

REPRESENTAÇÃO DE PONTOS NO PLANO CARTESIANO: ATIVIDADES DIDÁTICAS

Ms. Paula Cristina Bacca
Universidade Regional de Blumenau – FURB
paula.bacca@gmail.com

Dra. Tania Baier
Universidade Regional de Blumenau – FURB
taniabaier@gmail.com

Resumo:

Neste trabalho é apresentado o relato de experiência realizada com estudantes da educação básica e do ensino superior. Inicialmente são descritos os resultados obtidos com a realização de atividades diagnósticas relacionadas com a representação de pontos na reta real e no plano cartesiano. Em seguida, são apresentadas as atividades, realizadas com os mesmos alunos, visando superar as dificuldades por eles encontradas, a saber, o conhecimento da densidade da reta numérica real e a localização de números decimais. As atividades iniciais foram realizadas com uma régua impressa em papel, efetuando medidas de pequenos pedaços de fios elétricos. Duas régua foram impressas, posicionadas perpendicularmente, representando o primeiro quadrante do plano cartesiano. Deste modo, as imagens das régua facilitaram o entendimento da representação de pontos.

Palavras-chave: Reta real; plano cartesiano; atividades didáticas.

1. Introdução

Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), o estudo do plano cartesiano na educação básica possibilita ao estudante “utilizar diferentes registros gráficos — desenhos, esquemas, escritas numéricas — como recurso para expressar idéias, ajudar a descobrir formas de resolução e comunicar estratégias e resultados.” (BRASIL, 1998, p. 56).

Atualmente o plano cartesiano possui várias aplicações e é utilizado de diversas formas tanto no cotidiano quanto em áreas específicas. Isso se deve ao fato de ele estar associado à geometria analítica e sem ela “não existiria o cálculo para ciência, nem tomografia computadorizada para medicina, nem ferramentas automatizadas para indústria nem computação gráfica para arte e divertimento.” (BERLINGOFF; GOUVÊA, 2008, p. 173). A geometria analítica propiciou outra forma de tratamento dos problemas geométricos e permitiu que muitos desses problemas fossem solucionados.

O presente artigo tem como objetivo apresentar o relato de uma experiência pedagógica, realizada com estudantes da educação básica e do ensino superior, envolvendo a localização de pontos na reta numérica real e no plano cartesiano. As atividades didáticas realizadas objetivaram um melhor entendimento do plano cartesiano ou espaço cartesiano que é formado por duas retas numéricas perpendiculares: a horizontal chamada de *eixo das abscissas* ou *eixo x* e a vertical de *eixo das ordenadas* ou *eixo y*. As duas retas numéricas reais, posicionadas perpendicularmente, permitem que se produzam relações entre os números nelas contidos formando os chamados pares ordenados (x, y) . Para que se especifique de uma forma não ambígua a localização de cada ponto, foi determinada uma convenção matemática na representação do plano e de pontos contidos nesse plano. Logo, os eixos orientados e os pares ordenados permitem a não ambiguidade de pontos e o total mapeamento do plano, essas retas perpendiculares são também conhecidas como sistema de coordenadas cartesianas.

A sua utilização vai desde a localização de pontos em um determinado plano até as mais complexas aplicações envolvendo cálculo diferencial e integral ou lugares geométricos como espirais. Devido a esse fato, as duas retas perpendiculares podem ser representadas não só por retas reais e coordenadas cartesianas, mas também por outros sistemas de coordenadas. “Particularmente útil no caso das espirais é o sistema de coordenadas polares, que foi considerado em 1691 por Jakob Bernoulli [...]. Outros sistemas de coordenadas [...] foram pesquisados perto do final do século XIX [...]”. (EVES, 1992, p. 18).

Esse plano é conhecido como cartesiano em homenagem a René Descartes, que, assim como Fermat, desenvolveu a geometria analítica. Entretanto “Descartes provavelmente foi o primeiro de seu tempo [...]”. (BOYER, 1996, p. 238).

