

MODELAGEM MATEMÁTICA E EXPERIMENTAÇÃO EM CÁLCULO

*Roberta Modesto Braga
Universidade Federal do Pará
robertabraga@ufpa.br*

*Adilson Oliveira do Espírito Santo
Universidade Federal do Pará
Adilson@ufpa.br*

Resumo:

Este artigo apresenta um relato de experiência realizada junto a Universidade do Estado do Pará com alunos do curso de Licenciatura Plena em Matemática, com o objetivo de articular a Modelagem Matemática e Experimentação para a construção de conhecimentos matemáticos na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. A partir de uma abordagem qualitativa, coletamos dados/informações do grupo de alunos quando envolvidos no processo de Modelagem Matemática em contexto de experimentação referente ao tema densidade, escolhido pelos mesmos. O ambiente gerado pela Modelagem Matemática e experimentação favoreceu aprendizado matemático na medida em que os alunos conseguiram modelar um fenômeno através do Cálculo, nos termos de interação, matematização e validação do modelo encontrado.

Palavras-chave: Modelagem Matemática; Experimentação; Cálculo

1. Introdução

Ao planejar aulas de Cálculo, a preocupação primeira deve-se voltar a como torná-lo relevante para os alunos em formação inicial. Esse ponto de partida nos leva a acreditar que situações motivadoras e de interesses dos alunos podem suscitar aprendizagem de qualidade. No entanto o que encontramos pelos corredores das universidades são alunos descontentes com a forma como esta disciplina é abordada.

Tal fato nos permite constatar que apesar do Cálculo ser considerado uma ferramenta matemática fundamental para resolução de problemas da vida real, em várias áreas de pesquisa, este não contempla compreensão conceitual e aplicabilidade do mesmo na prática educativa do ensino do Cálculo nos cursos de Licenciatura Plena em matemática.

Na tentativa de mudar essa dinâmica de ensinar Cálculo Diferencial e Integral pelo paradigma do exercício, é que nos propusemos a articular a Modelagem Matemática e Experimentação para a construção de conhecimentos matemáticos, partindo de situações de interesse dos alunos.

2. Modelagem Matemática

A Modelagem Matemática quando aplicada no ensino superior:

pode ser usada como um processo para a resolução dos mais variados problemas relacionados com a Matemática Aplicada, podendo ser utilizada como um método científico, como um programa de iniciação científica ou como uma estratégia de ensino-aprendizagem” (BASSANEZI, 1994, p. 68 apud JACOBINI; WODEWOTZKI, 2001, p.55).

Advinda da Matemática Aplicada, a Modelagem Matemática no ensino superior se assemelha ao método científico e iniciação científica ao mesmo tempo em que se apresenta como estratégia de ensino. Em qualquer dos casos, se propõe a criação de modelos matemáticos para melhor compreender a realidade matemática das coisas. Neste processo a que se privilegia, ora a interação, ora a matematização ou mesmo a validação do modelo dependendo do objetivo que se queira alcançar no processo.

Este processo é identificado por etapas de acordo com Biembengut e Hein (2000) que podem ser contempladas em ambiente de experimentação, são elas:

Interação: fase de reconhecimento, dos primeiros contatos com o problema ou tema a ser modelado, buscando familiarizar-se a respeito e coletar dados que possam ajudar na investigação;

Matematização: etapa em que são levantadas hipóteses explicativas, com base nos conhecimentos prévios para as questões suscitadas. É quando se faz uso das ferramentas matemáticas para atingir o modelo com que se pretende representar a situação de estudo;

Modelo: fase em que se testa a validade do modelo construído, devendo-se, no caso de sua não-adequação retornar à etapa anterior do processo.

As etapas sugeridas pelos autores revelam um processo de maior envolvimento dos alunos quando estes podem escolher os temas de investigação, como enfatizam Caldeira e

Meyer (2001), quando colocam que a escolha dos temas deve partir dos alunos, das suas preocupações, e ainda suas curiosidades, pois os alunos têm saberes efetivos sobre seus cotidianos.

3. Experimentação e Modelagem Matemática

Grandes matemáticos como Arquimedes, Newton, precursores do Cálculo buscaram na experimentação a consolidação de seus argumentos, pois para estes o modo de fazer ciência se deu pela “intensa relação entre a matemática e a experimentação”, (GIANFALDONI, 2001, p.238) na busca por fórmulas precisas dos fenômenos, ao que se assemelha ao processo de Modelagem Matemática.

