

O ENSINO DE GEOMETRIA NO ENSINO MÉDIO: ANÁLISE A PARTIR DO CÁLCULO DO VOLUME DA ESFERA¹

*Denis Rogério Sanches Alves
PUC - Toledo
denis.alves@pucpr.br*

*Vilma Rinaldi Bisconsini
Núcleo Regional de Educação, Assis Chateaubriand - PR
vbisconsini@yahoo.com.br*

*Wellington Piveta Oliveira
Escola Estadual Palmitolândia, Tupãssi - PR
wellingtonmat09@hotmail.com*

Resumo:

Neste trabalho discutimos sobre o ensino da geometria no ensino médio, fazendo análise a partir do ensino do volume da esfera. Discorremos sobre a formação do professor e os problemas para abordagem desse conteúdo, também analisamos como o assunto é tratado nos livros didáticos em que permeia a concepção formalista da matemática. Questionamos por que o assunto é tratado, predominantemente, através do Princípio de Cavalieri, sendo que este conteúdo poderia ser abordado também e a partir do Princípio de Arquimedes, ou seja, haveria a possibilidade de transitar de um princípio para outro, proporcionando ao estudante a verificação experimental, a possível (re)construção de conceitos e desta forma, abstrair, compreender significativamente o conteúdo e chegar a demonstrar que é o nível desejado de construção do conhecimento matemático. O presente relato mostra a tentativa de aproximar essas duas abordagens, no ensino do conteúdo de volume da esfera com estudantes do segundo ano do ensino médio, do Colégio Estadual João Arnaldo Ritt, do município de Toledo, Paraná.

Palavras-chave: Volume da esfera; Princípio de Cavalieri; Princípio de Arquimedes.

1. Introdução

A geometria acumula conhecimentos construídos, a partir das necessidades humanas, desde os primeiros movimentos de organização social. Esse corpo de conhecimentos é sistematizado intencionalmente com a ideia de generalização e socialização. Porém, ao passar por esse processo de formalizar, validar e generalizar, ele

¹ Este estudo representa um aprofundamento do trabalho apresentado no IX Encontro Paranaense de Educação Matemática. Assis Chateaubriand – PR, 2007, na modalidade pôster, publicado nos anais do referido evento.

perde, para boa parte da sociedade, inclusive para a comunidade escolar, as suas características perceptíveis, tornando-se objeto abstrato de compreensão restrita a uma comunidade: os matemáticos.

O propósito desse trabalho não é discutir se a demonstração matemática deve ser objeto de ensino na educação básica. Essa é uma questão mais complexa que não cabe ser analisada apenas em um artigo. O que percebemos é que o ensino de geometria, em especial a geometria espacial trabalhada no ensino médio, é irremediavelmente atingido pela distância entre a tendência à formalização via demonstração e a verificação sensível que é mais significativa por ficar mais evidente, por exemplo, como cálculo do volume da esfera. Assim, observa-se que há, por parte do professor, uma postura diretiva formal ao tratar do conteúdo de geometria no ensino médio.

Diante dessas questões, pretendemos realizar uma breve análise a respeito do ensino de geometria no ensino médio, em específico, sobre o volume da esfera; como esse conteúdo é tratado e quais as dificuldades em abordá-lo do ponto de vista do professor.

2. As dificuldades para o professor

O ensino da geometria no Brasil foi, historicamente, comprometido por opções teórico-metodológicas, por questões políticas e econômicas, o que afetou a formação de várias gerações de professores, conforme aponta Pavanello (1989):

A orientação de trabalhar a geometria sob o enfoque das transformações, assunto não dominado pela grande maioria dos professores secundários, acaba por fazer que muitos deles deixem de ensinar geometria sob qualquer abordagem, passando a trabalhar predominantemente com a álgebra – mesmo porque, a Matemática Moderna fora introduzida através desse conteúdo [...]. A Lei 5692/71, por sua vez, facilita este procedimento ao permitir que cada professor adote seu próprio programa “de acordo com as necessidades da clientela”. (PAVANELLO, 1989, p. 164-165).

