RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS: COMBINATÓRIA EM GEOMETRIA

Heitor Achilles Dutra da Rosa
Instituto Federal do Rio de Janeiro - IFRJ
heitor_achilles@yahoo.com.br

Resumo:
Existem várias questões geométricas que podem ser resolvidas por métodos combinatórios, mas o caso oposto (talvez menos frequente) também existe. É possível resolver exercícios e problemas combinatórios usando ferramentas geométricas. O objetivo deste minicurso é discutir a possibilidade de conexão entre combinatória e geometria via resolução de problemas.

Palavras-chave: Resolução de problemas; Combinatória; Geometria.

1. Introdução

O saber matemático pode ser caracterizado por aspectos objetivos tais como conceitos, propriedades e definições. Mas a subjetividade também constitui uma via de elaboração do conhecimento. Segundo Pais (2006) "a aprendizagem de conceitos requer um fluxo constante de retificações produzidas na dimensão subjetiva". Sendo assim, a construção da objetividade ocorre por meio de experiências subjetivas e dessa forma não há como isolar esses dois aspectos.

Ao resolver um problema o indivíduo estabelece vínculos entre a subjetividade e objetividade. O trabalho dos cientistas, por exemplo, ocorre de acordo com essa perspectiva. Para resolver seus problemas precisam "lançar mão" de conceitos, modelos, definições, algoritmos e teoremas. Assim, ao estabelecer entre esses elementos relações e ou articulações, potencialmente qualitativas, pode surgir um leque de possibilidades de soluções criativas e como consequência a expansão do significado do saber.

Valer destacar que o trabalho com a resolução de problemas permite o desenvolvimento intelectual do estudante, no que diz respeito ao saber matemático e também propicia interligar não só a Matemática com outras áreas do conhecimento, mas estabelecer conexões entre áreas dentro da própria Matemática.

2. Combinatória em geometria

As técnicas de contagem usualmente realizadas no cotidiano restringem-se, normalmente à contagem direta, isto é, à exibição explícita dos objetos envolvidos e seu registro um a um. Essa técnica torna-se insuficiente quando se trata de situações em que o número de objetos é muito grande ou não se dispõe de uma maneira conveniente de listá-los. Para lidar com estas situações, é necessário dispor-se de bons métodos de contagem. Nesse contexto o objeto de estudo corresponde à resolução de situações em que a contagem se reduz em saber de quantas maneiras um determinado grupo de objetos pode ser escolhido, sem e com restrições em relação à ordem em que são selecionados.

Estes conceitos, propriamente formulados e verbalizados, permitem a transição imediata do pensamento cotidiano para o pensamento científico. Os resultados do estudo de Combinatória transcendem em muito o âmbito exclusivo da disciplina. Como os entes matemáticos utilizados são apenas números naturais e as operações elementares entre eles, os métodos de pensamento utilizados, que são de caráter geral e formativo, apresentam-se de maneira clara e despojada de complicações teóricas, conceituais ou notacionais. Isto propicia ao aluno o exercício de competências fundamentais como planejamento de estratégias de resolução de problemas, divisão de problemas em casos, análise envolvendo números pequenos levando à generalização e à crítica dos resultados obtidos. Os reflexos positivos deste exercício são imediatos no desempenho escolar global e na prática cotidiana.

Dessa forma, pensar sob um ponto de vista combinatório requer que os alunos explorem criativamente os aspectos estruturais de uma situação problema, com o desejo de reduzi-lo a cada caso mais simples ou a um problema previamente resolvido. Como resultado, muitas possibilidades de solução são analisadas sistematicamente, e um conhecimento útil é ganho a partir de certas tentativas corretas e incorretas.

A seguir são apresentados problemas cujos enunciados contam de alguma forma com o apelo geométrico. A ideia é aplicar os pressupostos discutidos acima relacionando-os às características e propriedades dos objetos geométricos presentes em cada enunciado a fim de solucionar os problemas.

2.1 Problemas elementares

Os problemas propostos a seguir têm como objetivo promover discussão em torno da construção de estratégias eficientes que conduzam a solução dos mesmos. Sendo assim pretende-se refletir sobre as estratégias mais econômicas e adaptadas a cada problema apresentado.

