COORDENADAS POLARES NO ENSINO MÉDIO: CONTRIBUIÇÕES PARA O ENSINO E A APRENDIZAGEM DE TRIGONOMETRIA E NÚMEROS COMPLEXOS

Carla Antunes Fontes
Instituto Federal Fluminense
carlafontes@globo.com

Rafaela dos Santos Souza Muniz
Instituto Federal Fluminense
faelamuniz@gmail.com

Resumo:
Neste trabalho, o principal objetivo foi contribuir para o ensino e a aprendizagem de Números Complexos. Vários autores pesquisados afirmam que as maiores dificuldades no estudo deste assunto surgem quando são necessários conceitos prévios de Trigonometria. Nos livros didáticos, tanto a Trigonometria quanto os Números Complexos são tratados de modo insatisfatório, sendo seu estudo predominantemente algébrico. Assim, buscou-se um elemento integrador, que permitisse abordar ambos os conteúdos. As Coordenadas Polares constituíram-se o aliado perfeito, pois poderiam ser utilizadas não só para revisitar a circunferência trigonométrica como para representar geometricamente um número complexo, destacando seu módulo e seu argumento principal. A introdução das Coordenadas Polares deu-se de forma bastante natural, e os alunos não demonstraram dificuldades em sua utilização. A representação geométrica do número complexo, que em geral é abordada de forma sucinta nos livros didáticos, facilitou sua compreensão, pois permitiu o trabalho tanto com transformações de tratamento como de conversão de um mesmo objeto matemático – o Número Complexo. Os pressupostos teóricos deste trabalho apoiam-se em um tripé, composto pelas teorias da representação semiótica de Raymond Duval, da criação didática e da transposição didática, de Yves Chevallard.

Palavras-chave: Educação Matemática. Trigonometria. Números Complexos. Coordenadas Polares

1. Introdução

Com base nos Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio (BRASIL, 2000), pode-se afirmar que o ensino da Trigonometria é extremamente necessário, inclusive como desenvolvedor de habilidades e competências na aprendizagem de Matemática.

> Outro tema que exemplifica a relação da aprendizagem de Matemática com o desenvolvimento de habilidades e competências é a Trigonometria,

> desde que seu estudo esteja ligado às aplicações, evitando-se o investimento excessivo no cálculo algébrico das identidades e equações para enfatizar os aspectos importantes das funções trigonométricas e da análise de seus gráficos. (BRASIL, 2000, p. 44)

Mesmo com tal importância, os alunos ainda encontram obstáculos no estudo de Trigonometria. Diversos autores pesquisados são claros ao mencionar este fato. Francisco de Oliveira (2006, p.11), em sua dissertação de mestrado, relata que

> Em aproximadamente 18 anos de trabalho com turmas de oitava série e do Ensino Médio, observamos a dificuldade apresentada pelos alunos durante aulas de trigonometria, ou quando são abordados problemas a ela relacionados, ou mesmo problemas da física que usam algum conceito trigonométrico básico. (OLIVEIRA, 2006, p.11)

Os problemas na aprendizagem de Trigonometria refletem-se no estudo de Números Complexos, a partir do momento em que se inicia sua escrita na forma trigonométrica ou polar. Araújo (2006, p.15) ressalta este fato ao comentar as dificuldades demonstradas pelos alunos, desde as perguntas feitas em sala de aula até o baixo rendimento em atividades avaliativas.

> [...] observamos que nossos alunos do segundo ano apresentam notáveis dificuldades durante as aulas referentes ao conteúdo de Números Complexos. Estas dificuldades se acentuam mais quando aparecem números representados na forma trigonométrica e em questões que envolvem a primeira e a segunda fórmula de De Moivre. (ARAÚJO, 2006, p. 15)

Apesar de sua relevância, o estudo dos Números Complexos é feito de forma rápida e sem sentido, pois “[...] baseia-se em uma abordagem puramente algébrica, onde estão ausentes o significado e as aplicações destes números.” (CARNEIRO, 2004, p. 1).

Lima (2001), ao analisar o “livro genérico”, demonstra sua insatisfação em relação à forma como ambos os temas (Trigonometria e Números Complexos) são tratados. Ele enfatiza o “tratamento demasiadamente longo” da Trigonometria e a “imperdoável ausência” de aplicações geométricas das operações entre Números Complexos. (LIMA, 2001, p. 464-467)

Segundo o mesmo autor, em grande parte do Brasil a única referência do professor para estudo ou preparação de aulas é o livro didático. (LIMA, 2001, p. 462) Uma das possíveis razões para o aparente 'descaso' em relação aos Números Complexos seja talvez a abordagem incipiente do “livro genérico”. Sentindo-se inseguro a respeito do tema, o professor o estuda superficialmente com os alunos.

Paralelamente, de acordo com Carneiro (2004, p. 1), "[...] há uma outra abordagem possível, a geométrica, onde desde o primeiro momento os complexos apresentam-se como pontos ou vetores do plano [...]". Em tal "abordagem geométrica", porém, os alunos sentem dificuldade, pois há lacunas em Trigonometria que prejudicam sua compreensão. De acordo com Araújo (2006, p.70), quando se trata de Números Complexos, “A dificuldade do aluno na maioria das vezes refere-se à falta de conhecimento do conteúdo anterior, no caso, a Trigonometria.”.