Tradicionalmente, tanto nos livros didáticos como nos currículos do ensino médio é enfatizado o conteúdo de geometria espacial. Porém, na formação do professor esse ainda é deficitário, pois as disciplinas do currículo do ensino superior, predominantemente, tratam da matemática avançada, enquanto a geometria espacial é considerada conteúdo elementar.

Nas últimas décadas, a formação continuada proporcionada pelo sistema educacional do Estado do Paraná não priorizou o aprofundamento em conteúdos e métodos de ensino e sim, concentrou-se na formação geral com ênfase na fundamentação em educação, por entender que essa formação em educação precisa ser ampliada. Ou seja, é preciso que o professor tenha fundamentos em concepções de educação para que haja transformações no ensino da disciplina. Essa tendência tem, inclusive, causado insistentes solicitações dos professores para que nos programas de formação continuada hajam cursos que contemplem conteúdos matemáticos e suas metodologias de ensino, revelando assim, a nosso ver, a denúncia do próprio professor do quanto é frágil a sua formação em conteúdos. Assim sendo, o professor tem duas alternativas: investe na sua autoformação ou forma-se pela experiência e, nessa última opção, ele se mantém, sempre que possível distante dos conteúdos em que têm pouco domínio, a geometria, nesse caso é um deles.

3. As condições do ensino de geometria espacial no ensino médio

No Estado do Paraná, a maioria das escolas não possuem laboratórios de matemática, o que revela a concepção de ensino de geometria nos currículos escolares. Dentre as possíveis concepções, a mais preponderante no ensino médio é a de que o ensino de geometria prescindia da observação sensível para construção dos conceitos geométricos. Nesse sentido, há experiências como o da criação do laboratório de ensino de matemática, por exemplo, da Universidade de Brasília que iniciou suas atividades voltadas a atender alunos do ensino médio, tendo como um dos objetivos “[...] subsidiar professores do ensino fundamental e médio em propostas pedagógicas, materiais didáticos e o uso de novas tecnologias no ensino-aprendizagem da matemática [...]” (BERTONI; GASPAR, 2006, p. 150).

A questão levantada é: por que se reforça a concepção de que no ensino médio, não há necessidade de proporcionar aos estudantes experiências com uso de recursos didáticos manipuláveis, proporcionando a construção ou (re)construção de conceitos matemáticos, levando-os, talvez, mais facilmente à compreensão da abstração, generalização, demonstração e ainda instigando-os a conjecturar e compreender mais significativamente conhecimentos matemáticos, e reconhecendo-os como construção humana? As Diretrizes

Curriculares Educacionais de Matemática para o Estado do Paraná destaca a função da matemática na formação do sujeito nessa perspectiva, quando afirma que

É preciso, ainda, considerar que pela Educação Matemática almeja-se um ensino que possibilite aos estudantes análises, discussões, conjecturas, apropriação de conceitos e formulação de idéias. Aprende-se Matemática não somente por sua beleza ou pela consistência de suas teorias, mas, para que, a partir dela, o homem amplie seu conhecimento e, por conseguinte, contribua para o desenvolvimento da sociedade. (PARANÁ, 2006, p. 25).

Fazer demonstrações matemáticas é um nível de conhecimento a ser alcançado no ensino médio e uma concepção fortalecida pelos professores com boa formação na disciplina, portanto, em condições de realizar um ensino pautado nessas condições e essa ênfase é dada por livros didáticos mais tradicionais. Porém, esse ideal está distante da realidade das práticas de sala de aula na grande maioria das escolas, dadas as circunstâncias e históricos já analisados.

Se o modelo de ensino de geometria, pautado em formalizações e abstrações não está alcançando seus objetivos, então, por que mantê-lo? Qual seria um caminho possível para o ensino de geometria no ensino médio? Essas e tantas outras são indagações que afetam professores, alunos, pensadores e estudiosos da matemática.

