

## SIGNIFICADOS E REPRESENTAÇÕES DOS NÚMEROS RACIONAIS ABORDADOS NO EXAME NACIONAL DO ENSINO MÉDIO – ENEM 2011

Fernanda Andréa F. Silva  
UFRPE  
fernandaandrea@ig.com.br

Mônica Lins  
UFRPE  
monlins@terra.com.br

### Resumo:

Este estudo trata-se de um recorte da dissertação intitulada “A abordagem dos números racionais no Exame Nacional do Ensino Médio – ENEM” e teve como objetivo analisar os itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011 que envolvem os números racionais nas suas diferentes representações e significados. O referencial teórico foi a teoria das Representações Semióticas de Raymond Duval e os significados dos números racionais. Pudemos concluir que a prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011 priorizou dentre os itens que envolveram os significados dos números racionais, os significados razão, probabilidade e porcentagem. O registro numérico fracionário foi aquele que mais pôde ser mobilizado durante a resolução dos itens e o numérico percentual, o de mais frequência na estrutura desses.

**Palavras-chave:** números racionais, significados, representações.

### 1. Introdução

O conjunto dos números racionais é composto por números nos registros de representações: fração decimal, fração ordinária, percentual, decimal exato, decimal periódico e potência de dez. Esses registros são empregados de acordo com o contexto em que o número está inserido, como, por exemplo, em uma receita culinária, utiliza-se a expressão “ $\frac{3}{4}$  de xícara de farinha de trigo” e não “0,75 de xícara de farinha de trigo”. Também, emprega-se o termo “ganhe 10% de desconto nas compras à vista” ao invés de “ $\frac{1}{10}$  de desconto nas compras à vista”. Sendo assim, torna-se necessário que os alunos tenham o domínio e estabeleçam conexões entre os diferentes registros de representações dos números racionais e que saibam utilizá-los e interpretá-los em diversos contextos (BRASIL, 1997), buscando ter o domínio sobre eles.

Romanatto (1997) afirma que, dependendo do contexto em que aparece o número racional, ele, assume um *significado* ou *personalidade*. Os registros de representações e os

significados desse conjunto numérico são estudados formalmente, de acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN, a partir do 4º ano até o final do Ensino Fundamental, sendo consolidados no Ensino Médio, como apontam as Orientações Curriculares do Ensino Médio – OCNEM (BRASIL, 2008).

Entretanto, pesquisas envolvendo o ensino-aprendizagem dos números racionais, como Catto (2000), Merlini (2005), Teixeira (2008), Santos (2005) têm demonstrado que esses números são de difícil compreensão para os alunos, devido à variedade de registros de representações, como, também, de significados que podem ser atribuídos a um mesmo registro de representação do número racional.

Por outro lado, o Exame Nacional do Ensino Médio - ENEM é uma avaliação de larga escala com base nas competências e habilidades que o aluno deve desenvolver durante a educação básica. Sendo assim com a finalidade de instigar o currículo acerca dos números racionais, nosso objetivo, nesse estudo é analisar os significados, os registros de representações semióticas, os tratamentos e as conversões dos números racionais que podem ser mobilizados nos itens da prova do ENEM 2011.

## **2.Os significados dos números racionais**

Kieren (1976), citado por Silva (2008) é apontado pela literatura como o primeiro pesquisador a indicar sete interpretações que devem ser consideradas para a completa compreensão da natureza dos números racionais, sendo elas: números racionais como frações; frações decimais; classes de equivalência de frações; números na forma  $\frac{p}{q}$ , onde p, q são inteiros e  $q \neq 0$ ; operadores multiplicativos e números racionais como elementos de um campo quociente ordenado e infinito.