Para o aluno, não ficam claros os vários registros do objeto Número Complexo, nem as transformações entre eles. A representação gráfica (à qual alguns autores se referem como *representação geométrica*) tem um papel muito importante neste contexto, pois a compreensão do objeto como um todo depende da coordenação de vários registros. (DUVAL, 2009, p. 38)

Ao mesmo tempo, o estudo de diferentes sistemas de coordenadas pode auxiliar a visualização das várias maneiras de representar o mesmo objeto, conforme as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (BRASIL, 2006, p. 93).

No caso dos Números Complexos, as Coordenadas Polares podem ser utilizadas como auxílio à visualização, uma vez que sua escrita na forma trigonométrica é uma aplicação do sistema de Coordenadas Polares. Da mesma forma, a circunferência trigonométrica pode ser abordada tanto sob o ponto de vista do sistema de coordenadas retangulares como polares.

A proposta deste trabalho é, portanto, a introdução do sistema de Coordenadas Polares como elemento facilitador do ensino e da aprendizagem de Números Complexos e Trigonometria.

2. Dificuldades de ensino e aprendizagem

Existe uma dificuldade intrínseca ao conteúdo de Números Complexos, que é o fato de não representarem quantidades. Isto, por si só, já suscita inquietação e desconfiança em professores e alunos. (ROSA, 1998, p. 25)

Vários obstáculos epistemológicos, baseados em paradigmas preexistentes, tiveram que ser superados até que os Números Complexos fossem aceitos pela comunidade científica como objetos matemáticos legítimos.

Segundo Pommer (2010, p. 1),

> Os obstáculos de origem epistemológica se devem às resistências advindas do próprio conhecimento e que fazem parte da construção do saber matemático, sendo encontrados na história do desenvolvimento e evolução dos conceitos. [...] estes obstáculos não podem ser evitados, já que se constituem como porta de acesso aos respectivos conhecimentos.

Ao terminar o Ensino Fundamental, o aluno tem a nítida impressão de que não existem raízes quadradas de números negativos, mesmo que o professor tenha o cuidado de dizer que uma equação de 2º grau de discriminante negativo não possui raízes *reais*. Isso porque a palavra *real*, para ele, significa *algo que existe*, e não um elemento do conjunto dos números reais. Ao se defrontar com os Números Complexos, o aluno sente-se *enganado*. Como é que, de repente, aquilo que não existia simplesmente passou a existir? O conhecimento dos números reais, ao mesmo tempo em que é necessário para a compreensão dos Números Complexos, pode também se constituir um obstáculo para sua aprendizagem. Este é um *obstáculo didático*. (ROSA, 1998, p.35; LOPES, 2011, p. 3)

> [...] os obstáculos didáticos nascem da escolha das estratégias do ensino, deixando-se formar, no momento da aprendizagem, conhecimentos errôneos ou incompletos que se revelarão mais tarde como obstáculos ao desenvolvimento da conceituação. Reconhecer um obstáculo permite ao professor rever sua primeira apresentação do conceito em questão, para explicitar melhor a dificuldade vivida pelo aluno. (ROSA, 1998, p.35)

A dificuldade de abstração que envolve o conceito de *unidade imaginária* também é observável historicamente. Na verdade, somente quando associada ao ponto (0; 1) do plano de Argand-Gauss, passou a ser aceita como objeto matemático legítimo. Houve a necessidade de visualização, por meio da representação gráfica. No ensino de Números Complexos, se esta representação gráfica for omitida, ou apresentada tardiamente, é provável que a mesma dificuldade de abstração que atravessou séculos seja enfrentada pelos alunos. (LOPES, 2011, p. 3)

3. Transposição didática e criação didática

O conceito de transposição didática, introduzido pelo sociólogo Michel Verret em 1975, foi revisitado pelo educador e pesquisador francês Yves Chevallard, na década de oitenta.

> Um conteúdo do saber que tenha sido designado como saber a ensinar, sofre a partir de então um conjunto de transformações adaptativas que vão torná-lo apto a ocupar um lugar entre os *objetos de ensino*. Este "trabalho" que transforma um objeto de saber a ensinar em um objeto de ensino é denominado de *transposição didática*. (CHEVALLARD, 2005, p. 45 apud NEVES, 2009, p. 55 - grifos do autor)

Segundo Neves (2009, p. 25), o objetivo da transposição didática é, na verdade, promover o contínuo processo de atualização dos saberes ou conteúdos escolares, de forma a acompanhar a evolução dos saberes científicos (produto das comunidades científicas).

As criações didáticas, por sua vez, são elementos de uma transposição didática que transformam-se em ferramentas, auxiliando o processo de ensino de algum conteúdo escolar. Tais criações surgem de necessidades inerentes ao objeto de saber estudado, e contribuem para sua compreensão. Sua finalidade não é tornar-se conteúdo de ensino. Porém, isto aconteceu em alguns casos, como, por exemplo, nos produtos notáveis.

