espelhos para trabalho em grupo, os espelhos articulados especiais, os caleidoscópios generalizados e os espelhos planos paralelos.

O caleidoscópio com dois espelhos construído com dois espelhos planos articulados na forma de um livro aberto, com as faces espelhadas voltadas para o interior. É adequado para visualização de padrões simétricos, para obtenção de polígonos, estudo dos conceitos de ângulo reflexão e rotação.

O caleidoscópio modificado para trabalho em grupo é construído com três espelhos, sendo que o terceiro espelho é mais baixo e deve ser encostado ao conjunto de dois espelhos articulados. É utilizado para visualização de pavimentações planas.

Os caleidoscópios generalizados são construídos com três espelhos formando um ângulo triedral e possibilitam a visualização de pontos no espaço. Permitem a visualização de vértices isogonais, de tesselações esféricas por polígonos esféricos e de poliedros semi-regulares.

Os espelhos articulados especiais são construídos pela articulação de espelhos com ângulos precisamente determinados e cortados, cujo vértice é o único ponto em comum entre eles. Cada um deles permite a visualização de um dos poliedros de Platão.

Quando tomamos dois espelhos simples e colocamos paralelamente entre si com as faces espelhadas frente a frente na vertical, temos o conjunto de dois espelhos planos verticais e paralelos que são utilizados para explicitação e abordagem dos conceitos de reflexão, orientação e translação.

Providenciou-se que os espelhos estivessem cortados segundo instruções e que os materiais, conforme instruídos por Batistela (2005), estivessem prontos e dispostos para a montagem dos espelhos. Assim, o início da atividade se deu pela colagem e pelo manuseio sem intenções didáticas. Num segundo momento, conduziu-se a um estudo sobre os poliedros de Platão e de Arquimedes, para em seguida serem apresentados a eles a intenção da atividade e a construção de bases para a visualização dos poliedros de Arquimedes.

O uso dos *softwares geogebra e poly* foi requerido e depois de terem visto a visualização de um sólido arquimediano no caleidoscópio generalizado e da apresentação do método utilizado para a dedução da base geradora do visual obtido, iniciaram a busca por obterem mais bases e assim foram construídas as 11 bases possíveis, conforme resultado de Batistela (2005). Faz-se importante salientar que foi enfatizado o fato de que os caleidoscópios generalizados refletem os poliedros devido às linhas de simetria dos mesmos, e que por este mesmo motivo é que dois dos poliedros de Arquimedes não podem ser visualizados nestes instrumentos, pois as linhas de simetria destes não coincidem com os ângulos formados pela articulação dos três espelhos.

Os caleidoscópios generalizados são formados por três espelhos articulados, na forma de um funil triangular. Qualquer reflexão no plano do espelho, o objeto e a imagem são equidistantes do plano, e, assim, todas as imagens de um ponto em caleidoscópios desse tipo encontram-se numa esfera, cujo centro é o ponto de interseção dos planos dos três espelhos. Sobre a esfera esses planos cortam-se formando um triângulo esférico, de ângulos $\frac{\pi}{l}$, $\frac{\pi}{m}$, $\frac{\pi}{n}$. O resultado das reflexões dos espelhos do triângulo esférico é a divisão da esfera toda em uma rede de tais triângulos, contendo imagens de qualquer objeto colocado dentro desse primeiro triângulo. Isso explica o que dissemos acima a respeito de dois dos poliedros de Arquimedes não poderem ser visualizados nestes caleidoscópios.

Tomando o raio da esfera como unitário, a área da esfera será 4π , enquanto a área de cada triângulo é $\frac{\pi}{l} + \frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{n} - \pi$; então, temos que a área da esfera dividida pela área de cada triângulo é um número positivo. Assim: $4\pi / (\frac{\pi}{l} + \frac{\pi}{m} + \frac{\pi}{n} - \pi) > 0$, sendo

necessário que os ângulos entre os espelhos satisfaçam a seguinte inequação: $\frac{1}{l} + \frac{1}{m} + \frac{1}{n} >$

1, para que se tenha ângulos que possibilitem repetição perfeita de imagens sobre a esfera.

