Encontro Nacional de Educação Matemática
Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas
Curitiba, PR - 18 a 21 de julho de 2013

A CONSTRUÇÃO DE UMA FLOR

Lisiane Cristina Amplatz[1]

Marcia Viviane Barbetta Manosso [2]

Resumo: Este trabalho surgiu de uma prática de sala de aula apresentada aos professores das escolas estaduais do Paraná. Ao registrar todos os passos para a construção de uma flor, foi possível rever vários conceitos geométricos. A partir desse contexto surgem duas situações problema que buscam estabelecer relações entre conteúdos matemáticos. Na primeira situação é desenvolvido um modelo matemático que permite medir a área total da figura plana definida pela flor a partir do raio inicial e, também, apresentar a sua relação com funções. No momento da construção em cartolina era visível o desperdício de papel e surge a questão da otimização dos espaços para a construção da flor, o que gera a abordagem dos conteúdos de Tratamento da Informação, Grandezas e Medidas.

Palavras-chave: Educação Matemática; Modelagem Matemática; Geometrias.

1. Introdução

Nos relatos de experiências dos professores da Educação Básica, da rede pública estadual do Paraná, no programa de formação continuada DEB Itinerante[3], nos quais trabalhamos como docentes, constatamos que os conteúdos de Geometrias, entre elas a Geometria Plana e Espacial, na maioria das vezes são abordados teoricamente a partir de definições faltando uma situação de contexto inicial. Ao refletir sobre o ensino da geometria percebemos que visa proporcionar "aos alunos o desenvolvimento de um tipo de pensamento que favorece a compreensão, a descrição, a representação e a organização do mundo em que vivem" (PAVANELLO e ANDRADE, 2002, p. 65).

Ao elaborar e aplicar um material para o ensino de Geometria no DEB itinerante foi possível discutir e refletir sobre uma abordagem diferenciada para os conceitos matemáticos a partir de construções feitas com o auxílio de régua e compasso e da exploração de uma situação problema.

[1] Coordenação Regional de Tecnologias na Educação – Núcleo Regional de Toledo – lisianeca@gmail.com
[2] Colégio Estadual do Paraná – marciavbmanosso@seed.pr.gov.br
[3] O DEB Itinerante foi um programa de formação continuada organizado pelo Departamento de Educação Básica (DEB) da Secretaria de Estado da Educação do Paraná (Seed) no período de maio de 2007 à agosto de 2008 em todos os Núcleos Regionais de Educação do Paraná (NRE) e ministrados por professores do DEB.

A fundamentação teórica deste trabalho é a Modelagem Matemática, visto que é "um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da Matemática, situações oriundas de outras áreas da realidade" (BARBOSA, 2001, p. 06). Ao longo de todo o trabalho, procuramos enfatizar a construção de modelos matemáticos, de área e perímetro, por exemplo, a partir de problematizações, as quais convidam o aluno a investigar as relações existentes entre determinados elementos das construções. Conforme Pavanello e Andrade é na geometria que "se encontra um maior número de situações nas quais o estudante pode exercitar sua criatividade pelo fato de as questões geométricas poderem ser resolvidas de várias formas, a partir de diferentes combinações das relações em jogo" (PAVANELLO e ANDRADE, 2002, p. 65).

Um ponto de vista é ensinar os conteúdos de matemática de forma articulada, ou seja, explorando as relações de interdependência entre eles. A nossa pretensão irá além de abordar o conteúdo de geometria com as construções geométricas, mas, pretendemos articular situações-problemas que envolvam os conteúdos de Números e Álgebra, Grandezas e Medidas, Funções e Tratamento da Informação.

Salientamos que os problemas elaborados a partir da construção geométrica da flor podem ser aplicados pelo professor da Educação Básica conforme a situação e série, assim como, criar situações novas para explorar outros conteúdos. Optamos mencionar de forma ampla e destacar alguns dos conteúdos matemáticos que podem ser envolvidos no trabalho.