No processo de transposição didática dos Números Complexos, o elemento que lhes garantiu a aceitação como saber científico legítimo – a representação gráfica – não mereceu destaque no saber escolar. A introdução das Coordenadas Polares visa também resgatar a importância da representação gráfica para a compreensão dos Números Complexos. Assim como ocorreu na história da evolução do conceito, a representação gráfica pode ajudar o aluno a visualizar e compreendes os Números Complexos como objetos matemáticos.

4. Representações semióticas

A semiótica pode ser considerada, de forma bastante simplista, como tudo o que se relaciona com a linguagem e os signos, ou como a teoria geral das representações.

Signo é qualquer *coisa* que, em certa medida, representa ou substitui algo para alguém. Figuras, símbolos, palavras, são signos, pois ao vê-los faz-se a associação com aquilo que representam.

Segundo Duval (2009, p. 15-17), *semiósis* é a "apreensão ou a produção de uma representação semiótica", e *noésis* são "atos cognitivos como a apreensão conceitual de um objeto, a discriminação de uma diferença ou a compreensão de uma inferência". Segundo ele, não há *noésis* sem *semiósis*.

Em Matemática,

> [...] as representações através de símbolos, signos, códigos, tabelas, gráficos, algoritmos, desenhos são bastante significativas, pois permitem a comunicação entre os sujeitos e as atividades cognitivas do pensamento, permitindo registros de representação diferentes de um mesmo objeto matemático. (DAMM, 2008, p. 170).

Duval (2009, p. 37-38) aponta três fenômenos relativos à *semiósis* que devem ser considerados no estudo das aprendizagens intelectuais fundamentais: a diversificação dos registros de representação semiótica, a diferenciação entre representante e representado (ou entre forma e conteúdo) e a coordenação entre os diferentes registros de representação semiótica disponíveis. Destaca ainda que é essencial distinguir "as atividades, tão diferentes, de tratamento e de conversão das representações". Um tratamento é uma transformação efetuada no interior de um registro. A conversão é uma transformação que faz passar de um registro a outro. Ela requer a coordenação dos registros pelo sujeito que a efetua. (DUVAL, 2009, p. 39)

Almouloud (2007, p. 74) ressalta que "existem tratamentos que podem se tornar algoritmos (um conjunto de regras operatórias), como aqueles que o ensino da Matemática tende a privilegiar [...] eles (os algoritmos) são comuns tanto no Ensino Fundamental quanto no Ensino Médio."

> No ensino de Matemática, o problema se estabelece justamente porque só se levam em consideração as atividades cognitivas de formação de representações e os tratamentos necessários em cada representação. No entanto, o que garante a apreensão do objeto matemático, a conceitualização, não é a determinação de representações ou as várias representações possíveis, mas sim a *coordenação entre estes vários registros de representação*. (DAMM, 2008, p.182).

Da leitura da citação, deduz-se que a conversão, onde se dá a coordenação entre vários registros de representação, é mais importante para a aprendizagem matemática do que o tratamento. A autora reclama, no entanto, do fato da Matemática escolar só exigir do aluno a formação e o tratamento de representações, que podem se resumir a algoritmos memorizados, sem a compreensão dos conceitos a eles subjacentes.

Damm reitera a importância da coordenação de vários registros para a apreensão de um objeto matemático:

> A apreensão conceitual dos objetos matemáticos somente será possível com a coordenação, pelo sujeito que apreende, de vários registros de representação. Ou seja, quanto maior for a mobilidade com registros de representação diferentes do mesmo objeto matemático, maior será a possibilidade de apreensão deste objeto. (DAMM, 2008, p. 177)

Existem diversas representações do objeto matemático Número Complexo: forma algébrica, par ordenado em coordenadas cartesianas, forma polar, par ordenado em Coordenadas Polares, representação gráfica em coordenadas cartesianas, representação gráfica em Coordenadas Polares, forma exponencial, etc.

Ao longo desta pesquisa, constatou-se que a representação gráfica de um número complexo é relegada ao segundo plano, e aspectos algébricos são enfatizados. Com a introdução das Coordenadas Polares, pretende-se realizar o tratamento de representações – transformações entre coordenadas cartesianas e polares – e conversões de representações – passagem do registro algébrico para o registro gráfico, e vice-versa. De acordo com Duval, isto contribuirá para que o aluno compreenda melhor o objeto matemático Número Complexo.

5. Coordenadas Polares como Criação Didática

Coordenadas Polares serão utilizadas para auxiliar no ensino de Trigonometria e Números Complexos, logo o que se propõe é uma criação didática. Ao mesmo tempo, no processo de transposição didática dos Números Complexos, o elemento que lhe rendeu a aceitação como saber científico legítimo – a representação gráfica – assumiu uma posição obscura no saber escolar. A introdução das Coordenadas Polares visa, também, resgatar a importância da representação gráfica para a compreensão dos Números Complexos.

Já a circunferência trigonométrica tem, por definição, raio unitário e centro na origem do plano cartesiano. Levando em consideração que um ponto em Coordenadas Polares é representado por $(\boldsymbol{r}\ ;\ \theta)$, qualquer ponto da circunferência trigonométrica será da forma $(1; \alpha)$, pois a coordenada radial é igual a 1. Este ponto pode ser então naturalmente associado ao ângulo central α, já que sua coordenada radial é fixa.