Ao se trabalhar com o plano cartesiano e a geometria analítica no ensino básico e superior e, nas pesquisas realizadas sobre o tema, observa-se a dificuldade encontrada pelos estudantes no entendimento da geometria analítica. Richit (2005) constata

[...] que em muitas instituições de ensino superior esta disciplina se caracteriza como problema. Segundo pesquisa realizada na Unicamp, USP e PUC-SP no ano de 1997, de todas as disciplinas que compõem a grade curricular dos cursos destas instituições, a Geometria Analítica aparece com um índice de reprovação de mais de 35% (DI PINTO, 2000). Na Unesp de Rio Claro, a média percentual de reprovação no curso de Matemática está em torno de 39%, segundo dados do professor da respectiva disciplina no ano de 2004. (RICHIT, 2005, p. 41)

Nossa prática pedagógica tem revelado que estudantes, dos anos finais do ensino fundamental, do ensino médio e também dos cursos de graduação, encontram dificuldades no entendimento dos conceitos elementares relacionados com o plano cartesiano. D'Ambrósio (1986), ao falar sobre sociedade do conhecimento e sobre a pesquisa em educação matemática, defende a ideia de que em vez de seguir somente um teórico consagrado, o professor pesquisador ancore suas teorizações nas suas próprias reflexões e práticas. Desse modo, fundamentadas em nossa vivência pedagógica, organizamos atividades diagnósticas elaboradas com o intuito de verificar o domínio do estudante quanto à marcação de pontos na reta numérica real e no plano cartesiano, possibilitando assim, uma análise do seu conhecimento da reta numérica e do plano cartesiano.

A avaliação diagnóstica foi aplicada com 67 estudantes ingressos em cursos de graduação de uma universidade localizada no município de Blumenau. Observou-se que 5% desses estudantes não sabiam representar os pontos na reta numérica e, conseqüentemente no plano. Além disso, os questionamentos mais constantes durante a avaliação foram sobre as convenções matemáticas do plano cartesiano como “primeiro é x ou y ?”. Dentre esses mesmos estudantes, 55% não tinham o conhecimento da densidade da reta numérica real, ou seja, não tinham o entendimento de que entre dois números reais existe uma infinidade de outros números reais. Esse é um dado significativo, pois, para dominar os conceitos da geometria analítica deve-se conhecer a representação de pontos na reta numérica real.

Realizou-se a mesma avaliação diagnóstica com 111 estudantes do 1º ano do Ensino Médio de uma escola particular do município de Blumenau e observou-se que 55% não localizaram corretamente os pontos na reta numérica, 57% não tinham o conhecimento da densidade da reta numérica real e 84% não souberam localizar pontos no plano cartesiano.

2. A avaliação diagnóstica

A avaliação diagnóstica foi aplicada com 67 estudantes ingressos em cursos de graduação de uma universidade localizada no município de Blumenau. Observou-se que 5% desses estudantes não sabiam representar os pontos na reta numérica e, conseqüentemente no plano. Além disso, os questionamentos mais constantes durante a avaliação foram sobre as convenções matemáticas do plano cartesiano como “primeiro é x

ou y ?”. Dentre esses mesmos estudantes, 55% não tinham o conhecimento da densidade da reta numérica real, ou seja, não tinham o entendimento de que entre dois números reais existe uma infinidade de outros números reais. Esse é um dado significativo, pois, para dominar os conceitos da geometria analítica deve-se conhecer a representação de pontos na reta numérica real.

Realizou-se a mesma avaliação diagnóstica com 111 estudantes do 1º ano do Ensino Médio de uma escola particular do município de Blumenau e observou-se que 55% não localizaram corretamente os pontos na reta numérica, 57% não tinham o conhecimento da densidade da reta numérica real e 84% não souberam localizar pontos no plano.

A avaliação diagnóstica consistiu em três atividades: 1) Localização de números na reta real; 2) Localização de pontos no plano cartesiano a partir de suas coordenadas; 3) Determinação as coordenadas de pontos previamente localizados no plano cartesiano.