2. Passos da Construção Geométrica da flor utilizando Régua e Compasso.

Para o desenvolvimento da atividade será necessária a utilização da régua e compasso. Tais instrumentos, geralmente, são poucos utilizados durante as aulas de Matemática, gerando assim, situações em que os alunos não sabem ou tem muita dificuldade no manuseio de tais instrumentos. Tendo isso em mente, esse tipo de atividade, além dos conteúdos matemáticos em sí, também a necessidade do manuseio e, ao mesmo tempo, o conhecimento sobre as funções destes instrumentos, torna a atividade interessante para ser abordada em sala de aula. Assim, para iniciar o trabalho se propõe o seguinte:

a) Com o compasso, traçamos uma circunferência de raio (R_1). Não nos preocupamos em determinar uma medida fixa para este raio. Deixamos a critério de o professor arbitrar uma medida de acordo com o propósito da construção. Neste momento buscamos explorar os conceitos de circunferência, círculo, raio e diâmetro.

b) Marcamos um ponto qualquer sobre a circunferência e com o compasso, tomamos a medida R_1. A partir do ponto marcado determinamos, sobre a circunferência, outros seis pontos que são vértices de um hexágono regular. Unimos os pontos encontrados sobre a circunferência. A exploração do conteúdo matemático, neste passo, é de conceitos e elementos de um polígono hexagonal. Neste caso, no hexágono regular temos $R_1 = l$, onde l representa o lado desta figura, ou seja, quando a circunferência circunscreve um hexágono regular, estabelecemos a relação entre o lado l e o raio R_1 como medidas iguais.

Esta construção pode ser realizada com outros polígonos regulares como base, entre eles, o pentágono, o octógono, o decágono e o dodecágono. Assim, novos elementos e relações geométricas podem ser explorados. Instigar os alunos quanto às regularidades existentes, por exemplo, entre o hexágono e o dodecágono regular, é importante para ele perceber que na construção do polígono regular de 12 lados, basta tomar a intersecção da mediatriz de cada lado do hexágono com a circunferência de raio R_1.

c) Construímos a mediatriz de cada lado do hexágono, abordando o seu conceito a partir da construção e destacando o ponto médio (M) sobre o segmento. Neste momento é importante que os alunos comparem a construção da mediatriz, da mediana e da bissetriz, porque as retas podem coincidir em alguns polígonos regulares. Nos passos de construção para obter a reta mediatriz dos lados do hexágono, questionamos quanto ao procedimento:

- *Para determinar o ponto médio de um segmento tomamos o compasso com medida de raio maior que a metade deste segmento. O que justifica essa ação?*

Nesta questão, exploramos a condição de existência de uma figura triangular, ou seja, a soma das medidas dos dois lados menores de um triângulo é sempre maior que a medida do terceiro lado. Caso contrário, a figura não poderia ser construída.

- *No hexágono regular, há a necessidade de construirmos as mediatrizes para cada lado? Por que?*

Neste caso, os alunos concluem que determinando as mediatrizes de três lados consecutivos do hexágono regular obtemos todas as mediatrizes dos lados, pois uma das características dessa figura é possuir lados opostos paralelos, os quais terão mediatrizes coincidentes. Também, podemos conduzir o trabalho de maneira que os alunos possam identificar que o centro da circunferência é um ponto comum entre todas as retas mediatrizes dos lados do hexágono. Além disso, o aluno deve perceber que esta característica é válida para polígonos regulares de quantidade de lados pares.

d) Unimos o centro da circunferência com cada um dos vértices do hexágono. Neste caso, os alunos devem perceber que o hexágono regular é formado por seis triângulos equiláteros. Esta observação é muito importante para que, posteriormente, o aluno possa deduzir conceitos, como a área do hexágono a partir do triângulo equilátero.

e) No último passo, conforme figura 1, para determinar o arco de circunferência que compõe a aba da construção, tomamos com o compasso a medida do apótema do hexágono e a demarcamos sobre a mediatriz a partir do lado do hexágono. Definimos o ponto C que pertence ao arco de circunferência da aba. Assim, temos três pontos A, B e C pertencentes a mesma circunferência. Logo, temos o centro O, a partir da intersecção das mediatrizes dos segmentos AC e BC.

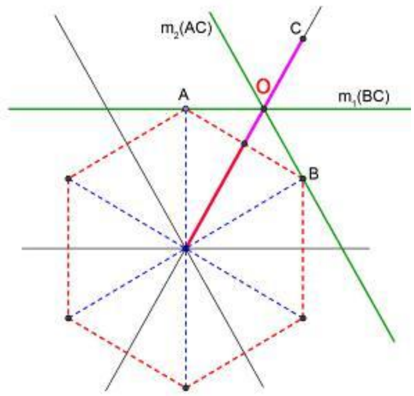

Figura 1

f) Determinado o centro O dos arcos de circunferência das abas, traçamos a circunferência de centro em O e raio AO (figura 2). Recortamos a figura e dobramos as abas (conforme linhas pontilhadas na figura 3). Encaixe uma aba sobre a outra (figura 4).