Behr et al (1983) redefiniram algumas interpretações de Kieren (1976) dos números racionais e subdividiram outras, propondo os seguintes subconstrutos:

1. Medida fracionária: é uma reconceitualização da interpretação parte-todo da fração. Representa uma quantidade de uma determinada unidade.
2. Razão de um número racional: expressa uma comparação entre duas quantidades;
3. Taxa de número racional: representa uma nova quantidade que foi definida da relação entre duas outras. A velocidade é um exemplo desse construto, sendo obtida da relação entre a distância e o tempo;
4. Quociente de um número racional: representa um número racional como quociente indicado, ou seja, como uma divisão do numerador pelo denominador;

5. Coordenada linear de um número racional: assemelha-se à interpretação medida de Kieren. Representa o número racional na reta numérica, enfatizando as propriedades associadas à topologia na reta numérica, densidade, distância e não completividade; e, ainda, que os números racionais são um subconjunto dos reais;
6. Decimal de número racional: envolve as propriedades ao nosso sistema de numeração;
7. Operador de um número racional: representa esse número como uma transformação, uma função ou como alongador-redutor.

Romanatto (1997) afirma que o número racional deve ser visto como uma *teia de relações* por apresentarem diversas ideias, de acordo com o contexto em que aparecem, podendo expressar os seguintes significados: uma medida (parte-todo), um quociente, uma razão, um operador multiplicativo, um número na reta numérica e uma probabilidade.

Nunes et al (2003, apud Teixeira, 2008) baseados na teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud apresentaram uma proposta de classificação dos números racionais, na forma fracionária, identificando cinco significados desses números que devem ser considerados no ensino e aprendizagem: número, parte-todo, medida (com quantidades intensivas e extensivas), quociente e operador multiplicativo. Essa classificação foi utilizada nas pesquisas de Merlini (2005), Moutinho (2005), Rodrigues (2005), Santos (2005), Damico (2007), que fizeram parte de um Projeto de pesquisa desenvolvido no programa de cooperação internacional entre Oxford Brookes University, e o Centro das Ciências Exatas Tecnológicas da PUC-SP.

Como não existe um consenso entre os pesquisadores quanto a uma classificação para os diversos significados que podem apresentar os números racionais, assumiremos em nosso estudo a seguinte classificação: medida (parte-todo), quociente, operador multiplicativo, razão, probabilidade, porcentagem e número na reta numérica.

O significado medida (parte-todo) envolve a ideia de comparação entre quantidade e medida. A situação envolve um todo (o inteiro ou o grupo) que deve ser dividido em  $n$  partes iguais e ser tomado um determinado número de partes, sendo cada parte será  $\frac{1}{n}$ .

O significado quociente envolve uma divisão entre dois números inteiros, expressando uma partição quando é conhecido o número de grupos ou partes iguais a ser formado e o quociente representa o tamanho ou o número de elementos de cada parte; ou

uma quociação quando é conhecido o tamanho ou o número de elementos de cada parte e o quociente representa o número de grupos ou partes a ser formado.

O significado razão é considerado por Behr et al (1983) o mais “natural” para promover o conceito de equivalência. Esse significado expressa uma relação de comparação multiplicativa entre duas medidas de mesma grandeza ou de grandezas diferentes.

O significado operador multiplicativo expressa uma transformação de uma quantidade ou medida, como também uma proporcionalidade. Esse significado impõe ao número racional uma interpretação algébrica, onde esse número é pensado como uma função que transforma quantidades em quantidades semelhantes.

O significado probabilidade expressa uma relação de comparação entre chances favoráveis ou necessárias e chances possíveis. Sendo considerado em nosso estudo devido sua importância prática ligada aos assuntos do cotidiano que envolve tratamento da informação, apesar de alguns autores considerarem esse significado incluído no significado parte-todo.

O significado número na reta numérica expressa uma relação de correspondência entre o número racional e um ponto na reta numérica e se constitui como aquele em que os alunos apresentam mais dificuldades de compreensão (NUNES e SILVA, 2009).

O significado porcentagem expressam situações que envolvem taxa percentual e que consideramos terem características próprias, que as diferenciam dos outros tipos de situações em que o significado operador multiplicativo está envolvido.

### **3. As representações dos números racionais**

Para Duval (2011), sobretudo na aprendizagem matemática, a análise do conhecimento não deve prender-se apenas a natureza dos objetos considerados, mas também, à forma como são apresentados ou como se pode ter acesso a eles.

Dessa forma, Raymond Duval aponta a importância das representações semióticas devido as

... possibilidades de tratamento matemático dependerem do sistema de representação(...). A seguir há o fato de que os objetos matemáticos, começando pelos números, não são objetos diretamente perceptíveis ou observáveis com a ajuda de instrumentos. O acesso aos números está ligado à utilização de um sistema de representação que os permite designar. (DUVAL, 2003, p.13).