O objetivo da primeira atividade foi verificar a compreensão e domínio do estudante sobre a reta numérica real, pois entendemos que, para representar algum ponto no plano cartesiano, é fundamental saber localizar um número qualquer na reta numérica real.

Ao final da aplicação dessa atividade, constatamos que praticamente todos os estudantes que erraram a localização de pontos na reta, conseqüentemente, não responderam corretamente a pergunta *Existem números entre $-6,9$ e -7 ? Justifique sua resposta*”, o que nos mostrou a dificuldade na compreensão da reta numérica real e dos números negativos, cujo conhecimento é fundamental para a localização de pontos no plano cartesiano e no entendimento da geometria analítica.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais, nas orientações didáticas para o terceiro e quarto ciclos ao abordarem os números racionais, relatam que as dificuldades encontradas ao se trabalhar com este conjunto numérico,

possivelmente deve-se ao fato de que a aprendizagem dos números racionais supõe rupturas com idéias construídas para os números naturais. [...] se a seqüência dos números naturais permite estabelecer sucessor e antecessor, para os racionais isso não faz sentido, uma vez que entre dois números racionais quaisquer é sempre possível encontrar outro racional; assim, o aluno deverá perceber que entre o 0,8 e 0,9 estão números como 0,81, 0,815 ou 0,87. (BRASIL, 1998, p. 101)

Nas respostas de alguns alunos ficou explicitada a não compreensão do significado de um número escrito na forma de fração. Por exemplo, para representar na reta real os

números $\frac{3}{4}$ ou $\frac{5}{2}$, não sabiam onde localizá-los pelo fato de não saberem escrever esses números em suas outras representações, no caso a decimal.

A segunda atividade diagnóstica tinha como objetivo verificar se o estudante conseguia localizar pontos no plano cartesiano a partir de suas coordenadas, se compreendiam a notação convencionada para pontos no plano cartesiano (x, y) e se conseguiam localizar, corretamente, aquele ponto no plano.

A maior parte dos estudantes do ensino médio não conseguiu realizar essa tarefa corretamente, pois não sabia qual das coordenadas seria a horizontal (abscissa) e qual seria a vertical (ordenada). Outra dificuldade encontrada foi, novamente, não saberem escrever os números fracionários na forma decimal devido a não conseguirem localizar os pontos cujas coordenadas eram dadas na forma de fração. Quanto aos estudantes do ensino superior, a maior parte obteve sucesso na marcação dos pontos, entretanto havia dúvidas quanto ao par ordenado e os números racionais escritos na forma de fração.

Na terceira atividade, o raciocínio era o inverso da segunda atividade. O estudante deveria dar a localização dos pontos previamente determinados no plano. O objetivo desta atividade diagnóstica era verificar a compreensão da notação para a localização de pontos no plano cartesiano. Além disso, o estudante deveria responder a seguinte pergunta: *A ordem que você escreveu as coordenadas cartesianas de cada ponto faz diferença? Ou seja, o ponto $(5, 2)$ e o ponto $(2, 5)$ estão em localizações diferentes? Justifique sua resposta.* Nesta atividade, os estudantes tiveram um índice bem maior de acertos do que na segunda atividade.

Após a realização da avaliação diagnóstica, notou-se então o não conhecimento aprofundado da reta numérica real, pois a localização dos números decimais foi a questão que mais gerou dúvidas para sua localização. A maioria dos estudantes encontrou dificuldade na localização de decimais negativos, não observando que o número é maior quando localizado mais à direita da reta e menor quando mais à esquerda da reta. Estes aspectos indicam dificuldades no entendimento dos conceitos elementares do plano cartesiano. Frente a isso buscamos quais são os conceitos básicos necessários para uma melhor compreensão da geometria analítica, diagnosticando e propondo meios que possam facilitar e melhorar a compreensão dos estudantes sobre o assunto plano cartesiano. Assim, propomos iniciar nossas atividades pelos eixos ordenados (reta numérica real) como uma

introdução ao plano cartesiano, pois, para localizar algum ponto no plano cartesiano, é fundamental que se saiba localizar um número qualquer na reta numérica real.