É ponderável e teoricamente coerente pensar na aproximação de um ensino que se utiliza de estratégias metodológicas partindo da observação e análise de recursos didáticos manipuláveis, possibilitando a construção de ideias e conceitos geométricos e, deste modo, chegar a demonstrações e abstrações mais significativamente, pois o que implica nesse processo são as operações mentais, ou seja, que ao estudante seja oportunizado a construção de argumentos matemáticos.

4. Elementos para análise: como é ensinado o cálculo do volume da esfera no ensino médio

Considerando as concepções e o histórico já analisado sobre o ensino de geometria, questiona-se: a) o conteúdo do *volume da esfera* é trabalhado no ensino médio? b) que encaminhamentos metodológicos são feitos para seu ensino? c) os estudantes aprendem esse conteúdo? d) Quais os problemas didáticos que implicam em dificuldades de compreensão desse conteúdo?

Nas propostas curriculares dos livros didáticos, o assunto é tratado na 2ª série do ensino médio. Porém, de acordo com os argumentos tecidos anteriormente, esse assunto acaba sendo trabalhado superficialmente ou nem trabalhado. Se esse é um conteúdo sujeito a tanta dificuldades para ser abordado, por que então mantê-lo no currículo escolar? Parece insensato propor a sua retirada do currículo de matemática, considerando sua presença nos diferentes contextos, além de sua construção histórica, razões estas que justificam sua presença nos currículos.

A questão é como e quando ensinar esse conteúdo. As opções didático-metodológicas adotadas na abordagem do volume da esfera que predominam são fundamentadas na lógica formal dedutivo, o que acreditamos ser, em parte, causa de dificuldade para o professor tratá-lo e para o estudante compreendê-lo, pois ele dificilmente se interessará pela demonstração formal ou mesmo que queira, terá dificuldades por não saber demonstrar, ficando esta tarefa apenas para o professor que a faz numa explanação expositiva para justificar a fórmula, ou simplesmente preservá-la. Ou ainda, o professor simplesmente “dá” a fórmula, situação cômoda tanto para o docente como para os estudantes, o que representa uma situação acrítica. De modo geral, tanto o professor quanto o aluno não veem necessidade de demonstração lógico-formal do conteúdo, objetivando apenas saber aplicar a fórmula.

Essas são as possíveis consequências do formalismo que impregnou os sistemas educacionais e desenvolveu nos sujeitos posturas acríticas e passivas. Tecendo críticas ao formalismo, Lakatos afirma que:

Nenhum dos períodos ‘criativos’ e dificilmente qualquer dos períodos ‘críticos’ das teorias matemáticas seriam admitidos no céu formalista em que as teorias matemáticas habitam como o Serafim, expurgados de todas as impurezas da incerteza terrestre (LAKATOS, 1978, p. 14).

5. Como o conteúdo é abordado pelos livros didáticos

Nos livros didáticos para o ensino médio, o conteúdo do volume da esfera é explicado e mostrado, predominantemente, pelo *Princípio de Cavalieri*. Comparando onze coleções de livros didáticos para essa modalidade de ensino, constatamos que cinco delas mostram como chegar à fórmula usando esse princípio; cinco trazem apenas a fórmula e uma, tampouco, aborda o conteúdo. Uma das coleções traz apenas um comentário sobre o histórico do volume da esfera e cita o *Princípio de Arquimedes*, mas na continuidade,

recorre ao *Princípio de Cavalieri* para mostrar o conteúdo. Vale destacar que o *Princípio de Arquimedes* apareceu apenas numa coleção de livros didáticos para o ensino fundamental, o que reforça a idéia de que a experimentação não é estratégia didática concebida para o ensino médio.

Os fundamentos utilizados pelos livros didáticos para introdução do conteúdo são:

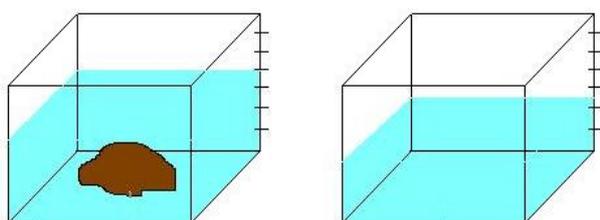


Figura 01

Princípio de Arquimedes: o volume de líquido deslocado pelo corpo é igual ao volume do corpo mergulhado no líquido.

