

SOBRE O ENTENDIMENTO DA NOÇÃO DE INDETERMINAÇÃO: O CASO DA REGRA DE L'HOSPITAL

Italândia Ferreira de Azevedo¹

Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA

[*italandiag@gmail.com*](mailto:italandiag@gmail.com)

Francisco Regis Vieira Alves²

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Estado do Ceará

[*fregis@ifce.edu.br*](mailto:fregis@ifce.edu.br)

Resumo:

Esta pesquisa relata um estudo em andamento com um grupo de alunos que estão cursando a disciplina de Cálculo I, existente no 3º semestre do curso de Licenciatura em Matemática. Observamos uma problemática surgida a partir da dificuldade de compreensão, por parte de alguns alunos, dos conteúdos apresentados nessa disciplina. Logo tivemos como intuito oferecer uma metodologia diferenciada para o ensino e aprendizagem deste conteúdo, focando especificamente o entendimento da noção de indeterminação usando a regra de L'Hopital através do *software* Geogebra. O *software* permite uma perfeição na visualização e percepção dos gráficos, podendo proporcionar uma melhor compreensão dos conceitos de aplicação de uma regra. Assim, nesse trabalho, sugerimos o uso do *software* Geogebra como auxílio na visualização e interpretação dos gráficos de funções, podendo assim construir um conhecimento interpretativo geométrico e não somente uma aplicação direta como é cobrado pela maioria dos professores.

Palavras-chave: Regra de L'Hopital; Indeterminação; Software geogebra

1. Introdução

A disciplina de Cálculo existente nos cursos da área de ciências exatas está, em muitas situações, lotada como umas das primeiras disciplinas do curso, logo muitos dos estudantes ainda não adquiriram a noção de aplicação dos métodos numéricos necessários para o entendimento de limites e derivadas. Muitos alunos não absorvem o entendimento algébrico que é apresentado nos livros didáticos tradicionais (LEITHOLD, STEWART, entre outros) com muita facilidade, uns necessitam de uma maior disciplina de estudos, mas outros necessitam de uma metodologia diferenciada para atingir o aprendizado.

As apresentações dos gráficos envolvendo o conteúdo de cálculo são mostradas, na maioria das vezes, sem nenhum recurso tecnológico, impossibilitando assim um

1. Aluna do curso de Especialização em Ensino de Matemática na Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA – Sobral - CE.

2. Doutor em Educação pela Universidade Federal do Ceará. Professor do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará campus Fortaleza.

aprendizado mais nítido e compreensível. No momento que o aluno visualiza os gráficos das expressões algébricas pode ser proporcionada uma melhor compreensão dos conceitos de aplicação de uma regra.

Logo, a importância de um recurso tecnológico para as aulas de cálculo. Como esclarece Guimarães et al (2012) “faz-se necessária, a cada dia, a busca por novas alternativas didáticas que possam auxiliar a aprendizagem daqueles alunos que têm mais dificuldades com o assunto”.

Assim, nesse trabalho, sugerimos o uso do *software* Geogebra como auxílio na visualização e interpretação das expressões algébricas. Temos como foco desse trabalho as regras de L’Hopital para calcular limites indeterminados do tipo $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^{∞} , ∞^0 , ∞^{∞} e 0^0 usando derivadas, devido ser um assunto que demanda um notável tempo de estudo.

2. Problema da Pesquisa

A problemática dessa pesquisa surgiu a partir da dificuldade enfrentada por uma parte dos alunos durante a disciplina de Cálculo I. Logo temos como intuito oferecer um melhor método de ensino e aprendizagem, por partes dos professores e alunos, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, focando especificamente o uso da regra de L’Hopital através do *software* Geogebra. De acordo com algumas pesquisas realizadas por Alves (2012), essa disciplina possui um índice de reprovação bastante elevado, ou até mesmo, o não aprendizado ou entendimento por uma grande parte da turma.

2.1 Objetivos da Pesquisa

Este trabalho tem como objetivo geral proporcionar maior estímulo de ensino e aprendizagem por parte do professor, no momento da apresentação de uma didática diferenciada, e por parte do aluno, por participar de um aprendizado mais claro e solidificado, isto é, saindo de uma zona de abstração algorítmica e de aplicação automática de um teorema, e entrando em uma área de visualização e interpretação, evitando assim segundo Alves e Neto (2012) o tratamento direto nos limites indeterminados.

3. O ensino do Cálculo e o uso da Tecnologia

Segundo Alves (2012) desde a década de 1980, encontramos pesquisas e relatos pertinentes às dificuldades referentes ao ensino e a aprendizagem no Cálculo Diferencial e Integral de uma Variável Real.