Vale lembrar que é de fundamental importância, em cada problema, discutir as características e propriedades geométricas que os objetos presentes em cada enunciado possuem. Isso se deve ao fato de que as propriedades podem servir como elementos facilitadores na hora da escolha de uma estratégia e ou técnica combinatória para resolução. As características e propriedades dos objetos geométricos em cada problema permitirão ainda, podem ajudar a caracterizar a escolha de uma técnica em detrimento de outra.

Problema 1

Dados n pontos distintos não alinhados, quantos seguimentos de reta podem ser obtidos a partir desses pontos?

Problema 2

Quantas diagonais possui um polígono regular de n lados?

Problema 3

Quantos paralelogramos são determinados por um conjunto de 6 retas paralelas interceptando um outro conjunto de 9 retas paralelas?

Problema 4

Quantos triângulos distintos podemos formar dispondo de 20 pontos num plano, 8 dos quais são colineares?

Problema 5

De quantas maneiras podemos gravar os números de 1 a 6 sobre as faces de um cubo, se:

A) Cada face do cubo é pintada de uma cor diferente?

B) As faces do cubo são indistinguíveis?

Problema 6

De quantos modos podemos pintar um cubo, usando 6 cores diferentes, sendo cada face de uma cor?

Problema 7

Sobre uma circunferência existem 6 pontos distintos. Quantos polígonos, não necessariamente convexos, podemos construir tendo por vértices esses 6 pontos?

Problema 8

Qual é o polígono regular que tem o mesmo número de lados e de diagonais?

2.2 Problemas avançados

De acordo com Polya (1995):

> Uma grande descoberta resolve um grande problema, mas há sempre uma pitada de descoberta na resolução de qualquer problema. O problema pode ser modesto, mas se ele desafiar a curiosidade e puser em jogo as faculdades inventivas, quem o resolver por seus próprios meios, experimentará a tensão e gozará o triunfo da descoberta.

A resolução dos problemas a seguir requer um maior grau de criatividade e maior capacidade de generalização de fatos. A ideia é propor estratégias de resolução que recorram ao apelo das propriedades geométricas que podem ser extraídas de cada enunciado, valorizando-as ao máximo, a fim de poder identificar padrões e regularidades que possa auxiliar processos indutivos e dedutivos de raciocínio.

Problema 1

Considere um polígono convexo com n vértices (Chamamos um polígono convexo, se todo ângulo dele é convexo, isto é, menor que 180°). Assuma que ele não tem três diagonais passando por um mesmo ponto. Quantos pontos de interseção tem as diagonais?

Observações:

Os vértices não são contados como interseções.

Não consideramos interseções de diagonais fora do n-ágono.

Problema 2

Vamos traçar n retas no plano. Essas retas dividem o plano em algum número de regiões. Quantas regiões obtemos?

Problema 3

Mostre que um conjunto de n retas em posição geral no plano divide o plano em

$$1 + n(n + 2)/2 \text{ regiões.}$$

Problema 4

Prove que se nos são dados cinco pontos no plano tal que nunca três deles estão sobre uma reta, então podemos sempre encontrar quatro pontos entre eles que formam os vértices de um quadrilátero convexo.

Problema 5

Desenhe 8 pontos no plano de tal maneira que nunca cinco deles formam um pentágono convexo.

Problema 6

Qual o número máximo de pontos do plano, posição geral, que não contém os vértices de um n-ágono convexo?

3. Considerações Finais

Já é consenso entre os educadores e matemáticos que, no ensino bem sucedido, os alunos precisam compreender aquilo que aprendem e que essa compreensão é garantida quando eles participam da construção das ideias matemáticas. Dessa forma, alcançar tais objetivos só é possível quando os próprios professores compreendem os conceitos matemáticos abstratos.

4. Referências

POLYA, G. *A arte de resolver problemas: um novo aspecto matemático*. Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

LIMA, E. L. ET AL. Temas e Problemas. Rio de Janeiro: SBM, 2003.

LOVÁSZ, L.; PÉLIKAN, J.; VESZTERGOMBI, K. Matemática discreta. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

PAIS, L. C. Ensinar e aprender matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2006.

SANTOS, J. P. O. et al Introdução à análise combinatória. São Paulo: Editora da UNICAMP, 2002.