Por outro lado, cada ponto $(1\ ;\ \alpha)$ também tem sua representação em coordenadas cartesianas. Sua abscissa será igual a ***cos***(α) e sua ordenada será igual a ***sen***(α).

Trata-se de um mesmo ponto representado graficamente em dois sistemas de coordenadas distintos – esta é uma transformação de tratamento, pois permanecemos no registro gráfico.

Quando, dada a representação gráfica do ponto, escreve-se suas coordenadas, realiza-se uma conversão, pois o objeto é o mesmo, mas o registro mudou – gráfico para escrito.

6. Aplicação da sequência didática

Foi elaborada uma sequência didática, composta por um teste de sondagem e três atividades (Listas 1, 2 e 3), tendo como público alvo alunos do 3º ano do Ensino Médio. A aplicação se deu em uma turma de uma Instituição Federal de Ensino do município de Campos dos Goytacazes, que já havia estudado Trigonometria no ano anterior e estava iniciando Números Complexos à época da aplicação do teste de sondagem. Os alunos ainda não conheciam a forma trigonométrica, que seria abordada pela professora regente nas aulas subsequentes.

A primeira questão do teste de sondagem era "O que é um radiano?". Onze alunos deixaram-na em branco, e os outros vinte e cinco responderam de diversas formas, nenhuma delas completa. A mais comum foi "é uma unidade de medida". Ao fazer esta pergunta, o objetivo era aferir se os alunos sabiam que um radiano é a medida de um arco cujo comprimento é igual ao raio da circunferência. É medida tanto de amplitude como de comprimento, sendo por isso utilizada na definição de funções trigonométricas, cujos argumentos são números reais, e não ângulos.

As questões seguintes demandavam cálculo de senos e cossenos de ângulos, alguns escritos em graus e outros em radianos. Mais de 50% erraram ou deixaram em branco (em maior percentual) as respostas de ***sen***(315º), ***sen***(210º), ***cos***(270º), ***cos***(π) e ***sen***(5π/6), evidenciando falhas na redução ao 1º quadrante.

Pudemos comprovar o que foi afirmado nas pesquisas, sobre a dificuldade dos alunos em Trigonometria, com a consequente não apreensão de conceitos. Alguns haviam apenas memorizado valores, como notamos pelos comentários feitos por eles.

Chamou atenção, ainda, a postura frente ao teste de sondagem. Enquanto estávamos apresentando a proposta à turma, os alunos se mostraram interessados, inclusive porque os Números Complexos estavam sendo estudados naquele momento. Porém, ao receberem o teste de sondagem com as questões relativas à Trigonometria, não se mostraram muito dispostos a fazê-lo, alegando que "não lembravam mais" (sic), ou perguntando à professora se "ia mesmo precisar daquilo em números complexos" (sic).

Foi aplicado o teste de sondagem e aguardou-se que a professora ministrasse uma aula sobre a forma trigonométrica dos Números Complexos, para só então dar continuidade à aplicação da sequência didática.

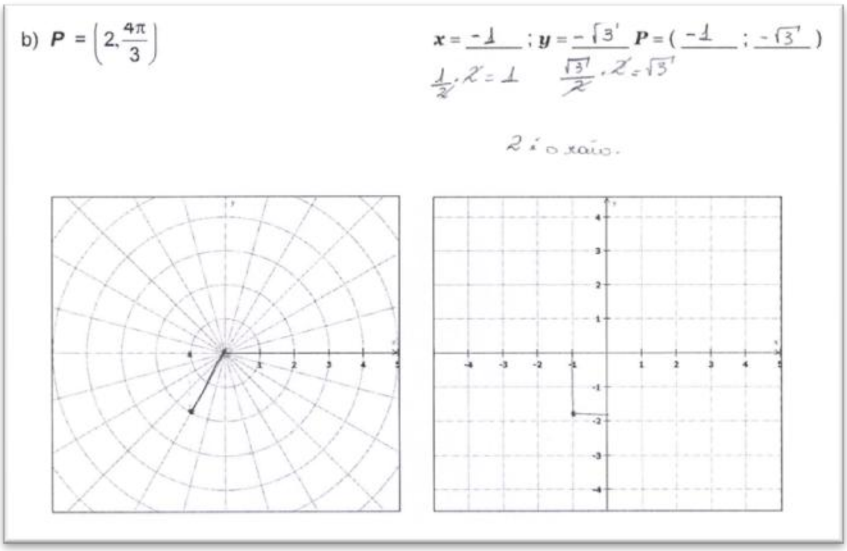
Na primeira questão da Lista 1, trabalhou-se com a representação gráfica de pontos nos planos cartesiano e polar, sem mencionar que o “outro” plano era o polar. Pedia-se apenas que encontrassem a distância do ponto ***P*** dado à origem e determinassem o ângulo formado pela parte positiva do eixo ***Ox*** e pelo segmento ***OP***.

Em seguida, foram introduzidas formalmente as Coordenadas Polares, com ênfase na representação gráfica. Frisou-se bastante que o ponto escrito em coordenadas cartesianas era **o mesmo** ponto marcado em Coordenadas Polares.