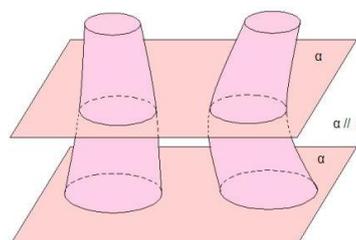


Figura 02

Princípio de Cavalieri: considere dois sólidos e um plano alfa. Suponha que todo plano paralelo a alfa, que intercepte um dos sólidos, intercepte também o outro e determine secções transversais de áreas iguais. Nessas condições os dois sólidos têm volumes iguais (BEZERRA, 1994, p. 354).

Uma proposta de ensino, possivelmente, mais coerente levando em consideração o histórico do ensino de geometria no Brasil, segundo Pavanello (1989), seria partir desse memorial de formação dos professores e estudantes, ou seja, considerar que tiveram poucas oportunidades de construir idéias matemáticas, generalizá-las e chegar ao nível de uma demonstração lógico-formal a partir da experimentação. Seria então viável, por exemplo, para a abordagem do volume da esfera, mesmo no ensino médio, partir da experimentação pelo *Princípio de Arquimedes* e na sequência e comparativamente construir, com os estudantes, a demonstração pelo *Princípio de Cavalieri*, como mostra o esquema abaixo:

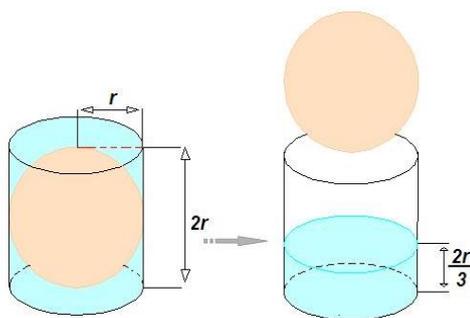


Figura 03²

Esquema baseado no *Princípio de Arquimedes*: a dedução de volume da esfera demonstrado pela lógica indutivo-experimental percorre um caminho que poderá permitir ao estudante do ensino médio estabelecer relação entre o processo experimental e a sua formalização.

$$V_{\text{água}} + V_{\text{esfera}} = V_{\text{cilindro}}$$

$$V_{\text{esfera}} = V_{\text{cilindro}} - V_{\text{água}}$$

$$= 2\pi r^3 - \frac{1}{3} (2\pi r^3)$$

$$= \frac{2}{3} (2\pi r^3)$$

$$= V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi r^3$$

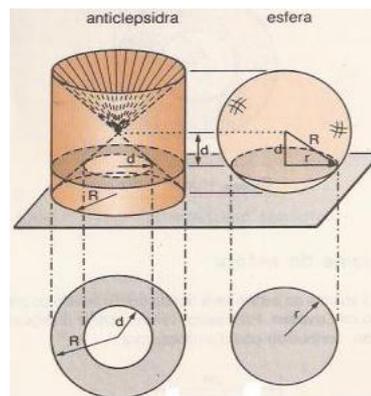


Figura 04³

Esquema baseado no *Princípio de Cavalieri*: as áreas das secções na esfera e no sólido são iguais; então, por esse princípio, a esfera e o sólido têm volumes iguais.

$$V_{\text{esfera}} = V_{\text{sólido}}$$

$$V_{\text{sólido}} = V_{\text{cilindro}} - 2 \cdot V_{\text{cone}}$$

$$= \pi R^2 \cdot 2R - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \pi R^2 \cdot R$$

$$= 2\pi R^3 - \frac{2}{3} \pi R^3$$

$$= V_{\text{esfera}} = \frac{4}{3} \pi R^3$$

O ensino do volume da esfera pelo *Princípio de Cavalieri* é amplamente usado para tratar o assunto, embora matematicamente não estejamos aqui discutindo sua validade, porém, didaticamente não é tão evidente para o estudante que do cilindro equilátero de diâmetro igual ao da esfera possa-se subtrair dois cones de raio e diâmetro também igual ao dessa mesma esfera e, ainda, que o volume restante desse cilindro corresponde ao volume da referida esfera. Outro problema é que, no momento em que se mostram as secções da esfera, dos cones e da anticlepsidra, ou seja, as áreas das secções da esfera e da anticlepsidra não são, aparentemente, semelhantes.