Sendo assim, esse autor considera que a *atividade matemática consiste nas transformações das representações semióticas* (Duval, 2011, p.58) de forma implícita ou explícita, sendo essas transformações produtoras de novos conhecimentos.

Par Duval (2009) o desenvolvimento cognitivo do indivíduo e as dificuldades de aprendizagem da matemática estão relacionados a três fenômenos que são próprios dos registros de representações: a existência de diversos registros de representação semiótica, a diferença entre o objeto representado e seus registros de representação semiótica e a coordenação entre diferentes registros de representação semiótica.

De acordo com Duval (2003), existem quatro tipos diferentes de registros em matemática, discriminados no quadro 1.

Quadro 1 - Classificação dos registros de representação semiótica em matemática

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
<p><b>REGISTROS MULTIFUNCIONAIS;</b></p> <p>Os tratamentos não são algoritmizáveis.</p>	<p>Língua natural</p> <p>Associações verbais (conceituais).</p> <p>Forma de raciocinar:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Argumentação a partir de observações, de crenças ...;</li> <li>• Dedução válida a partir de definição ou de teoremas</li> </ul>	<p>Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3).</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Apreensão operatória e não somente perceptiva;</li> <li>• Construção com instrumentos</li> </ul>
<p><b>REGISTROS MONOFUNCIONAIS:</b></p> <p>Os tratamentos são principalmente algoritmos.</p>	<p>Sistemas de escritas:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Numéricas (binária, decimal, fracionária...);</li> <li>• Algébricas;</li> <li>• Simbólicas (línguas formais).</li> <li>• Cálculo</li> </ul>	<p>Gráficos cartesianos.</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• Mudanças de sistema de coordenadas;</li> <li>• Interpolação, extrapolação.</li> </ul>

Fonte: Duval (2003)

Cada tipo de registro discriminado no quadro 1 requer custos cognitivos diferentes, podendo um registro, de acordo com as suas características, permitir serem efetuadas transformações mais econômicas e eficientes do que outro registro. Sendo que os registros discursivos permitem o desenvolvimento linear do pensamento, fundamentado na sucessão, para produzir, apreender ou organizar expressões, como na língua natural, que se constitui o primeiro registro de representação semiótica para o funcionamento do pensamento. Os monofuncionais são específicos da matemática e os multifuncionais são utilizados para as funções de: comunicação, objetivação (definição de algo para si) e raramente como tratamento (para transformação dos dados).

Os registros de representação mudam de acordo com os elementos considerados e o sistema utilizado para produzir uma representação, enquanto que, com o objeto

representado, sua maior característica é a invariância (DUVAL 2011). Sendo assim, é necessário para a plena compreensão do conhecimento, distinguir o objeto representado dos seus registros de representação. Para isso, o indivíduo deve dispor de ao menos dois sistemas semióticos diferentes para produzir esse registro e converter naturalmente de um sistema semiótico a outro, mesmo sem se dar conta dos registros produzidos (DUVAL, 2009).

Para transformações de registros semióticos, Duval (2011) distingue dois tipos de transformações de representações semióticas. Quando elas ocorrem no interior de um registro são chamadas, de ‘tratamentos’. Aquelas que mudam de registro de representação, conservando o mesmo objeto analisado são chamadas conversões.

#### **4. Metodologia**

Para identificar os itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011 que envolvem o conceito dos números racionais nos seus diferentes significados, adotamos como categoria preliminar a seguinte classificação: medida (parte-todo), quociente, razão, operador multiplicativo, número na reta numérica, probabilidade e porcentagem.

A análise dos itens identificados no ENEM 2011 quanto aos registros de representações (dos números racionais ou não) contidos ou envolvidos na resolução do item, os tratamentos e as conversões mobilizadas durante essa resolução, seguiu um roteiro conforme discriminado abaixo:

- 1)Estratégia base de resolução, incluindo tratamentos e conversões (quando houver);
- 2)Outra(s) estratégia(s) de resolução (quando for pertinente);
- 3)Análise do suporte (quando houver);
- 4)Estrutura do item, quanto aos registros de representações envolvidos;
- 5)Alguns comentários referentes às habilidades necessárias à resolução do item e outros conceitos exigidos (quando for pertinente);

A análise dos registros de representações semióticas dos números racionais foi realizada, a priori, com base na classificação proposta por Duval (2003), sendo categorizados os seguintes registros: registro numérico fracionário (RNF), registro numérico decimal (RND), registro numérico percentual (RNP), registro numérico potência de dez (RNPD), registro algébrico (RA) e registro figural (RF).