Mostrou-se a aplicação dessas *novas* coordenadas na análise do ciclo trigonométrico, e chamou-se atenção para o fato de que um mesmo ponto representava um ângulo sob a ótica das Coordenadas Polares e ao mesmo tempo o cosseno e o seno deste ângulo, em coordenadas retangulares. Consequentemente, o sinal da **abscissa** será o sinal do **cosseno**, e o da **ordenada** será o do **seno**.

Na questão 2, foram dados pontos em Coordenadas Polares para que fossem representados graficamente e, em seguida, escritos em coordenadas cartesianas. A Ilustração 1 traz a resolução feita por um aluno em um dos itens desta questão.

Ilustração 11 – Figura: resposta de aluno à questão 2b, Lista 1.



Fonte: protocolos de pesquisa.

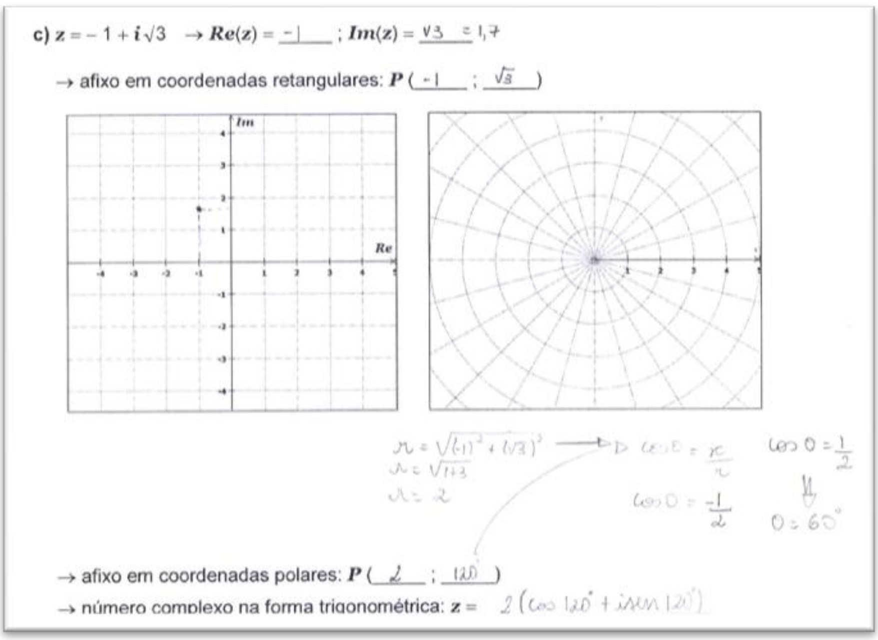
Nesse momento foi relembrada a redução ao 1º quadrante para encontrar os valores de x e y, pois já havia sido explicado que x e y eram, respectivamente, os valores do cosseno e do seno do ângulo em Coordenadas Polares, multiplicados pela coordenada radial do ponto (o raio).

A Lista 1 foi fundamental para a compreensão de Coordenadas Polares, visto ser um conteúdo totalmente novo. Os alunos mostraram-se bastante interessados, sempre perguntando, tirando dúvidas e acompanhando a atividade. Alguns estavam inclusive à frente do que era feito no quadro, e contribuíam explicando uns aos outros.

A Lista 2, composta por duas questões, foi aplicada no dia seguinte. Na introdução, foram relembradas as formas algébrica e trigonométrica dos Números Complexos.

Na primeira questão, foram dados números complexos na forma algébrica, para que fossem representados graficamente (em coordenadas cartesianas e polares) e em seguida escritos na forma trigonométrica. Os dois primeiros itens foram resolvidos juntamente com os alunos, sempre fazendo conexão entre o ponto no plano de Argand-Gauss e a forma algébrica do número, e entre o ponto no plano polar e a forma trigonométrica do número, frisando que "é o mesmo número, representado de maneiras diferentes". Os outros itens foram feitos pelos alunos, e eles mesmos explicaram como haviam resolvido. A partir de suas falas, foi feita a correção no quadro, onde verificou-se que os itens haviam sido feitos acertadamente pelos alunos (**Ilustração 2**).