Mas encontramos no ensino atual maneiras diversificadas de propostas de ensino envolvendo a inserção da tecnologia na prática de sala de aula (ALVES, 2012). Podemos destacar o uso do *software* Geogebra como um auxiliador na visualização e percepção de um conteúdo que exija a construção e interpretação de gráficos.

A tecnologia proporciona um ensino dinâmico e envolvente, além de facilitar na compreensão da interpretação geométrica, através da visualização, pois para Alves & Borges Neto (2012) “a visualização é uma das habilidades cognitivas que pode ser promovida no ensino deste conteúdo e é objeto de atenção por parte de especialistas tanto no Brasil como no Exterior”.

4. A regra de L’Hopital

Selecionamos como fonte de estudos os livros didáticos (LEITHOLD, 1994; STEWART, 2004) e artigos publicados na *internet* que se referenciam ao tema estudado.

A regra de L’Hopital tem como objetivo calcular o limite de frações nos casos em que há indeterminações do tipo $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$, 1^{∞} entre outras. Estas indeterminações estão presentes em uma grande parte do conteúdo estudado em Cálculo Diferencial e Integral. Porém, essa regra é apresentada por Barbosa (2008) como uma ferramenta para calcular limites indeterminados, sem a preocupação de uma justificativa, o que para o aprendizado matemático, é de certa forma um problema.

Retirando de Alves (2012) onde foi destacado no seu artigo a seguinte definição: Supondo que $f(x)$ e $g(x)$ são diferenciáveis e $g'(x) \neq 0$ próximo do ponto $x = a$ (exceto possivelmente em a). Considerando ainda

$$\text{que } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \\ 0 \text{ u} \end{cases} \quad (\text{temos uma forma indeterminada do}$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm \infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm \infty \end{cases}$$

tipo $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$. Então $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ se o limite do lado direito existir (ou é $+\infty$)

ou $-\infty$) que possui um significado geométrico relativo ao quociente das declividades de retas no ponto $x = a$.

Em nossa pesquisa, a exploração do *software Geogebra* terá como papel destacar o sentido de proporcionar a evolução de habilidades cognitivas pertinentes à visualização.

5. Metodologia e Procedimentos

O estudo está em andamento na Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA, situada na cidade de Sobral Ceará. Iniciamos a pesquisa com uma investigação de cunho qualitativo sobre o ensino-aprendizagem dos alunos perante a disciplina do 3º semestre de Cálculo Diferencial e Integral (Cálculo I) do curso de Licenciatura de Matemática.

De caráter descritivo e exploratório, nossa investigação está considerando dados oriundos de entrevistas semiestruturadas, realizadas ao decorrer de atividades apresentadas pelos pesquisadores e resolvidas por três sujeitos (alunos) do curso de Matemática. Cabe acrescentar que este grupo de três alunos participa das aulas de monitoria da disciplina de Cálculo I, pois os mesmos não estavam acompanhando a disciplina com um bom rendimento.

No primeiro momento da pesquisa foi apresentada a toda a turma de Cálculo I, uma lista com cinco questões de limites indeterminados, pois já detinham o conhecimento formal que os qualificava para a resolução da atividade. Após a correção foi observado que muitos alunos não possuíam o entendimento gráfico, ou seja, muitos só fizeram a aplicação direta das indeterminações, compondo esse meio os três alunos que nos ajudarão na conclusão da pesquisa.

No segundo momento, fomos acompanhar os nossos sujeitos nas aulas de monitoria de Cálculo I, onde o monitor continuava apresentando somente a forma automática de resolução das questões de indeterminações.

Tendo em vista o nosso interesse de aprendizagem por um determinado assunto específico, o qual foi o entendimento da noção de indeterminação com a regra de L'Hopital, num contexto determinado que foi a interpretação geométrica, elaboramos um plano de estudo para trabalhar esse assunto de uma forma prática e clara, isto é, usando o *software Geogebra* com intuito de buscar a superação de aprendizagem desse conteúdo. Logo, o nosso plano de estudo para superar essa dificuldade de aprendizagem seguirá as seguintes etapas:

- 1) Apresentar o *software geogebra* como auxílio nas visualizações dos gráficos;
- 2) Praticar as construções dos gráficos no *software*;

- 3) Aprender a interpretar os gráficos construídos a partir das funções;
- 4) Resolver as atividades de indeterminações tanto da forma direta como da forma de interpretação geométrica.