A análise dos outros registros de representações semióticas contidos no item, ou que poderiam ser mobilizados durante a resolução do mesmo, também teve como base a classificação proposta pelo autor citado acima, dos registros de representações semióticas. Partindo dessa análise, categorizamos os outros registros de representações presentes ou mobilizados nos itens, conforme a seguinte classificação: registro na língua materna, registro numérico inteiro, registro em diagrama, registro de tabela, registro gráfico, registro figural, registro de quadro.

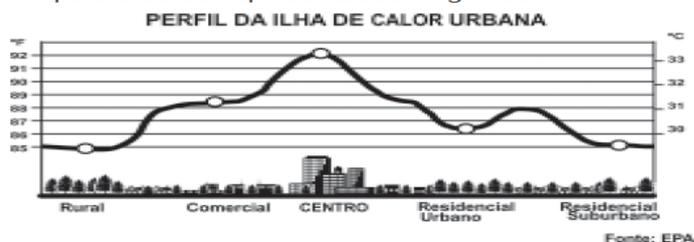
Os tratamentos foram analisados de acordo com a estratégia de resolução (canônica) que poderia ser mobilizada no item e as conversões foram classificadas conforme o sistema semiótico que o registro se encontrava inicialmente (registro de partida) e para o qual ele foi transformado (registro de chegada)

## 5. Exemplos da análise de alguns itens do ENEM 2011

Exemplificando a nossa análise descreveremos dois itens dos dez identificados.

ITEM 01/2011

Rafael mora no Centro de uma cidade e decidiu se mudar, por recomendações médicas, para uma das regiões: Rural, Comercial, Residencial Urbano ou Residencial Suburbano. A principal recomendação médica foi com as temperaturas das “ilhas de calor” da região, que deveriam ser inferiores a 31°C. Tais temperaturas são apresentadas no gráfico:



Escolhendo, aleatoriamente, uma das outras regiões para morar, a probabilidade de ele escolher uma região que seja adequada às recomendações médicas é

- A  $\frac{1}{5}$
- B  $\frac{1}{4}$
- C  $\frac{2}{5}$
- D  $\frac{3}{5}$
- E  $\frac{3}{4}$

Figura 1 - item 159 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011.

Fonte: BRASIL (2011), p.26.

1)Estratégia base de resolução:

	Ação	Transformação
1	Estabelecer a razão, em que o numerador é o número de regiões que apresentam um “pico inferior a 31°C” (3), e o denominador, é o número de “outras regiões para morar” (4).	Conversão do registro da língua materna para o numérico fracionário.

## 2) Análise do suporte:

O suporte requer a compreensão de que o eixo vertical compreende as temperaturas na unidade Celsius ( $^{\circ}\text{C}$ ) situadas no lado direito do gráfico e Fahrenheit ( $^{\circ}\text{F}$ ), no lado esquerdo. No eixo horizontal encontram-se as regiões, incluindo a que Rafael mora. Como o enunciado refere-se às temperaturas em “ $^{\circ}\text{C}$ ”, a relação a ser estabelecida será entre as temperaturas do eixo localizado no lado direito e suas respectivas regiões, com exceção do “centro”, pois é a região que Rafael mora.

## 3) Estrutura do item:

Ideia envolvida	Probabilidade
Registro do enunciado	Língua materna e numérico inteiro
Registro do suporte	Gráfico
Registro do comando	Língua materna
Registro das alternativas de resposta	Numérico fracionário

## 4) Alguns comentários:

Uma leitura direta do gráfico (que apresenta cinco regiões) poderá induzir ao sujeito incluir na quantidade de regiões que representa o denominador da fração, o centro. Além disso, o contexto não representa a realidade, pois ninguém escolhe o lugar em que vai morar de forma aleatória.