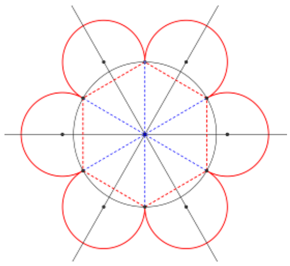

Figura 2

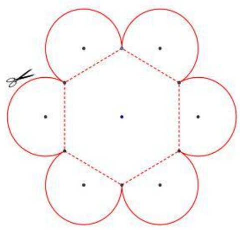

Figura 3

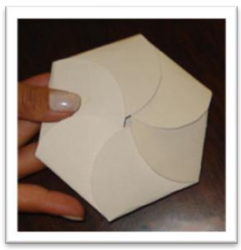

Figura 4

Após a construção da flor serão apresentadas duas situações problema que podem ser abordadas para o trabalho de diferentes conteúdos matemáticos além da geometria.

3. Primeira situação problema: Qual é a área do modelo construído, ou seja, quanto de papel é necessário para confeccionar esta peça?

Consideremos inicialmente o hexágono de lado l e raio inicial de construção R_1. Assim, por construção, podemos definir que $l = R_1$. Consideremos ainda que cada uma das 6 abas tenham raio de construção R_2. No entanto, podemos determinar R_2 em função de R_1 com o triângulo

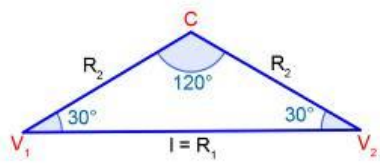

Figura 5

CV_1V_2 (figura 5) onde C é o centro do arco capaz de 60° de uma das abas e V_1 e V_2 vértices consecutivos do hexágono.

Sabemos que este triângulo tem ângulo C medindo 120°, já que, por definição, a sua medida é o dobro do arco capaz de 60°. Assim, concluímos que os outros dois ângulos medem 30° cada. Pela lei dos senos, podemos dizer que: $\frac{R_1}{\operatorname{sen} 120°} = \frac{R_2}{\operatorname{sen} 30°}$

Assim, temos a relação: $R_2 = \frac{R_1\sqrt{3}}{3}$

O aluno deve perceber que, para calcular a área total deste modelo, será necessário calcular a priori áreas de diferentes figuras, ou seja, a área de um hexágono de lado R_1, as áreas de seis triângulos isósceles CV_1V_2 (como visto anteriormente) e as áreas das abas formadas por seis arcos de circunferência, as quais não possuem uma área completa do círculo. Na linguagem matemática, podemos dizer que:

$$A_{\text{Total Modelo}} = A_{\text{Hexágono}} + 6.\ A_{\text{Triângulo Isósceles}} + 6.\ A_{\text{Aba}}$$

A área de um hexágono regular é possível ser demonstrada a partir da composição de seis triângulos equiláteros, assim, determinamos primeiramente a área de cada um dos triângulos isósceles CV_1V_2. Sabemos que a área de um triângulo qualquer é determinada por A=b.h/2 onde b é a base do triângulo e h a sua altura relativa a um dos vértices.

Neste caso, temos que b = R_1, e h = $\frac{R_1\sqrt{3}}{6}$, pois pela razão trigonométrica da tangente no triângulo retângulo, temos que tg 30° = $\frac{h}{R_1/2}$. Determinadas as duas variáveis e concluímos que: $A_{\text{Triângulo Isósceles}} = \frac{R_1 . \frac{R_1\sqrt{3}}{6}}{2} = \frac{R_1^2\sqrt{3}}{12}$

Percebemos que a maior dificuldade estava em determinar a área das abas formadas por arcos de circunferência, pois estas não são figuras inteiras.

No entanto, podemos conduzir o pensamento do aluno a deduzir que cada arco representa ⅔ de uma circunferência, conforme figura 6, pois se o ângulo V_1CV_2 mede 120° ele divide o círculo em 3 partes iguais. Assim, para o cálculo da área de cada uma das seis abas, levaremos em consideração apenas ⅔ da área do círculo. Então, $A_{\text{Aba}} = \frac{2\pi R_2^2}{3}$.