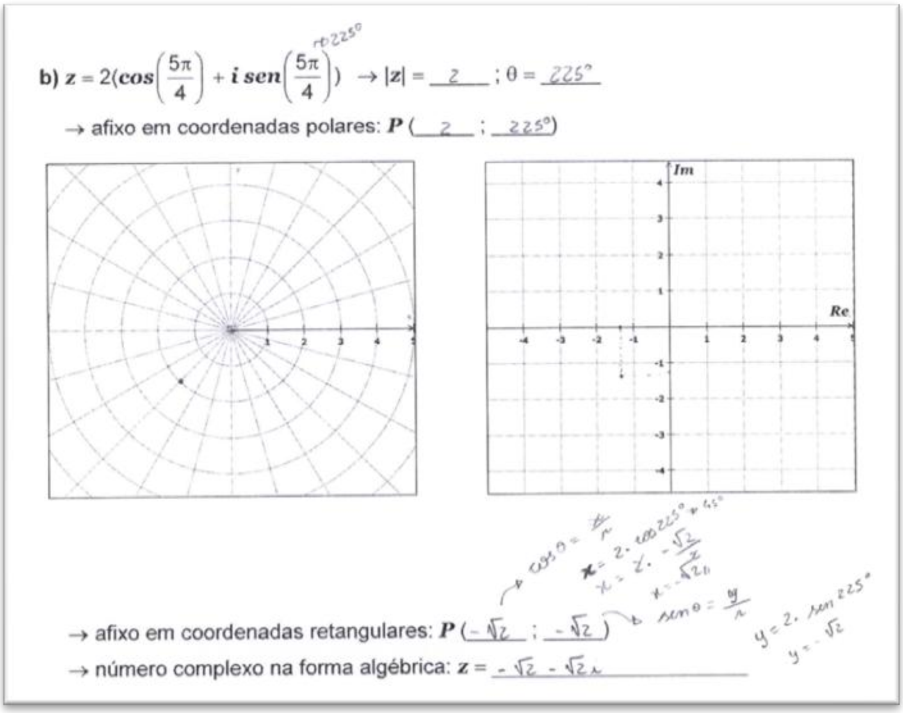
Ilustração 22 – Figura: resposta de aluno à questão 1c, Lista 2.



Fonte: protocolos de pesquisa.

Na questão 2, os números complexos estavam na forma trigonométrica, e os alunos precisavam representá-los no plano polar e no plano cartesiano, descobrindo primeiro as coordenadas retangulares para depois escrevê-los na forma algébrica (**Ilustração 3**).

Ilustração 33 – Figura: resposta de aluno à questão 2b, Lista 2.



Fonte: protocolos de pesquisa.

Os alunos resolveram muito bem as duas questões da lista, relacionando rapidamente o módulo e o argumento do número complexo às coordenadas polares do ponto que o representava. Também demonstraram mais segurança na representação de ângulos maiores do que 90º na circunferência trigonométrica, bem como em sua redução ao primeiro quadrante para a determinação de seno e cosseno.

Pudemos observar que o fato de estarem entendendo e conseguindo fazer os exercícios serviu-lhes de estímulo, assim como a visualização proporcionada pela marcação dos pontos nos planos retangular e polar.

A Lista 3 foi aplicada na semana seguinte, e respondida pelos alunos sem auxílio algum, pois nosso objetivo era utilizar sua análise para ter ideia da contribuição do trabalho realizado. Foi possível perceber que eles ficaram à vontade para fazê-la, não havendo dúvidas. Terminaram a lista rapidamente, em menos de um tempo de aula.

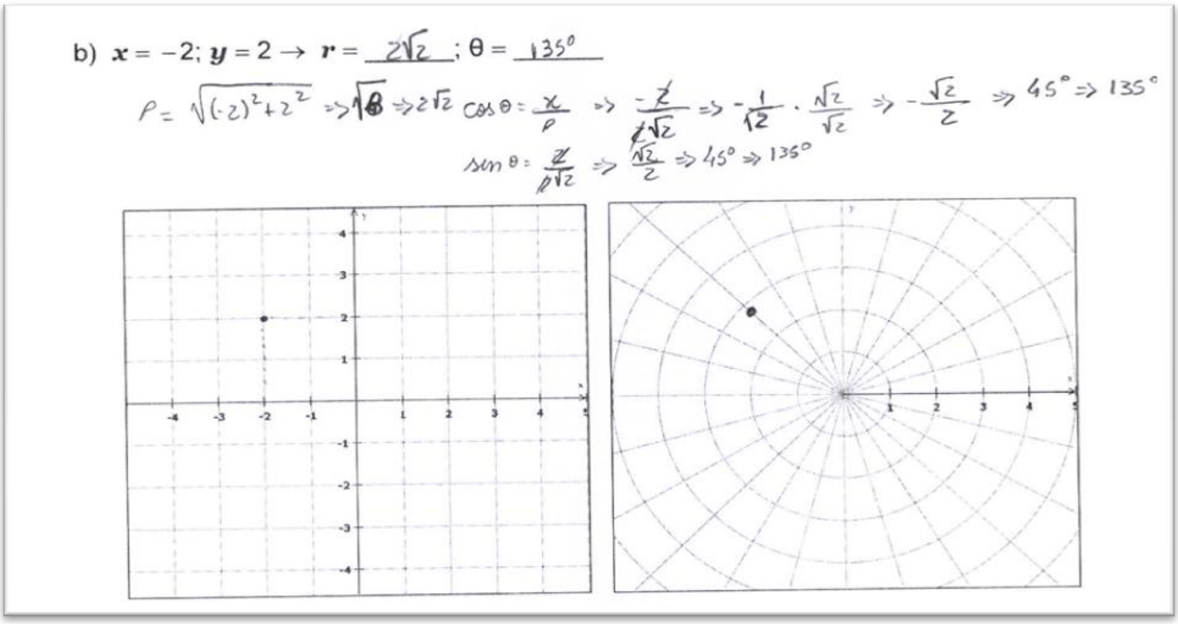
Havia duas questões. Nos três primeiros itens da primeira questão, eram dados pontos em coordenadas cartesianas, para que fossem representados graficamente tanto no plano cartesiano quanto no plano polar, e, em seguida, escritas suas Coordenadas Polares. Os três itens subsequentes traziam os pontos em Coordenadas Polares, e, depois de representá-los graficamente, o aluno deveria escrever suas coordenadas cartesianas (**Ilustração 4**).