## Item 2/2011

Uma pessoa aplicou certa quantia em ações. No primeiro mês, ela perdeu 30% do total do investimento e, no segundo mês, recuperou 20% do que havia perdido. Depois desses dois meses, resolveu tirar o montante de R\$ 3 800,00 gerado pela aplicação.

A quantia inicial que essa pessoa aplicou em ações corresponde ao valor de

- A R\$ 4 222,22.
- B R\$ 4 523,80.
- C R\$ 5 000,00.
- D R\$ 13 300,00.
- E R\$ 17 100,00.

Figura 2 - questão 162 da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011.

Fonte: BRASIL (2011), p. 26.

1) Estratégia base de resolução:

	Ação	Transformação
1	Estabelecer a equação $(x - 30\% x + 20\% x + 30\% x = 3800,00)$ .	Conversão do registro na língua materna para o registro algébrico.
2	Resolução da equação (5000,00)	Tratamento no registro algébrico.

2) Estrutura do item:

Ideia envolvida	Porcentagem
Registro do enunciado	Língua materna, numérico percentual e numérico decimal
Registro do suporte	Não há suporte
Registro do comando	Língua materna
Registro das alternativas de resposta	Numérico decimal

3) Alguns comentários:

A resolução da equação requer o cálculo da quantidade inicial ( $x$ ), referente à quantia aplicada. Entretanto a segunda parcela da equação ( $20\% \cdot 30\% x$ ) refere-se ao cálculo da porcentagem ou quantidade de transformação, em que a quantidade inicial passa a ser  $30\% x$ . Portanto, a resolução do item requer que o sujeito considere duas quantidades iniciais ou de referência,  $x$  e  $30\% x$ , o que pode levar a um custo cognitivo maior, e consequentemente a uma diminuição na quantidade de acertos do item.

## 6. Resultados da análise dos itens do ENEM 2011

A prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011 constou de 45 itens dos quais encontramos dez itens (22%) que envolviam algum tipo de significado e representações semióticas dos números racionais, mesmo quando estes não eram o objeto matemático a ser abordado no item, sendo eles: 143, 145, 157, 159, 162, 164, 165, 166, 171 e 172<sup>1</sup>.

Dentre esses itens, foram os seguintes significados abordados: parte-todo, razão, porcentagem, e probabilidade, com uma uniformidade dos três últimos, de acordo com o gráfico 1.

<sup>1</sup> Itens referentes à prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011, cad.5.

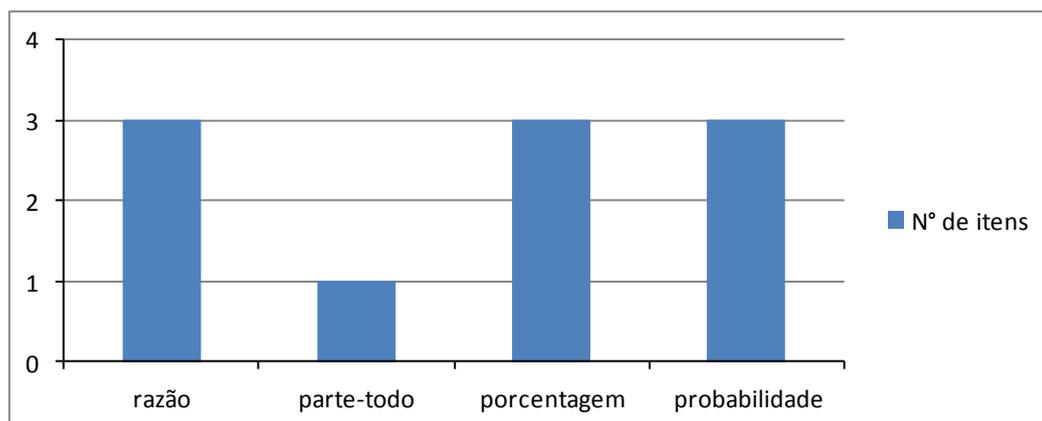


Gráfico 1 - Significados dos números racionais abordados nos itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011.