Em Ball & Coxeter (1987) está apresentado que as soluções para esta são: (2,2,n); (2,3,3); (2,3,4) e (2,3,5). Que dá origem a quatro caleidoscópios com ângulos de: (90°, 90°, $\frac{\pi}{n}$); (90°, 60°, 60°); (90°, 60°, 45°); (90°, 60°, 36°). Nos três últimos casos os ângulos dos espelhos (que são os lados do triângulo esférico) são, respectivamente, de acordo com a solução da inequação anterior, (54°44', 54°44', 70°32'); (35°16', 45°, 54°44') e (20°54', 31°43', 37°23'). Nesta ocasião a que estamos nos referindo usamos apenas os de ângulos (54°44', 54°44', 70°32') e (20°54', 31°43', 37°23').

Os alunos que se matriculam em INEM V devem necessariamente ter cursado as disciplinas 'Geometria analítica e álgebra linear', 'Geometria plana' e estar cursando a disciplina 'Geometria espacial'. A autora desta comunicação foi a professora de INEM V e de Geometria Espacial durante essa experiência vivenciada. Na ocasião que estamos focando, 80 por cento dos alunos que cursavam INEM V estavam cursando Geometria Espacial. O trabalho efetuado com os caleidoscópios generalizados e os poliedros de Arquimedes em comunhão com o estudo de poliedros permitiu um fruir que foi muito prazeroso e que abriu horizonte para o estudo dos poliedros de Platão utilizando-se os espelhos articulados especiais.

No desenvolvimento dessa proposta, foi apresentado aos alunos o caleidoscópio de dois espelhos e pediu-se que eles explorassem o instrumento e as possibilidades de trabalho com ele em relação a conteúdos geométricos. Estes se envolveram com a atividade e ao final construímos um quadro com os nomes dos conteúdos que eles haviam percebido que poderiam ser trabalhados com este instrumento.

No bojo da questão, foi apresentada a definição e explicado que um caleidoscópio é um instrumento ótico que permite a reflexão de um visual sem sobreposições ou lacunas, e a exploração sobre os ângulos formados entre os espelhos e os caleidoscópios possíveis com aquela articulação.

Na sequência, o terceiro espelho foi acoplado e o caleidoscópio de três espelhos foi formado e naturalmente a exploração se iniciou e se manteve em estava em alta conta entre os estudantes. Foi semelhante ao que ocorreu quando foi proposta a investigação dos espelhos paralelos.

Os estudantes manusearam, testaram, investigaram no envolvimento com os instrumentos foram sinalizando as possibilidades, e o produto final desse trabalho foi a produção de uma oficina que eles chamaram de “Aprendendo geometria com caleidoscópios”.

A exploração dos instrumentos possibilitou a nomeação dos assuntos geométricos que podem ser abordados e ou trabalhados com os instrumentos. Tendo sido exposto no quadro os conteúdos elencados, eles, os estudantes, se puseram a elaborar uma proposta didática para cada um destes instrumentos. Segue um exemplo da sugestão inicialmente listada para os espelhos planos paralelos:

- *Apresentar o espelho colocado na posição de frente um com o outro e pedir que digam o que acontece quando colocamos um objeto na região entre os espelhos;*
- *Sugerir que se coloque a cabeça entre os espelhos e que digam sobre o que se vê;*
- *Propor que o estudante coloque os espelhos sobre uma folha de papel em branco e que se diga sobre o que pode ser observado e se percebem semelhança com algum ente geométrico; fazer a mesma coisa com um canudo apoiado em ângulo reto com os dois espelhos; e com dois canudos colocados desse modo (paralelos entre si) entre os espelhos;*
- *Explorar outras situações com a utilização de canudos e explorar propriedades de retas, posição relativa de retas, propriedades do plano; e noção de infinito.*
- *Propor questionamentos na direção de desenvolver a reflexão sobre a frase “retas paralelas se encontram no infinito” e sobre essa representação do infinito possível na reflexão destes espelhos;*
- *Suscitar reflexões traçando conexões entre a reflexão sucessiva das imagens nos dois espelhos paralelos e no caleidoscópio modificado de três espelhos para trabalho em grupo.*

Realizada essa proposta de forma coletiva, os estudantes individualmente foram solicitados a elaborarem atividades relacionadas ao que fora sugerido na organização de trabalho proposta, e assim, foram construídas fichas de trabalho. Abaixo uma das fichas para dois espelhos articulados:

- *Forme um ângulo de 72° entre os espelhos. Quantos lados a figura formada pelo canudo e seus reflexos nos espelhos possui? Qual e o nome desta figura?*
- *Forme um ângulo de 60° entre os espelhos. Quantos lados tem a figura formada pelo canudo e seus reflexos nos espelhos? Qual é o nome dela?*
- *Forme um ângulo de $51,5^\circ$ entre os espelhos. Quantos lados tem a figura formada pelo canudo e seus reflexos nos espelhos? Qual o nome dela?*
- *Forme um ângulo de 45° entre os espelhos. Quantos lados tem a figura formada pelo canudo e seus reflexos nos espelhos? Como ela é chamada na geometria?*

- *Divida 360° por 5 depois por 6, por 7 e por 8. Existe uma relação entre os resultados obtidos e os questionamentos anteriores?*
- *Como fazemos para obtermos a visualização de um quadrado?*
- *Qual o ângulo que deve ser formado entre os espelhos para que se visualize um decágono*

A disciplina de INEM V teve essa produção como produto avaliado na terceira unidade letiva. Passado o período de férias, os estudantes que produziram a oficina foram convidados a retomarem o produto e depois de ajustes proporemos um curso de extensão que trabalhe com os instrumentos de espelho.

4. Resultados parciais da Pesquisa

A investigação das potencialidades dos instrumentos de espelho que compõe o kit exposto em Batistela (2005) tem se mostrado um caminho acertado e em coerência com as ideias atuais dos educadores matemáticos para o ensino de geometria e a formação de professores. Os resultados estão por vir e o desenvolvimento da pesquisa a respeito das possibilidades didáticas dos instrumentos para o ensino de geometria cremos que será para nós promissor e principalmente proveitoso para os professorandos em formação.

5. Referências

ALMEIDA, S. T. **Um estudo de pavimentações do plano utilizando caleidoscópios e o software Cabri-Géomètre II**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

BARBOSA, R. M. **Descobrendo padrões em mosaicos**. São Paulo: Atual, 1993.

BARBOSA, R. M. **Descobrendo a geometria fractal para a sala de aula**. São Paulo: Autêntica, 2002.

BATISTELA, R. F. **Um kit de espelhos planos para o ensino de geometria**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

BRASIL, FEIRA DE SANTANA. Departamento de Ciências Exatas da Universidade Estadual de Feira de Santana. **Resumo da Reforma Curricular do curso de Licenciatura em Matemática**. Feira de Santana, 2004.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática**. Brasília: MEC/ SEF, 1998.

DAFFER, P. G. O.; CLEMENS, R. S. **Geometry**: an investigative approach. Menlo Park: Addison-Wesley, 1977.

FAINGUELERNT, E. K. **Educação matemática**: representação e construção em geometria. Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 1999.

FONSECA, M. C. F. R. et al. **O Ensino da geometria na escola fundamental**: três questões para a formação do professor dos ciclos iniciais. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.

GOUVEIA, F. R. **Um estudo de fractais geométricos através de caleidoscópio e software de geometria dinâmica**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

GRÜNBAUM, B.; SHEPHARD, G. C. **Tilings and Patterns**. New York: W. H. Freeman and Company, 1987.

LORENZATO, S. **Por que não ensinar geometria?** Educação Matemática em Revista-Geometria, Blumenau, ano 3, n. 4, p. 4 - 13, 1995.

MARTINS, R. A. **Ensino-aprendizagem de geometria: uma proposta fazendo uso de caleidoscópios, sólidos geométricos e softwares educacionais**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2003.

MURARI, C. **Ensino-aprendizagem de geometria nas 7ª e 8ª séries, via caleidoscópios**. (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.

MURARI, C. Um caleidoscópio educacional modificado para trabalhos em grupo. **Revista da Educação Matemática**, São Paulo, n. 2, p. 11-15, 1995.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e conseqüências. **Zetetiké**, Campinas, n.1, p. 19-49, 1993.

PEREZ, G. **Pressupostos e reflexões teóricas e metodológicas da pesquisa participante no ensino de geometria para as camadas populares**. Tese (Doutorado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de Campinas, Campinas, 1991.

REIS, J. A. S. **Geometria esférica por meio de materiais manipuláveis**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

ROGER, P. M. **Kaleidoscope**. In: ENCICLOPÉDIA Britânica. 4. ed., Edimbourg: Editora Enciclopédia Britânica, 1824. v. 5, p. 163-171.

SANTOS, M. R. **Pavimentações do plano: um estudo com professores de Matemática e Arte**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

SILVA, V. C. **Ensino de geometria através de ornamentos**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1997.