Na segunda questão, o aluno deveria considerar os pontos da primeira questão como afixos de Números Complexos, e escrevê-los nas formas algébrica e trigonométrica.

Observou-se que a primeira questão foi feita com facilidade. Os alunos conseguiram efetuar o tratamento de representações – dentro do registro gráfico, e a conversão de registros – do algébrico para o gráfico e vice-versa, sem problemas.

Um fato interessante observado durante a realização do exercício foi o de que os alunos deram mais ênfase à resolução da parte algébrica do que ao registro gráfico. Uma possível causa seria o histórico do ensino, que prioriza a representação algébrica. Outra seria a própria maneira pela qual a questão foi elaborada.

Ilustração 4 – Figura: resposta de aluno à questão 1b, Lista 3.

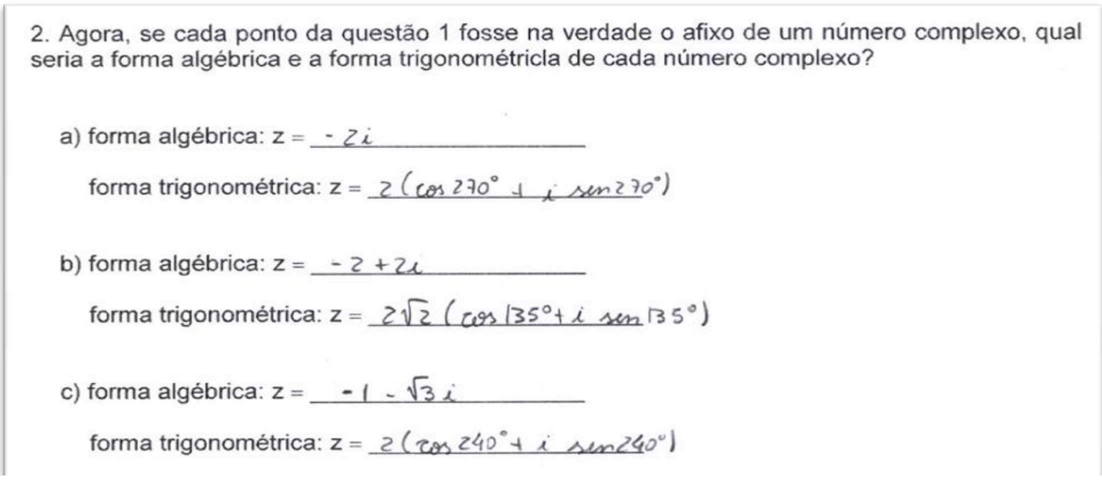


Fonte: protocolos de pesquisa.

Outro fato observado ao analisar as questões respondidas por eles foi o de que nenhum aluno utilizou o ângulo em radianos, mesmo havendo três itens na 1.ª questão com pontos em Coordenadas Polares onde o ângulo estava em radianos.

A segunda questão foi feita tão rapidamente quanto a primeira, associando de imediato os *afixos* dados com sua representação algébrica (**Ilustração 5**).

Ilustração 54 – Figura: resposta de um aluno aos três primeiros itens da questão 2, Lista 3.



2. Agora, se cada ponto da questão 1 fosse na verdade o afixo de um número complexo, qual seria a forma algébrica e a forma trigonométricla de cada número complexo?

a) forma algébrica: $z = -2i$

forma trigonométrica: $z = 2(\cos 270° + i \operatorname{sen} 270°)$

b) forma algébrica: $z = -2 + 2i$

forma trigonométrica: $z = 2\sqrt{2}(\cos 135° + i \operatorname{sen} 135°)$

c) forma algébrica: $z = -1 - \sqrt{3}i$

forma trigonométrica: $z = 2(\cos 240° + i \operatorname{sen} 240°)$

Fonte: protocolos de pesquisa.

Pôde-se perceber que os alunos mostraram-se mais seguros e saíram-se bem melhor no que diz respeito aos conceitos da Trigonometria, em relação ao teste de sondagem. Além disso, o fato de alguns itens desta lista terem sido feitos sem a necessidade de cálculos e o imediato entendimento da questão 2 da Lista 2 indicam que a aplicação das Coordenadas Polares aos números complexos foi plenamente compreendida por eles.

7. Considerações Finais

Ao longo da aplicação da sequência didática elaborada, observou-se que a introdução de Coordenadas Polares no Ensino Médio pode ser feita sem problemas, e que os alunos não apresentaram qualquer dificuldade de aprendizagem.

Não se imaginava que as Coordenadas Polares poderiam ser usadas também na representação gráfica de Números Complexos na forma trigonométrica, nem que a conversão da escrita algébrica para a representação gráfica seria tão evidente e tão simples após a conexão com essas *novas* coordenadas.