O quadro 2 apresenta os registros dos números racionais existentes na estrutura de cada item e os mobilizados durante a resolução desses, sendo o registro numérico percentual (RNP), aquele que obteve um maior percentual (50%) de ocorrência na estrutura dos itens (enunciado, suporte, comando, e alternativas de respostas). Entre aqueles que mais pôde ser mobilizado (90%) durante a resolução está o registro numérico fracionário (RNF).

Quadro 2 - Registros<sup>2</sup> dos números racionais existentes e mobilizados nos itens do ENEM 2011.

Nº Item	Ideia envolvida	Registros existentes na estrutura do item	Registros que podem ser mobilizados
143	Razão	RNR	RNF, RNR
145	Parte-todo	RNF	RNF, RND
157	Porcentagem	RND, RNP	RNP, RNF, RND,
159	Probabilidade	RNF	RNF
162	Porcentagem	RNP, RND	RA
164	Razão	RND	RNF, RND
165	Probabilidade	RND, RNP	RNP, RND
166	Probabilidade	RNP	RNF, RNP, RND,
171	Razão	-	RA, RNF
172	Porcentagem	RNP	RNP, RNF, RND,

As conversões que tiveram como registro de partida a língua materna e como registro de chegada, um dos registros dos números racionais, estão listadas no quadro 3.

<sup>2</sup>Utilizamos as seguintes abreviações para os registros: RNR- registro numérico razão; RNF – registro numérico fracionário; RND- registro numérico decimal; RNP - registro numérico percentual; RA – registro algébrico; RLM- registro da língua materna; RF- registro figural; RNI- registro numérico inteiro; RD- registro em diagrama.

Pudemos perceber que podem ser mobilizados os registros, numérico fracionário (RNF), numérico decimal (RND), numérico percentual (RNP) e o algébrico (RA).

Quadro 3 - Conversões entre o registro da língua materna e os registros dos números racionais do ENEM 2011.

Item	Registro de Chegada
143	RNF
145	RNF RND
157	RNP RND
159	RNF
162	RA
164	RNF
165	RNP
166	RNF
171	RNF
172	RNP

As conversões entre os registros dos números racionais ocorreram apenas num sentido, como se pode observar no quadro 4:

Quadro 4 - Conversões entre os registros dos números racionais do ENEM 2011.

Item	Registro de Partida	Registro de chegada
145	RNF	RND
157	RNP RNF ou RNP	RNF RND
164	RNF	RND
165	RNP	RND
166	RNF Ou RNF RND	RNP RND RNP
172	RNP RNF Ou RNP	RNF RND RND

Nas conversões listadas no quadro 4 pudemos constatar que as mais frequentes têm como registro de partida o registro numérico percentual ou o registro numérico fracionário.

E finalmente, apresentamos o quadro 5 com as conversões ocorridas durante a resolução dos itens que envolveram outros tipos de registros.

Quadro 5 - Conversões entre outros tipos de registros do ENEM 2011.

Item	Registro de Partida	Registro de chegada
135	RLM	RD
	RD	RA
166	RLM	RD
	RD	RA
171	RLM	RD
	RD	RA
	RLM	RNI
172	RLM	RD
	RD	RA

Todos os itens do quadro 5 abordam o significado porcentagem, que pode, dependendo da estratégia adotada pelo sujeito, mobilizar a conversão do registro da língua materna para o registro em diagrama, e desse para o registro algébrico.

## 7. Conclusões

Na análise dos itens da prova de matemática e suas tecnologias do ENEM 2011 pudemos verificar que 22% desses itens envolvem o conceito de números racionais nos significados: parte-todo, razão, probabilidade e porcentagem; com uma uniformidade nos três últimos significados. Dentre os itens identificados, dois necessitaram também da compreensão de conceitos ligados à matemática financeira, e um item do conceito de densidade demográfica.

Não identificamos nenhum item que mobilizasse os significados quociente, operador multiplicativo e número na reta numérica, mesmo a reta numérica tendo sido considerada entre os conteúdos algébricos/geométricos e a divisibilidade, entre os conteúdos numéricos, dos objetos de conhecimento da matriz de referência para matemática e suas tecnologias do novo ENEM.