Frente a isso buscou-se algo concreto que estivesse presente no cotidiano do estudante: a régua.

3. Atividades didáticas

As atividades didáticas realizadas pelos estudantes foram elaboradas partindo dos dados obtidos por meio das atividades diagnósticas as quais revelaram que grande parte das dificuldades, encontradas pelos estudantes, referem-se aos conteúdos do ensino fundamental. As atividades diagnósticas indicaram a carência de conceitos, conhecimentos e representações de números racionais, o que gera dificuldades na compreensão e o desenvolvimento do plano cartesiano, da geometria analítica e, conseqüentemente, do cálculo diferencial e integral. A partir destes resultados, foram organizadas as atividades apresentadas neste artigo, abordando o conceito matemático da reta numérica real para a introdução ao plano cartesiano, utilizando a régua. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais:

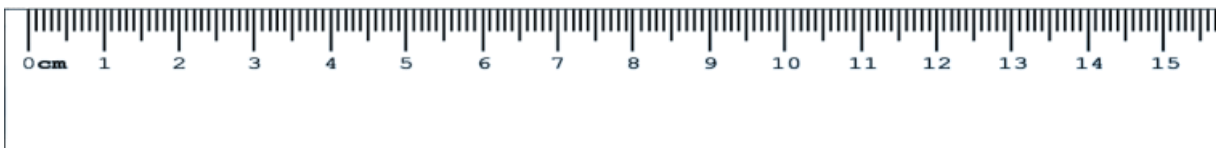
É o aspecto experimental que colocará em relação esses dois espaços: o sensível e o geométrico. De um lado, a experimentação permite agir, antecipar, ver, explicar o que se passa no espaço sensível, e, de outro, possibilita o trabalho sobre as representações dos objetos do espaço geométrico e, assim, desprender-se da manipulação dos objetos reais para raciocinar sobre representações mentais. (BRASIL, 1998, p. 82)

As atividades foram elaboradas com intuito de melhorar o entendimento do plano cartesiano e foram realizadas no ensino fundamental em uma primeira abordagem do tema e, no superior como revisão. Elas têm por objetivo a introdução do plano cartesiano partindo da reta numérica representada por uma régua, graduada em centímetros e em milímetros. Essa estratégia auxiliou os estudantes na compreensão da continuidade da reta real.

Com as crianças, foram oportunizadas outras situações que envolveram a utilização da régua para medir comprimentos, pois são problemas envolvendo medidas que favorecem o entendimento dos números racionais. Foi importante, nestas outras atividades de medição, a inclusão de objetos cujas dimensões são representadas por números decimais para que os estudantes compreendessem a régua e, conseqüentemente a reta numérica real.

A seguir estão apresentadas as atividades realizadas com os estudantes:

1. Pegue os fios que foram entregues pelo seu professor e meça, com a régua desenhada abaixo, o tamanho de cada fio:



Primeiro fio (azul): _____

Segundo fio (bege): _____

Terceiro fio (preto): _____

Quarto fio (verde): _____

2. Localize os pontos

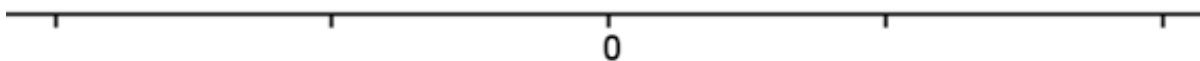
→ 2

→ -1

→ 1

→ -2

na reta numérica abaixo:



3. Localize os pontos

→ 0,2

→ -0,5

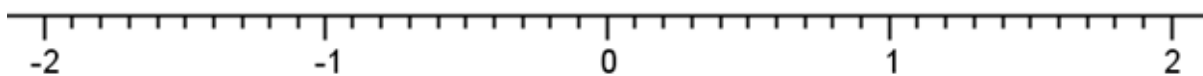
→ 0,1

→ -1,9

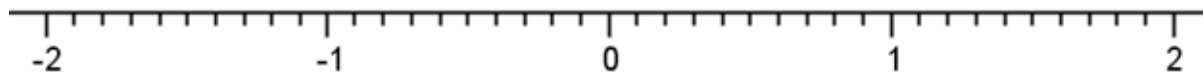
→ 1,8

→ -1,2

na reta numérica abaixo:



4. Localize, na reta numérica abaixo, os pontos 1,5 ; 1,4 ; -1,2 e -0,9

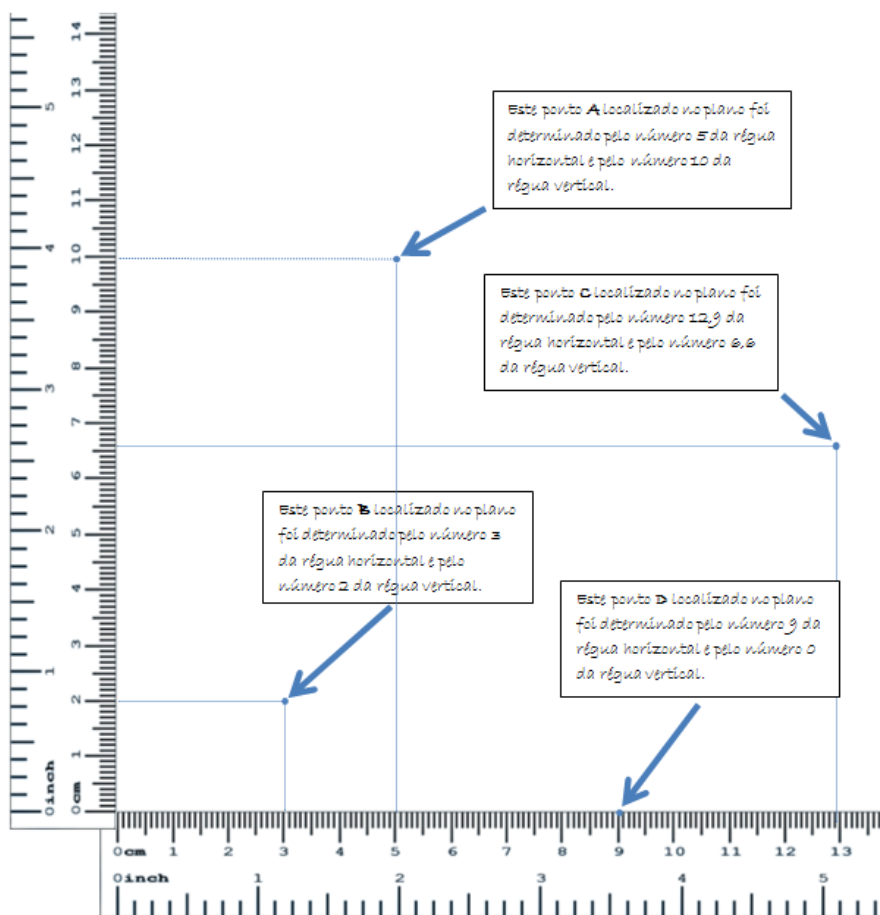


Responda as questões a seguir:

a) O número 1,45 é um número maior ou menor que 1,4? _____

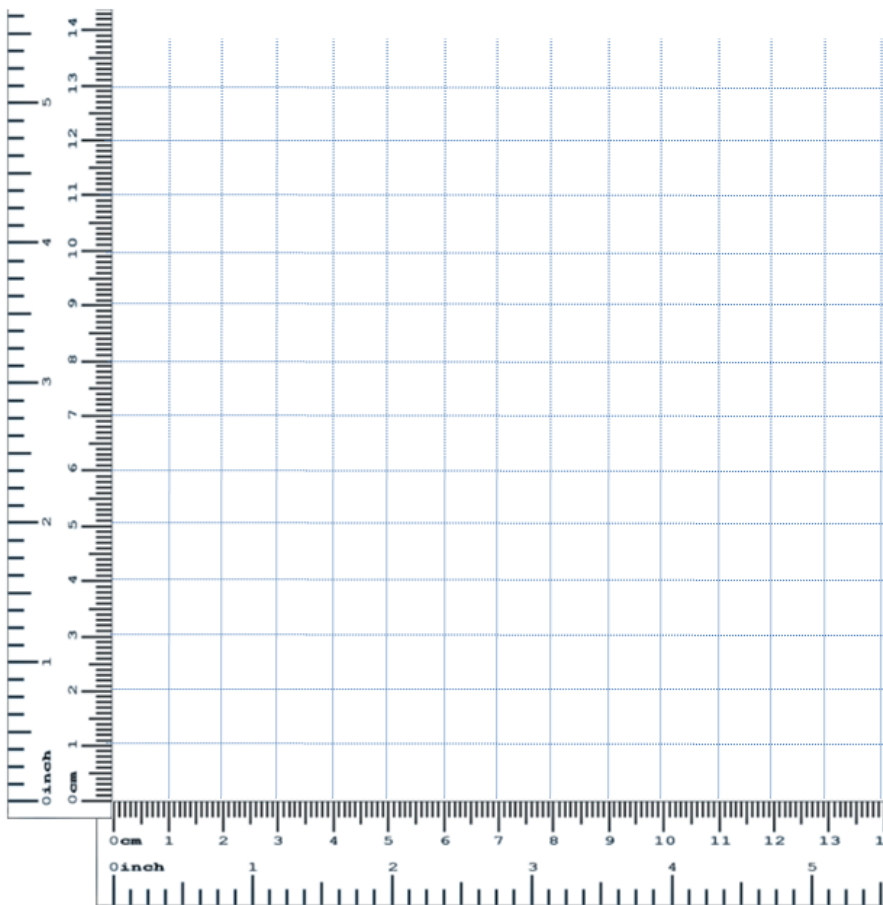
- b) Localize o número 1,45 na reta numérica da atividade 4. Ele está localizado entre 1,4 e o 1,5? _____
- c) O número $-0,8$ é maior ou menor que o -1 ? _____
- d) Localize o número $-1,05$ na reta numérica da atividade 4. Ele está localizado entre o $-0,9$ e o -1 ? _____
- e) Como você poderia dizer se um número é maior ou menor que outro apenas vendo a localização deles na reta numérica? _____

No exercício seguinte temos duas régulas: uma vertical e outra horizontal. Isso nos permite localizar pontos não só sobre a régua, mas também no plano. Observe os exemplos:



4. Localize no plano os pontos a seguir:

- a) O ponto A(1, 5) de localização horizontal 1 e vertical 5.
- b) O ponto B(4, 5) de localização horizontal 4 e vertical 5.
- c) O ponto C(6, 8) de localização horizontal 6 e vertical 8.
- d) O ponto D(0, 11) de localização horizontal 0 e vertical 11.
- e) O ponto E(9, 0) de localização horizontal 9 e vertical 0.
- f) O ponto F(3,5 , 6,5) de localização horizontal 3,5 e vertical 6,5.
- g) O ponto G(8,9 , 1,5) de localização horizontal 8,9 e vertical 1,5.
- h) O ponto H(3,5 , 0) de localização horizontal 3,5 e vertical 0.



Na questão cinco, onde os estudantes localizam os pontos solicitados no plano, foi solicitado que estudassem as explicações e exemplos que estão na página anterior à questão.

5. Considerações Finais

A realização das atividades relatadas, utilizando o desenho da régua centimetrada, foi bem sucedida, tanto com os estudantes que iniciaram seus estudos sobre plano cartesiano, nos anos finais do ensino fundamental, como também do ensino médio e com universitários. A régua é um instrumento que os estudantes manuseiam, fazendo parte do seu espaço sensível, permitindo dominar, de uma forma mais simples, a representação da reta numérica real. Com o desenho da régua no lugar da reta numérica, os estudantes conseguiram, com uma maior facilidade, localizar os pontos solicitados. Estava mais claro para eles localizarem 1,2 centímetros do que o número 1,2 em si, pois o 1,2 centímetros representava 1 centímetros e 2 milímetros, o que estava dando inicialmente a experiência e a representação de seu domínio para daí então partir para a reta numérica.