² Esquema abstraído da Coleção: REIS e TROVON. **Aplicando a matemática.**

³ Figura abstraída do texto: BEZERRA, Manoel Jairo. **Matemática.** Livro didático vol. único 2º grau

Por meio do *Princípio de Arquimedes*, na demonstração do volume da esfera, fica mais evidente a diferença de volume entre o cilindro e esfera de mesmo diâmetro, tornando-se mais perceptível, tanto no processo manipulável como no desenvolvimento da dedução da fórmula matemática do volume dessa esfera. Quando Lorenzato (2006, p. 5) trata da importância do laboratório de matemática, destaca as ideias de Arquimedes. Segundo o autor, “Seria injusto faltar o registro de um excepcional matemático que percebeu a influência do ver e do fazer na aprendizagem: Arquimedes”. Didaticamente, seria mais viável fazer este caminho com o estudante. Assim, ele estaria construindo o conceito do volume da esfera, passando do processo experimental ao formalizado e compreendendo sua generalização.

Então, por que nos livros didáticos do ensino médio, praticamente não aparece essa forma de apresentação deste conteúdo? Embora este trabalho não tenha a pretensão de esgotar o assunto, a nosso ver, o não aparecimento desta forma de apresentação é orientado pela manutenção da concepção formalista para a qual o processo dedutivo, com rigor, tem mais validade que um processo que recorre às ideias matemáticas abstraídas da visualização de aspectos físicos.

Defendemos que o processo de ensino-aprendizagem do volume da esfera poderia oportunizar a experimentação e dedução da fórmula pelo *Princípio de Arquimedes*, passando à demonstração matemática pelo *Princípio de Cavalieri*, o que levaria os estudantes a discutirem a viabilidade e validade de cada modelo, construindo, desse modo, mais significado para o conhecimento do assunto. Assim, este processo proporcionaria aos educandos o desenvolvimento de argumentações, conjecturas e generalizações de ideias matemáticas. Concordamos com Nasser e Tinoco, quando defendem que

[...] é necessário ajudar o aluno a desenvolver seu raciocínio lógico, e prepará-lo para dominar o processo dedutivo. A habilidade de argumentar deve ser ‘construída’ ao longo dos anos de escolaridade, através de atividades variadas como jogos, problemas desafios, ou simplesmente exigindo justificativas para todas as respostas (NASSER e TINOCO, 2001, p. 8-9).

6. Vivenciando as proposições do trabalho

Desenvolvemos o presente trabalho com um grupo de nove estudantes do segundo ano do ensino médio, subdivididos em dupla e um grupo com três alunos. As atividades foram desenvolvidas no laboratório de ensino de ciências, do Colégio Estadual João Arnaldo Ritt, do município de Toledo, Paraná.

Para dar início às atividades, os alunos procuraram diferenciar características principais referentes ao *Princípio de Arquimedes* e o *Princípio de Cavalieri*. Em um primeiro momento eles realizaram o cálculo referente ao *Princípio de Arquimedes* utilizando-se de uma esfera, cilindro, calculadora e fita métrica e a partir dessa compreensão, discutimos a ideia de expressão algébrica (fórmula do volume da Esfera) utilizando-se do conhecimento matemático escolar estudado em diferentes momentos. Durante o desenvolvimento do *Princípio de Arquimedes* os estudantes primeiramente mediram a altura e o raio do cilindro e a partir dessas medidas retomamos alguns conceitos vistos em sala de aula. Entre estes conceitos destacamos as equações para calcular o volume do cilindro. Ressaltamos que seria necessário calcular a área de um círculo (base) e após esse cálculo seria necessário multiplicar a área da base pela altura do cilindro. Assim, os estudantes foram desenvolvendo seus próprios conceitos, formalizando opiniões e discutindo os possíveis métodos que podíamos utilizar para obter o volume da esfera. Após o cálculo do volume do cilindro, os estudantes encheram o cilindro com água e intuitivamente inseriram a esfera no cilindro. Feito isso, mediram a quantidade de água transbordada do cilindro. Na sequência, utilizaram um novo cilindro menor, de altura equivalente a medida sem água, do primeiro cilindro. Com este cilindro realizaram o mesmo experimento, ou seja, os estudantes calcularam o volume de água transbordada do cilindro menor. Com a ajuda do professor os estudantes foram entendendo os conceitos do *Princípio de Arquimedes* de maneira intuitiva e clara, entenderam que o volume da água juntamente com o volume da esfera formaria o volume do cilindro.