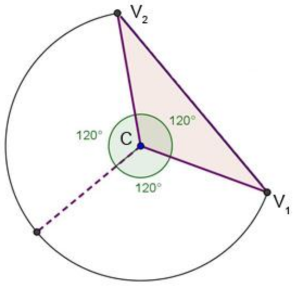

Figura 6

Mas, já definimos que $R_2 = \frac{R_1\sqrt{3}}{3}$. Portanto, $A_{Aba} = \frac{2\pi R_1^2}{9}$.

Logo, podemos finalmente determinar a área total do modelo construído.

$$A_{Total\ Modelo} = A_{Hexágono} + 6.\ A_{Triângulo\ Isósceles} + 6.\ A_{Aba}$$

$$A_{Total\ Modelo} = 6.\frac{R_1^2\sqrt{3}}{4} + 6.\ \frac{R_1^2\sqrt{3}}{12} + 6.\ \frac{2\pi R_1^2}{9} \quad \Rightarrow \quad A_{Total\ Modelo} = R_1^2.(2\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3})$$

Este é o modelo matemático que determina o valor da área total da construção em relação ao raio inicial R_1 dado. Tomando-se $(2\sqrt{3} + \frac{4\pi}{3})$ como valor constante, teremos um modelo matemático, visualmente, mais simples: $A_{Total\ Modelo} = R_1^2.7,65$

A partir da determinação deste modelo matemático podemos dar sequência e explorar esta equação como uma função quadrática de variável R_1, ou seja, $f(R) = R^2. 7,65$. Procuramos estipular os valores arbitrários para R e determinar graficamente a função. Também, uma oportunidade para explorar a calculadora.

Com a função pode-se explorar a calculadora e questionar o aluno quanto aos números negativos que foram tomados para a construção do gráfico em relação ao uso nas construções geométricas. Deixamos a critério de o professor aprofundar o estudo da função quadrática, suas propriedades, raízes da função, parábola, vértice da parábola e simetria.

Nossas experiências no ensino de Funções em turmas de Ensino Médio mostram que normalmente induzimos o aluno a construir gráficos de diferentes funções com valores negativos e positivos, incluindo o 0 (... -2, -1, 0, 1, 2, ...). Assim, nesta proposta de atividade ao utilizarmos a situação problema do cálculo de área, podemos criar um debate sobre os possíveis valores da variável R_1, os quais admitem valores quer pertencem a R^*_+.

4. Segunda situação problema: Se tomarmos uma folha de cartolina de medidas 65 cm de largura por 50 cm de altura, como estimar a quantidade de construções deste modelo que podem ser feitas nesta folha, levando em consideração o mínimo de desperdício de papel e utilizando um raio inicial de 7 cm? É possível prever este tipo de situação? Como?

Nesta situação, o aluno deve perceber que, para estimar quantos modelos é possível construir com uma folha de cartolina de medidas determinadas, não é possível tomar o modelo matemático da área total, pois desta forma estaríamos considerando a possibilidade de construir novos modelos “remendando” as sobras de papel.

Como sabemos que isto não é possível? Então, buscamos solucionar este problema inscrevendo o modelo de construção em outra forma geométrica. E qual seria essa forma geométrica que nos permite maior economia de papel durante as construções?

Iniciamos nossa análise inscrevendo o modelo de construção em um quadrado, conforme a figura 7. Para determinar a medida do lado deste quadrado devemos tomar sua maior largura, ou seja, formada por duas vezes o raio R_2 da aba, altura *h* do triângulo isósceles e o apótema *a* do hexágono. Tomando-se por raio inicial de construção 7 cm, teremos:

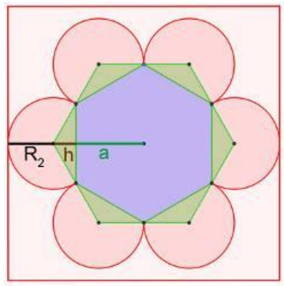

Figura 7

$R_2 = \frac{R_1\sqrt{3}}{3} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ $\quad$ $a = \frac{R_1\sqrt{3}}{3} = \frac{7\sqrt{3}}{3}$ $\quad$ $h = \frac{R_1\sqrt{3}}{6} = \frac{7\sqrt{3}}{6}$

A medida do lado do quadrado será: $2.\left(\frac{7\sqrt{3}}{3}+\frac{7\sqrt{3}}{3}+\frac{7\sqrt{3}}{6}\right) = \frac{35\sqrt{3}}{3} = 19{,}83\text{cm}$