Ou seja, a própria concepção do Cálculo advém de problemas da realidade de sua época, o que reforça a ideia de que os grandes matemáticos foram formalizando conceitos matemáticos a partir de experimentações, demonstrações, modelagens de questões do dia-a-dia que instigavam e/ou despertavam curiosidades dos mesmos.

Então, é válido expressar aqui o fundamental papel que a experimentação favorece à conceitualização ou validação dos conceitos matemáticos, inclusive das criações de símbolos.

De acordo com o Dicionário Silveira Bueno, experimento corresponde à “s.m. Experimentação; ensaio científico para a verificação de um fenômeno físico; experiência” (BUENO, 1999, p.393), enquanto que experiência corresponde à “s. f. Prática da vida; usos; ensaio; prova; tentativa” (BUENO, 1999, p. 393).

Neste contexto, o ato de experimentar é bastante favorável no processo de Modelagem Matemática que, em geral, têm origem em outras áreas, como a Física, Química, Biologia e, “como tais, caracterizam-se por uma natureza acadêmica, porém experimental”. (SANT’ANA, 2007, p.149)

Experimentos em cursos superiores revelam todo o processo de Modelagem Matemática, indo do levantamento do problema até a validação do modelo, especialmente a validação do modelo, exercício por excelência dos cientistas, independente de ser Modelagem, mas que nesse caso específico pode revelar a Modelagem como método científico, iniciação científica e estratégia de ensino.

4. Metodologia

Em geral, uma experiência necessita de materiais experimentais, procedimentos sobre as medidas e atitudes a serem tomadas pelo experimentador, relatório dos dados descritos em detalhes de toda a experiência e análise dos dados obtidos na experiência, para formulação das conclusões.

Tais “passos” foram adequados ao processo de Modelagem Matemática por um grupo de alunos do curso de Licenciatura Plena em Matemática em 2008, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral II, da Universidade do Estado do Pará, onde estes foram convidados a escolher um tema para investigação, neste caso densidade.

Durante a investigação realizamos observação do grupo no laboratório Bioquímica em relação a experimentação, materiais utilizados pelos alunos, discussões, resultados e relatório apresentado pelos mesmos. Nestes termos apresentamos a experiência relatada aqui, apresentando os resultados da articulação Modelagem Matemática e Experimentação.

5. Possibilidades de trabalho com Modelagem Matemática e Experimentação

Interessados inicialmente em trabalhar com a densidade da água, o grupo composto por 9 alunos não tinha clareza do que pretendiam. A partir de algumas pesquisas, foi direcionando suas ideias ao princípio de Arquimedes: “Todo corpo mergulhado em um líquido recebe um empuxo vertical, para cima, igual ao peso do líquido deslocado pelo corpo”, traçando assim o objetivo do grupo.

O objetivo do grupo era mostrar que a densidade da água pode variar de acordo com as quantidades de sal acrescentada à mesma. Para isso, realizou o experimento da densidade, ou massa específica, da água com um ovo de acordo com o princípio de Arquimedes em hidrostática.

Os materiais utilizados foram: sal comum, ovo cru, 300 ml de água pura, dois Becker, uma vara de vidro, balança, um copo, um medidor, régua. O grupo não dispunha de um densímetro¹, e por este motivo realizou os seguintes procedimentos para o experimento:

¹ Aparato para medir densidade de líquidos.

Inicialmente, pesaram o Becker e colocaram água pura até atingir 300ml. Em seguida mediram a altura da água no Becker com a régua, pesaram o ovo e o colocaram no Becker com água pura. Mediram a nova altura da água. Após essa sequência de ações, calcularam o volume do ovo utilizando um copo com água até seu limite máximo. Colocaram o ovo dentro, a água transbordada (aparada) foi despejada no medidor, correspondendo ao volume do ovo.

Considerando que $d = \frac{m}{v}$, calcularam a densidade do ovo. Recolocaram o ovo no Becker e adicionaram sal em quantidades iguais, alternando as dosagens. Podemos perceber o procedimento do experimento na Fotografia 1.



Fotografia 1 – Procedimentos do experimento.