6. Apresentação dos resultados previstos

As cinco questões aplicadas no início da pesquisa teve como intenção diagnosticar o nível de conhecimento da turma em determinado assunto, que foi “indeterminação usando a regra de L’Hopital”. O resultado após a correção da atividade nos deu um norte para seguir na pesquisa. E daí, iniciamos o trabalho de ensinamento de interpretação/entendimento de gráficos de uma função através do *software* geogebra.

As etapas do plano de estudo, para atingir o aprendizado desse conteúdo, estão sendo obdecidas perante a ordem que foi apresentada na nossa metodologia de trabalho.

A primeira e a segunda etapa já foram realizadas com nossos sujeitos da pesquisa. Apresentamos as funções existentes no *software* e trabalhamos algumas práticas de exercícios de construções de gráficos de funções (Figura 1), para que nossos sujeitos dominem um pouco mais o geogebra.

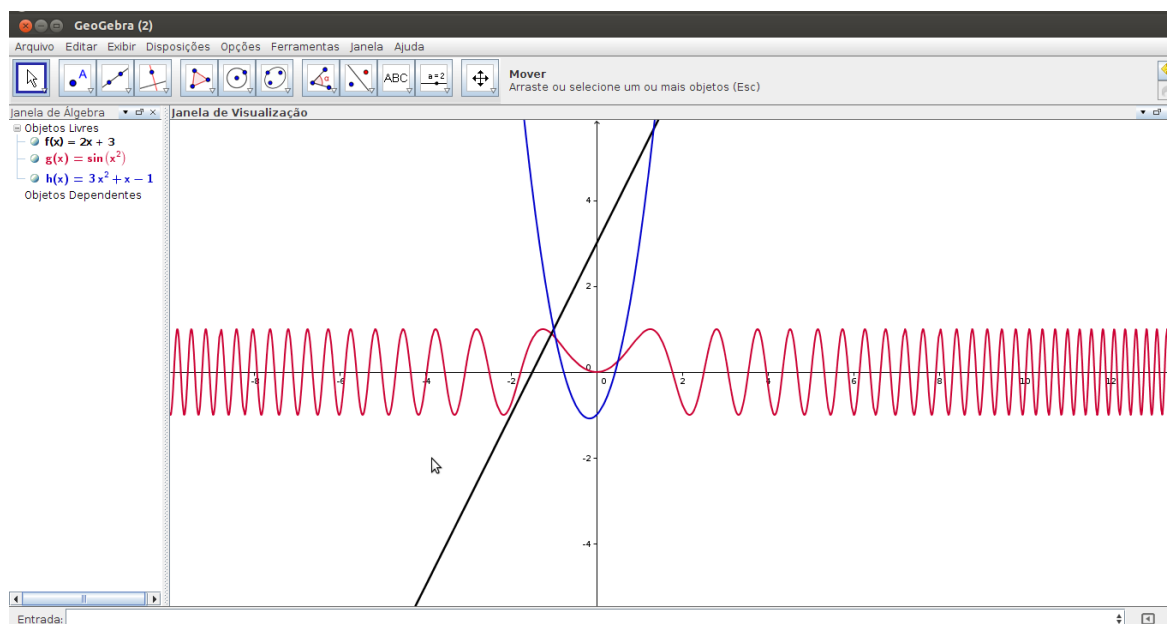


Figura 1 – Uma das práticas de construções de gráficos de funções feitas em sala.

Observamos que eles iniciaram um processo cognitivo de forma mais clara e visível, pois muitos alunos comentaram que com a visualização fica mais fácil a compreensão.

A terceira etapa, que ainda vai ser trabalhada, é considerada a parte mais importante da pesquisa, pois é nessa etapa que iremos trabalhar o aprendizado do aluno, ou seja, através

das visualizações dos gráficos eles deverão ser capazes de interpretar os significados e a partir dali, retirar as informações necessárias para uma resposta que exige uma interpretação geométrica.

Já na quarta parte, o aluno deverá resolver atividades de indeterminações (Figura 2) tanto da forma direta como da forma de interpretação geométrica, causando o entendimento mais completo do conteúdo apresentado.