Para facilitar os cálculos vamos definir a medida do lado do quadrado sendo 20 cm e visualizar o espaço da folha de cartolina determinada no problema (65 cm por 50 cm). Nessas condições, percebemos que será possível construir apenas 6 modelos. Por consequência constatamos que a área de desperdício da folha (representada em branco na figura 8) será composta por dois retângulos de medidas 10 cm por 60 cm e 5 cm por 50 cm. Assim: 10cm x 60cm + 5cm x 50cm = 850cm^2. Em percentual, este valor representa aproximadamente 26% de área de desperdício. Em continuidade, a proposta de discussão deve direcionar em analisar outra forma geométrica que permite melhor otimização do espaço da cartolina. A proposta é inscrever o modelo da flor em um círculo (figura 9).

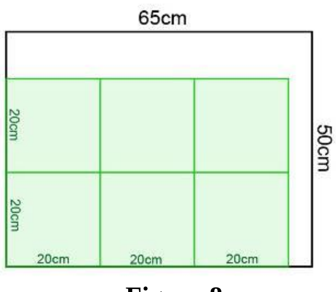

Figura 8

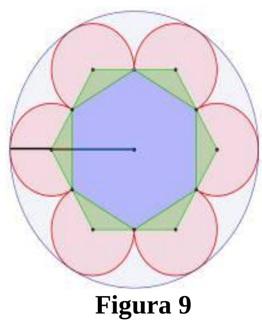

Figura 9

De forma análoga ao lado do quadrado, deduzimos que o diâmetro do círculo será 19,83cm. Assim, a medida do raio do círculo, que circunscreve o modelo é 10 cm. Pode-se, simular construções de raios com medidas diferentes, conforme exemplos a seguir:

Raio inicial de construção do modelo (cm)	Medida aproximada do raio do círculo que contém o modelo (cm)	Número de cartões que é possível construir nesta cartolina	Área de sobra de papel (cm^2)	Aproveitamento de papel (%)

5	7,3	12	1241	62
6	8,7	8	1347,7	58,5
7	10,1	6	1327,1	59
8	11,6	4	1559,1	52

Portanto é possível perceber que, tomando-se um modelo de construção de raio R_1 igual a 7 cm e inscrevendo-o em um círculo de raio aproximadamente de 10 cm, não teremos mais aproveitamento da folha de cartolina de medidas definidas no problema inicial se inscrevermos o modelo no quadrado de lado 10cm. No entanto, ao estudar a tabela, os alunos podem fazer análises e perceber que em alguns casos de raio R_1, inscrever o modelo em circulo pode trazer mais economia de papel do que inscrever num quadrado.

O conteúdo de Grandezas e Medidas pode ser facilmente trabalhado nas conversões de medidas de área. Sugerimos comparações entre medidas em relação ao metro quadrado ou centímetro quadrado para que o aluno desenvolva a percepção espacial e métrica.

5. Considerações Finais

No trabalho apresentado, procuramos trazer uma proposta de construções geométricas aliada a articulação de conteúdos matemáticos. É possível perceber que a partir do conteúdo de Geometria Plana, as atividades e discussões podem ser ampliadas para Funções (Afim e Quadrática), Grandezas e Medidas (conversões de unidades de medida de área e perímetro), Números e Álgebra (operações com números reais) e Tratamento da Informação (cálculo estatístico de otimização de espaço). Portanto, independente da série a ser trabalhada, o professor pode enfatizar os conteúdos os quais estejam no planejamento elaborado pela escola. Nesse tipo de atividade, o uso de recursos tecnológicos são, também, apropriados, como a calculadora nas situações de cálculos e de softwares específicos para a Geometria como é o caso do Geogebra, o qual permitiu que todas as imagens apresentadas neste texto fossem construídas pelas autoras do trabalho.

6. Referências

BARBOSA, J. C. **Modelagem Matemática e os professores: a questão da formação**. Bolema: Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, n. 15, p. 5-23, 2001.

BARBOSA, J. L. M. **Geometria Euclidiana Plana**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 1997.

PAVANELLO, R. M.; ANDRADE, R. N. G. Formar professores para ensinar geometria: Um desafio para as licenciaturas em Matemática. **Educação Matemática em Revista**. a. 9. n. 11. Abril de 2002.