No momento inicial, pesaram o Becker, e obtiveram o seu peso igual a 105g. Com os 300ml, o Becker passou a pesar 411g, com uma altura de 7cm. Realizaram o processo enchendo o copo com água até a borda e colocaram-no dentro de um recipiente maior e colocaram o ovo, assim encontraram o volume da água que transbordou correspondente ao volume do ovo, encontrando $v_o = 55\text{ml}$. Medindo a massa do ovo, verificaram que era de 56g, podendo assim calcular o peso do ovo e sua densidade:

$$P = m \cdot g \rightarrow P = 56 \times 10 \rightarrow P = 560\text{N} \quad e$$

$$d_o = \frac{m_o}{v_o} \rightarrow d_o = \frac{56}{55} = 1,018181818\text{g} / \text{cm}^3$$

Em um segundo momento, os alunos colocaram o ovo na água e mediram a altura da água, que variou de 7cm para 7,2cm, para um volume de líquido deslocado igual a

55ml. Passaram, então, para o cálculo do empuxo, que neste momento ficou menor que a força peso do ovo:

Empuxo = (d_a) densidade do líquido deslocado x (v_a) volume da água x gravidade.

É sabido que a densidade da água pura corresponde a $1g/cm^3$, portanto ao calcular o valor da força Empuxo, o grupo não utilizou as medidas de acordo com o sistema internacional de unidades, pois determinaram que o valor do empuxo era:

$E = d_a \cdot v_a \cdot g = 1 g/cm^3 \cdot 55ml \cdot 10 m/s^2 = 550N$ (erro de unidade), ou seja, o grupo não atentou para as questões de unidades de cada grandeza, quando na verdade $1g/cm^3 = 10^3 Kg/m^3$ e $55ml = 55cm^3 = 55 \cdot 10^{-6} m^3$, então teríamos que o empuxo corresponde a :

$$E = 10^3 Kg/m^3 \cdot 55 \cdot 10^{-6} m^3 \cdot 10 m/s^2 = 55 \cdot 10^{-2} N = 0,55 N$$

Nesse momento, perceberam que o fato de determinar o valor do Empuxo não interferiria na relação da variação da densidade da solução com a variação da quantidade de sal. Ou seja, os alunos anotaram todas as possíveis relações adquiridas na experiência, mas, no entanto nem todas as variáveis do processo foram utilizadas. A partir deste momento, tomaram nota apenas dos dados que acreditavam ser necessários para construir o modelo matemático que traduzisse as relações de variação da densidade da solução quando variasse a quantidade de sal acrescentada à mesma.

No terceiro momento, acrescentaram 16g de sal na água e pesaram o recipiente (428g). Observaram que ao mexer e deixar a solução homogênea, o ovo não subiu, porém alterou a densidade, o volume e a massa da solução, passando a ser respectivamente de: $1,041935484g/cm^3$, 310ml e 323g.

$$m_1 = 428 - 105 = 323$$

$$d_1 = \frac{323}{310} = 1,041935484 g/cm^3$$

A primeira consideração: “*Densidade da água > densidade do ovo, porém esta diferença não foi necessária para que o ovo se elevasse*” (registro relatório).

Dessa consideração, os alunos acrescentaram mais 16g de sal, totalizando 32g pesando novamente o recipiente (443g). Verificaram que houve um deslocamento de

0,5cm da altura do ovo e novamente a densidade, o volume e a massa da água aumentaram, chegando a $1,05625\text{g/cm}^3$, 320ml e 338g, respectivamente.

$$m_2 = 443 - 105 = 338\text{g} \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{338}{320} = 1,05625\text{g/cm}^3$$

A segunda consideração do grupo: “*Densidade da água > densidade do ovo, neste momento o ovo elevou-se 0,5cm*”.

No momento seguinte, os alunos acrescentaram mais 16g de sal, totalizando 48g na solução. Verificaram que o volume do líquido deslocado pelo ovo e pelo sal foi de 85ml; a densidade, o volume da água e a sua massa (sem o ovo) passou a ser respectivamente: $1,06969697\text{g/cm}^3$, 330ml e 353g.

$$m_3 = 458 - 105 = 353\text{g} \quad \text{e} \quad d_3 = \frac{353}{330} = 1,06969697\text{g/cm}^3$$

A terceira consideração do grupo: “*Verificamos que a densidade da água foi aumentando proporcionalmente à quantidade de sal acrescentada na água, chegando a um dado momento em que a densidade da água ficou maior que a densidade do ovo, fazendo com que ele suba. Considerando a ação do empuxo, percebemos que este também ficou maior que o peso do ovo, ajudando na elevação deste*”.

Determinando o modelo $\frac{d_x}{d_s} = kdX$, onde d_x corresponde à densidade da solução

em g/cm^3 e d_s corresponde à quantidade de sal em gramas.