Entre os itens analisados, dois apresentaram um suporte do tipo texto; dois itens, gráfico de colunas; um item apresentou um quadro, um item, gráfico de curva; e um item apresentou uma tabela. Esses exigiram a sua leitura e interpretação, para que os dados fossem identificados. Nenhum necessitou receber tratamento para que os dados fossem reconhecidos.

Acreditamos que o predomínio de itens que envolvam os significados razão, probabilidade e porcentagem deva-se ao fato do ENEM priorizar situações que envolvam contextos econômicos e sociais, ou seja, relacionados à cidadania, nos quais esses significados podem se fazer mais frequentes.

O registro numérico percentual foi o mais frequente entre os registros existentes na estrutura dos itens e o numérico fracionário o que mais pôde ser mobilizado durante as resoluções.

Para concluir, sabemos da limitação da nossa pesquisa, entretanto esperamos estar contribuindo com a discussão sobre a abordagem dos números racionais nas avaliações de larga escala.

## 8. Referências bibliográficas

BRASIL, Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (1ª a 4ª series):** Matemática. Brasília, MEC/SEF, 1997.

\_\_\_\_\_, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio:** ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Vol.2. Brasília, 2008.

\_\_\_\_\_, Ministério da Educação. Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira. **Exame Nacional do Ensino Médio:** Prova de Redação e de Linguagens, códigos e suas Tecnologias e Prova de Matemática e suas Tecnologias. Brasília, DF, cad. 5, 2011. <<http://www.portal.inep.gov.br/web/enem/edicões-anteriores>>. Acessado em: 22/05/2012.

BEHR, M. J.; LESH, R.; POST, T. R. ; SILVER, E. A. **Rational number concepts.**In: LESH, R. & LANDAU, M. (Eds). Acquisition of mathematics concepts and processes. New York : Academic Press : Nova York, 1983, p. 91-126.

CATTO, G. G. **Registros de representação e o número racional** – Uma abordagem nos livros didáticos. São Paulo, 2000. 152p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2000.

DAMICO, A. **Uma investigação sobre a formação inicial de professores de matemática para o ensino de números racionais no ensino fundamental.** São Paulo, 2007. 313p. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2007.

DUVAL, R. Registros de representação e números racionais. In: MACHADO, S.D.A.(org.). **Aprendizagem em matemática:** Registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003. p.11-33.

\_\_\_\_\_. **Semiósis e Pensamento Humano:** Registros semióticos e aprendizagens intelectuais. Coleção Contextos da Ciência. Fasc. I. 1ª ed. São Paulo: editora Livraria da Física, 2009.

\_\_\_\_\_. **Ver e ensinar a matemática de outra forma:** Entrar no modo matemático de pensar: os registros de representações semióticas. 1ª ed. São Paulo: PROEM, 2011.

MERLINI, V. L. **O conceito de fração em seus diferentes significados:** um estudo diagnóstico com alunos de 5ª e 6ª séries do Ensino Fundamental. São Paulo, 2005. 215p. Dissertação (mestrado em Educação matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005

MOUTINHO, L. V. **Fração e seus diferentes significados:** um estudo com alunos das 4ª e 8ª séries do ensino fundamental. São Paulo, 2005. 193p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

NUNES, M. F.; SILVA, F. A. F. **Os significados do conceito de fração: um estudo diagnóstico com alunos do 8º ano do ensino fundamental.** Monografia de especialização em Educação Matemática- Universidade Estadual de Alagoas. Arapiraca, 2009

RODRIGUES, W. R. **Números racionais:** Um estudo das concepções de alunos após o estudo formal. São Paulo, 2005. 246p. Dissertação (Mestrado em Educação matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

ROMANATTO, M. C. **Número Racional:** Relações necessárias à sua compreensão. Campinas, 1997. 158p. Tese (Doutorado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, 1997.

SANTOS, A. **O conceito de fração em seus diferentes significados:** um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental. São Paulo, 2005. 196p. Dissertação (Mestrado em Educação matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

SILVA, M. C. **Reta graduada:** Um registro de representação dos números racionais. São Paulo, 2008. 121p. Dissertação (Mestrado profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2008.

TEIXEIRA, A. M. **O professor, o ensino de fração e o livro didático:** um estudo investigativo. São Paulo, 2008. 194p. Dissertação (mestrado Profissional em Educação matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2008..