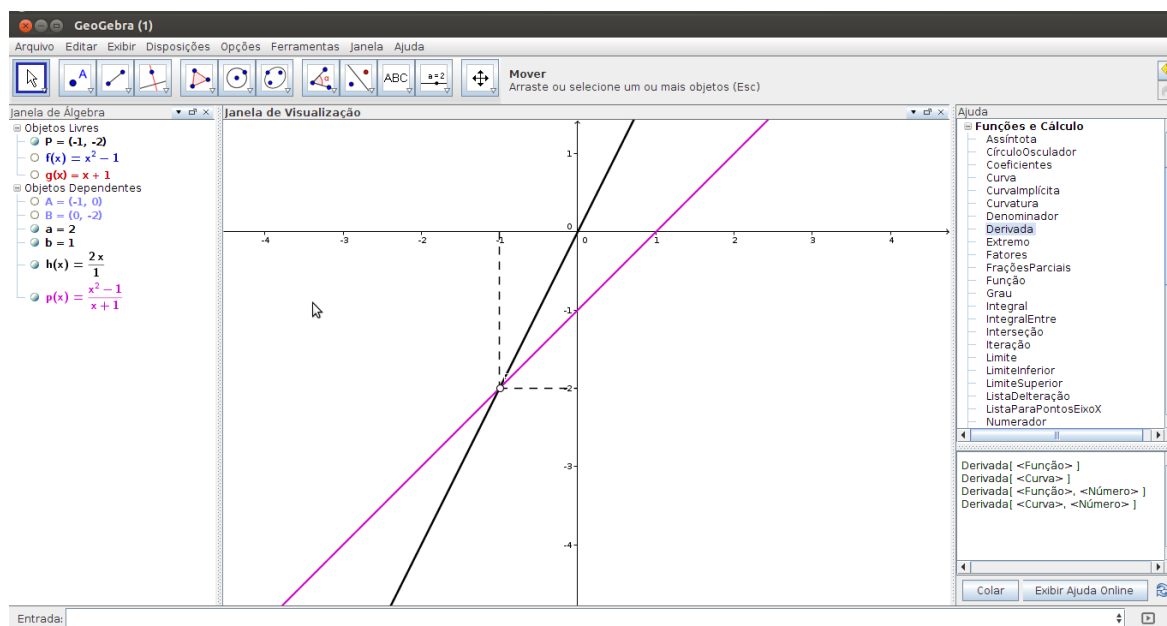


Figura 2 – Indeterminação 0/0 e seu limite em $x = -1$.

7. Considerações Finais

Neste estudo, apresentamos uma metodologia de ensino diferenciada para trabalhar o entendimento da noção de indeterminação usando o caso da regra de L'Hopital através do *software* geogebra. Trabalhamos algumas etapas para construir um aprendizado compreensível e nítido, além do intuito de promover situações de ensino e aprendizado envolvendo a construção e interpretação de gráficos.

O uso da tecnologia está sendo fundamental para o andamento dessa pesquisa, pois sem o *software* geogebra seria difícil a apresentação dos gráficos de funções, além do mesmo proporcionar uma melhor visualização e percepção geométrica para os alunos.

Por fim, o uso e a exploração do *software* geogebra está assumindo um papel fundamental no entendimento dos gráficos com limites indeterminados. A assimilação do conteúdo por parte dos alunos, participantes da pesquisa, está proporcionando a verificação

do aprendizado real, e não somente a técnica de aplicação automática apresentada pela maioria dos professores de cálculo.

8. Agradecimentos

Agradeço a Universidade Estadual Vale do Acaraú – UVA pela oportunidade de participar de um evento tão importante para minha formação profissional, ao meu orientador pelas dicas de como seguir na minha pesquisa e aos alunos sujeitos desse trabalho.

9. Referências

Alves, Francisco Regis Vieira. NETO, Hermínio Borges. Interpretação Geométrica para a Regra de L'hopital com o Auxílio do Geogebra. Actas da Conferência Latino Americana de Geogebra, Uruguay, 2012. Disponível em: <http://www.geogebra.org.uy/2012/actas/5.pdf>. Acessado em 04 de dezembro de 2012.

Alves. F. R. Vieira & Borges Neto (2012). Uma sequência didática para explorar a regra de L'Hospital com o uso da tecnologia. In: Educação Matemática Pesquisa, v; 15, nº 2, 1-31. Disponível em: <http://revistas.pucsp.br/index.php/emp/>. Acessado em 20 de janeiro de 2013.

Barbosa. Everaldo. F. (2008). A regra de L'Hopital: análise histórica da regra de L'Hospital (dissertação) – Pós graduação em Matemática. Campinas: Universidade Estadual de Campinas, 90p.

Guimaraes, Yara Patrícia B. de Q. MIRANDA, Dimas F. de. LAUDARES, João Bosco. Utilização de Sequência Investigativa no Ensino-Aprendizagem de Taxas de Variação. Anais do V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática 28 a 31 de outubro de 2012, Petrópolis, Rio de Janeiro, Brasil.

Leithold, Louis. O Cálculo com Geometria Analítica. v. 1, 3ª edição, Editora: Harbra, 1994.

Simmons, George. F. Cálculo com Geometria Analítica. São Paulo: Editora McGrawHill, 1988, 846p.