Num segundo momento, iniciamos a dedução dos cálculos do *Princípio de Cavalieri*. Neste princípio, os estudantes criaram certo receio, percebeu-se que o desenvolvimento do *Princípio de Cavalieri* não foi muito aceito pelos estudantes, pois os cálculos exigiam uma complexidade bem maior. A demonstração do *Princípio de Arquimedes* e do *Princípio de Cavalieri* proporcionou uma rica troca de experiências entre os estudantes. O desenvolvimento de atividades envolvendo alunos com dificuldades de aprendizagem, com monitoria do professor possibilitou verificar muitas melhorias nos

alunos, o desenvolvimento de aptidões, atitudes e conhecimentos, além do despertar da criatividade, do pensamento lógico e crítico. Uma maneira para que os alunos possam interagir mais com as atividades foi convidar um desses alunos para realizar a dedução da expressão algébrica para o cálculo da área do volume da Esfera, no quadro de giz.

7. Considerações Finais

Nessa rápida análise, procuramos discutir questões que estão presentes no trabalho diário do professor de matemática que atua no ensino médio. O uso ou não de recursos didáticos manipuláveis e a formalização de ideias matemáticas pelas demonstrações são situações vivenciadas por eles, mas poucas vezes pensadas e planejadas de modo a buscar outras formas de abordagem, revelando, na verdade, que os professores têm tido poucas oportunidades de estudos e de aprofundamento de conhecimentos durante o processo de ensino-aprendizagem. Dessa forma, os estudantes desse nível de ensino são sujeitos de um sistema educacional onde prevalece o formalismo no ensino da geometria.

8. Referências

BIANCONI, M. Lucia; CARUSO, Francisco. **Ciência e cultura**. v. 57, n. 4, São Paulo, out./dez. 2005.

BERTONI, Nilza Eigenheer; GASPAR, Maria Terezinha Jesus. Laboratório de ensino de matemática da Universidade de Brasília: uma trajetória de pesquisa em educação matemática, apoio à formação do professor e interação com a comunidade. In:

LORENZATO, Sérgio (Org.). **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. Campinas, SP: Autores Associados, 2006. (Coleção formação de professores).

BEZERRA, Manoel Jairo; PUTNOKI, José Carlos. **Bezerra Matemática**. São Paulo, SP: Editora Scipione, 1994. (Vol. único, 2º grau).

LAKATOS, Imre. **A lógica do descobrimento Matemático: provas e refutações**. Rio de Janeiro: Zahar, 1978.

NASSER, Lilian; TINOCO, Lucia A.A. (Coord.) **Argumentação e provas: no ensino da matemática**. UFRJ, 2001.

PARANÁ, Secretaria de Estado da Educação. **Diretrizes curriculares da rede pública de educação básica do Estado do Paraná: matemática**. Curitiba, 2006.

PAVANELLO, Regina Maria. **O abandono do ensino de geometria**: uma visão histórica. 1989. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas: SP, 1989.

REIS, Lourisnei Fortes; CARVALHO, Alexandre Luis Trovon de. **Aplicando a matemática**. Tatuí, SP: Casa Publicadora Brasileira, 2006 (Coleção aplicando a matemática, vol. 8ª série).