Após representar uma reta numérica com a régua, duas régua passaram a representar os eixos cartesianos, posicionadas perpendicularmente. Inicialmente, posicionaram-se duas régua que representavam o 1º quadrante do plano cartesiano e após foram mostrados os outros quadrantes. Para determinarmos pontos neste plano, ainda não utilizamos a escrita convencional (x, y) e sim, partimos da linguagem de domínio do estudante: a ideia do deslocamento horizontal (x) e vertical (y) em cada régua para fazer a localização. Além de o estudante poder localizar pontos sobre a régua, ele pode localizar pontos no plano determinado entre as duas régua. Recomenda-se não utilizar a notação de par ordenado quando essa atividade for proposta ao Ensino Fundamental, pois

[...] é fundamental propor atividades para que o aluno seja estimulado a progredir na capacidade de estabelecer pontos de referência em seu entorno, para efeito de localização. [...] Isso pode ser feito por meio de atividades em que o aluno se situe no espaço, desloque-se nele, dê e receba instruções de localização, compreenda e utilize termos como esquerda, direita, giro, distância, deslocamento, acima, abaixo, ao lado, na frente, atrás, perto. (BRASIL, 1998, p. 82)

Durante a aplicação dessa atividade quatro estudantes não sabiam posicionar-se na reta numérica questionando *à minha direita ou à direita da régua?* É importante que o professor enfatize este aspecto, pois se trata das convenções fundamentais do plano cartesiano.

Após a aplicação da atividade das régua todos os estudantes dos anos finais do ensino fundamental conseguiram localizar no plano cartesiano os pontos solicitados, inclusive os pontos com coordenadas decimais. O concreto, no caso a régua, trouxe um

melhor entendimento da reta numérica e dos números decimais contidos nela do que simplesmente a apresentação de uma linha que contém números.

Observa-se então que o entendimento dos conjuntos numéricos e das diversas representações dos números pertencentes a esses conjuntos são fundamentais para o entendimento do plano cartesiano. A exploração das escritas numéricas em suas diversas formas, principalmente da reta numérica, vem a ser fundamental para a construção do conceito de plano cartesiano. É importante que o estudante compreenda a reta numérica real e sua densidade, pois o não conhecimento da densidade da reta numérica real, revelado na avaliação diagnóstica resulta na não compreensão do plano cartesiano. O entendimento desse conceito deve ser priorizado pelos professores, oportunizando um maior contato do estudante com a exploração da representação dos números na reta numérica.

6. Referências

BACCA, Paula Cristina. **Geometria analítica na Educação Básica: primeiros passos no plano cartesiano**. Blumenau: FURB, (Dissertação de Mestrado), 2013.

BERLINGOFF, William P.; GOUVÊA, Fernando Q. **A matemática através dos tempos**. Tradução de Elza Gomide, Helena Castro. São Paulo: Edgard Blücher, 2008.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. Tradução de Elsa F. Gomide 2 ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.

BRASIL, Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: Mec/SEB, 1998.

D'AMBRÓSIO, Ubiratam. **Educação e Pesquisa: Sociedade, cultura, matemática e seu ensino**. São Paulo, v. 31, n. 1, p. 99-120, jan./abr. 2005.

DI PINTO, M. A. **Ensino aprendizagem da geometria analítica: as pesquisas brasileiras da década de 90**. São Paulo: PUC – SP, (Dissertação de Mestrado), 2000.

EVES, H. W. **Introdução a História da Matemática**. Campinas, SP: UNICAMP, 1995.

RICHT, Adriana. **Projetos em geometria analítica usando software de geometria dinâmica: repensando a formação inicial docente em matemática**. Rio Claro: UNESP, (Dissertação de Mestrado), 2005.