Na aplicação das Coordenadas Polares à Trigonometria, foi destacado que o mesmo ponto possuía duas representações diferentes, que são: o raio e o ângulo; e os valores da abscissa e da ordenada. Assim, quando o ponto está representado no plano polar, duas características são percebidas de imediato: seu raio e seu ângulo. Se o raio for um, está-se referindo à circunferência trigonométrica, e assim imediatamente temos o valor do cosseno e do seno desse ângulo, já que o valor do cosseno é a abscissa do ponto e o valor do seno é a ordenada do ponto, em coordenadas retangulares.

Quando o ponto está no plano cartesiano, temos o valor do cosseno e do seno, conseguindo visualizar seus sinais, o que permite a identificação do quadrante em que o ângulo polar está.

Acredita-se que tal visualização auxiliou no entendimento de Trigonometria, pois o ângulo, seu cosseno e seu seno foram facilmente associados a partir do entendimento das duas representações do ponto no plano (cartesiano e polar) e da relação entre elas.

Na aplicação das Coordenadas Polares aos Números Complexos, a conversão do registro algébrico para a representação gráfica foi feita de maneira simples e rápida, deixando pra trás qualquer dúvida.

Segundo as observações feitas ao longo das aulas e os relatos dos alunos, a introdução de Coordenadas Polares no estudo de Trigonometria e Números Complexos contribuiu para a melhoria do processo de ensino aprendizagem. Teoricamente, isto pode ser explicado pelo fato de que foram feitas pelo menos duas conversões de registros, e segundo Duval, tais conversões são essenciais para a compreensão do objeto matemático como um todo.

8. Referências

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da Matemática**. Curitiba: UFPR, 2007.

ARAÚJO, Nanci Barbosa Ferreira. **Números Complexos**: Uma Proposta de Mudança Metodológica para uma Aprendizagem Significativa no Ensino Médio. Natal, 2006. 111p. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – UFRN. Natal: UFRN, 2006. Disponível em: <http://www.ppgecnm.ccet.ufrn.br/publicacoes/publicacao_34.pdf>. Acesso em: set. 2010.

BRASIL. **Orientações curriculares para o Ensino Médio**. v.2. 135p. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006.

BRASIL. **Parâmetros curriculares Nacionais**: Ensino Médio. Parte III. 58p. Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2000.

CARNEIRO, José Paulo. A geometria e o ensino dos Números Complexos. In: Encontro Nacional de educação Matemática (ENEM), VIII. **Anais ...** Recife: SBEM, 2004. Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/15/PA07.pdf> acesso: out. 2010.

CHEVALLARD, Yves. **La transposición didáctica**: del saber sabio al saber enseñado. Tradução: Claudia Gilman. 3. ed. Buenos Aires: Aique Grupo Editor, 2005.

DAMM, Regina Flemming. Registros de Representação. In: MACHADO, Silvia Dias Alcântara (org.). **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. 3. ed. revista. p. 167-188. São Paulo: EDUC, 2008.

DUVAL, Raymond. **Semiósis e Pensamento Humano**: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais (Fascículo I). São Paulo: Editora Livraria da Física, 2009.

LIMA, Elon Lages et al. **Exame de Textos**: Análise de Livros de Matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

LOPES, Adrielle Cristine Mendello; CABRAL, Vanessa Pereira Garcez; ALVES, Fábio José da Costa. Números Complexos na vida real: uma abordagem sobre o ensino e algumas aplicações. In: Encontro Paraense de Educação Matemática (EPAEM), VIII. **Anais ...** Belém: SBEMPA, 2011. Disponível em:<http://www.sbempa.mat.br/Boletim/Anais/secoes%5CCC0103.pdf>. Acesso em: nov. 2011.

NEVES, Késia Caroline Ramires. **Um exemplo de transposição didática**: o caso das matrizes. Maringá, 2009, 164f. Dissertação (Mestrado em Educação para as Ciências e a Matemática) – Universidade Estadual de Maringá. Maringá, Paraná, 2009. Disponível em: <http://cienciaematematica.vivawebinternet.com.br/media/dissertacoes/e19a9a4b3eaee4a.pdf>. Acesso em: set. 2010.

OLIVEIRA, Francisco Canindé de. **Dificuldades no processo ensino aprendizagem de trigonometria por meio de atividades**. Natal, 2006. 111f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências Naturais e Matemática) – UFRN, Natal, 2006. Disponível em: <http://www.ppgecnm.ccet.ufrn.br/publicacoes/publicacao_62.pdf>. Acesso em: set. 2010.

POMMER, Wagner M. Diversas abordagens das regras de sinais nas operações elementares em Z. In: Seminários de Ensino de Matemática/SEMA–FEUSP. **Anais ...** São Paulo: Universidade do Estado de São Paulo, 2010. Disponível em: <http://www.nilsonjosemachado.net/sema20100316.pdf>. Acesso em: nov. 2011.

ROSA, Mário Servelli. **Números Complexos**: Uma abordagem histórica para aquisição do conceito. São Paulo, 1998. 170f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – PUC-SP. São Paulo: Pontifícia Universidade Católica, 1998. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/mario_servelli_rosa.pdf>. Acesso em: ago. 2011.