Assim $\frac{dA}{A} = kds$, reorganizando

$$\ln | X | = ks \rightarrow \ln(X) = ks + C \rightarrow X = e^{ks+C} \rightarrow X = w.e^{ks}$$

Em condições iniciais, quando $s = 0$, $X = 1\text{g/cm}^3$, fica $1 = W.e^{k.0}$, portanto $W = 1$, resultando que $A = e^{k.s}$. Ou seja, a densidade da solução $d_x(X)$ varia com a quantidade de sal d_s .

A partir dos resultados obtidos, os alunos adotaram um k constante médio, que se expressasse adequadamente para o modelo e validação com os dados do experimento e chegaram ao modelo:

$$A = e^{0,001403365224.s} \quad (1)$$

A função (1) encontrada pelo grupo de alunos reflete o que aconteceu em ambiente de experimentação como uma aproximação da realidade. E comparando este modelo exponencial encontrado com os dados do experimento, os alunos o consideraram satisfatório.

Uma observação importante é que apesar de ocorrer outras variáveis, como exemplo o tempo, no sistema, os alunos adequaram a equação à variação da densidade da água em função da variação da quantidade de sal, contemplando a finalidade do trabalho acadêmico em aplicar os conceitos matemáticos de equações diferenciais ordinárias para o processo de Modelagem Matemática, atingindo o objetivo proposto pelo grupo no início do experimento.

6. Considerações

O ambiente de Experimentação adequado ao processo de Modelagem Matemática permitiu a visualização concreta dos processos para elaboração de problemas, bem coloca uma das alunas, quando diz:

Achei muito gratificante, pois consegui visualizar melhor o que só era visto na escrita, ou seja, no caderno, o que para mim, ficou mais fácil o aprendizado de certas variações, como volume, tempo [...] (informação verbal)

Alunos do curso de Matemática, ainda têm uma ânsia pelo concreto, pela visualização, pois existem procedimentos que precisam ser demonstrados na prática para que o aprendizado ganhe significado real e neste caso a escolha do tema permitiu interação do grupo. Assim

com a modelagem o processo de ensino-aprendizagem não mais se dá no sentido único do professor para o aluno, mas como resultado da interação do aluno com seu ambiente natural. (BASSANEZI, 2004, p.38)

Outro ponto relevante diz respeito à dedicação dos alunos, que foi bem enfática na realização dos experimentos. Quanto à responsabilidade do próprio aprendizado, sentiram a necessidade de dedicar mais tempo para os estudos, permanecendo na universidade

(laboratórios, biblioteca) em turnos extras aos horários de aula, demonstrando o interesse e comportamento ativo e participativo na busca e na interação com o conhecimento.

Diante da experiência relatada, acreditamos que ao articular Modelagem Matemática e Experimentação, a construção dos conhecimentos envolvidos no processo se deu qualitativamente quando os alunos foram convidados a investigar, interagir, modelar motivados por situações de seus interesses. Assim, o ambiente gerado pela Modelagem Matemática e experimentação favoreceu aprendizado matemático na medida em que os alunos conseguiram modelar um fenômeno fazendo uso das ferramentas do Cálculo, nos termos de interação, matematização e validação do modelo encontrado de acordo com a experiência vivenciada.

7. Referências

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Modelagem matemática**. Dynamis, Blumenau, v.1, n.7, p. 55-83, abr./jun. 1994.

_____. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2004.

BIEMBENGUT, Maria Salete; HEIN, N. **Modelagem matemática no ensino**. São Paulo: Contexto, 2000.

BUENO, Silveira. **Dicionário Silveira Bueno**. São Paulo: Didática Paulista, 1999.

CALDEIRA, Ademir D.; MEYER, João F. da C. A.. **Educação Matemática e Ambiental: Uma Proposta de Formação Continuada – e de Mudanças**. Zetetiké, v.9, n. 15/16, p.155-170, jan./dez. 2001.

GIANFALDONI, Mônica Helena Tieppo Alves. O universo é infinito e seu movimento é mecânico e universal: Isaac Newton (1642-1727). In: ANDERY, Maria Amália e outros(org.). **Para compreender a ciência: uma perspectiva histórica**. 10ªed. Rio de Janeiro: Espaço e Tempo; São Paulo: EDUC, 2001. p. 237-253.

SANT'ANA, Marilaine de Fraga. Modelagem de experimento e ensino de cálculo. In: BARBOSA, Jonei Cerqueira (Org.). **Modelagem matemática na educação matemática brasileira: pesquisas e práticas educacionais**. Recife: SBEM, 2007, p. 149-174.