

CONCEITO IMAGEM E CONCEITO DEFINIÇÃO NO ESTUDO DE LIMITES DE FUNÇÕES REAIS DE UMA VARIÁVEL

Heitor Achilles Dutra da Rosa
Instituto Federal do Rio de Janeiro - IFRJ
heitor_achilles@yahoo.com.br

Pedro George Batista da Costa
Instituto Federal do Rio de Janeiro - IFRJ
p.georgeifrj@ig.com.br

Resumo:

Estuda o processo de ensino e aprendizagem de limites de funções de uma variável real. Aborda reflexões sobre o desenvolvimento do pensamento matemático avançado numa perspectiva cognitiva. Enfatiza a importância de aplicar as noções de conceito imagem e conceito definição propostas por David Tall e Shlomo Vinner no processo de ensino e aprendizagem de limites de funções. Conclui a necessidade de se repensar as formas de ensino de limites de funções de uma variável real frente às noções de conceito imagem e conceito definição.

Palavras-chave: Pensamento matemático avançado. Conceito imagem e conceito definição. Limites de funções reais de uma variável.

1. Introdução

Atualmente, as grades curriculares dos cursos de graduação no Brasil, em diferentes áreas do conhecimento, contam com a presença do estudo do Cálculo Diferencial e Integral já nos primeiros períodos desses cursos. Apesar de sua importância reconhecida, são comuns alguns questionamentos, feitos por parte dos alunos e professores, em relação ao ensino de Cálculo. Tais questionamentos se referem, dentre outros, a sua utilidade, importância e forma de apresentação.

No que se refere ao estudo de limites de funções de uma variável real, o que se vê é a sua ocorrência logo nos primeiros cursos de Cálculo, oferecidos, por exemplo, aos cursos de graduação em Licenciatura em Matemática, Engenharias e áreas afins. Sua importância é destacada pelas possibilidades de aplicações, principalmente nos contextos da derivada e integral.

Embora o estudo de limites de funções apresente um referencial conceitual rico e importante, o que se vê, em muitos casos, é um tratamento burocrático, estéril e, desconectado a qualquer tipo ou possibilidade de aplicação. Em particular, pode-se afirmar que isso acontece na maior parte dos cursos de Licenciatura em Matemática, caracterizando um ensino vazio de significados, que prioriza uma série de algoritmos e regras que, por si só, são apenas mecanizadas.

Vale destacar que o ensino de Cálculo nas universidades brasileiras tem sido objeto de questionamento constante por grande parte da comunidade de educadores matemáticos. Isso ocorre em virtude não só das dificuldades apresentadas pelos alunos na sua aprendizagem, mas também pelo preocupante índice de evasão dos estudantes dos primeiros períodos das universidades, matriculados nesse componente curricular.

Ao considerar esses aspectos, observa-se que ainda há muita pesquisa a ser realizada no que tange o ensino de Cálculo. Atualmente, na grande maioria das salas de aula, existe a predominância de um ensino livresco, centrado no professor, que tem como função transmitir variadas informações, driblando o tempo considerado por muitos, insuficiente para tratar de tantos assuntos. É frequente a existência de ambientes de aprendizagens marcados por um processo de “aprendizagem” passiva cujo foco consiste na memorização e reprodução (imitação/repetição) precisa dos raciocínios e procedimentos ditados pelo professor ou pelo livro.

Particularmente, quando o assunto é o estudo de limites de funções de uma variável real, a situação não é muito diferente. Isso ocorre devido às práticas que partem de um amontoado de ideias abstratas e procedimentos com fins em si mesmos. Sendo assim, o foco desse trabalho é justamente investigar como ocorre o processo de ensino e aprendizagem do conceito de limite, em particular, de limite de funções reais de uma variável. Especificamente, essa pesquisa apresenta a seguinte questão: Como a utilização das noções de conceito imagem e conceito definição podem contribuir para entender como ocorre o desenvolvimento do pensamento matemático avançado e, a partir desse entendimento, que características devem possuir as atividades que visam à construção do conceito de limite de funções reais de uma variável?

Trata-se, portanto, de uma pesquisa teórica bibliográfica cujo objetivo é aprimorar os fundamentos teóricos relacionados ao processo de ensino e aprendizagem do pensamento matemático avançado, em especial, do conceito de limites de funções de uma variável real. Para responder a questão são utilizados os pressupostos teóricos presentes

nas noções de conceito definição e conceito imagem propostas pelos pesquisadores David Tall e Shlomo Vinner (1981). Esses teóricos defendem a ideia de que um determinado conceito não deve ser trabalhado a partir de sua definição formal, ou seja, para que um determinado conceito seja realmente entendido, o aluno deve ter certa familiaridade anterior à formalização.

Segundo Tall e Vinner, a representação Conceito Imagem

[...] descreve toda a estrutura cognitiva que está associada ao conceito, inclui todas as imagens mentais e propriedades a elas associadas e os processos. É desenvolvido ao longo dos anos por meio de experiências de todos os tipos, mudando tanto quando o indivíduo encontra novos estímulos, quanto quando amadurece (TALL; VINNER, 1981, p.152).

O Conceito Definição é formado a partir do conceito Imagem. O conceito definição pode ser expresso como sendo:

[...] uma reconstrução pessoal da definição feita pelo estudante. É então um tipo de palavra que o estudante usa para sua própria explanação de seu conceito imagem. Se os conceitos definição lhes são dados ou construídos por si mesmo, pode variar de tempo em tempo. Dessa maneira um conceito definição pessoal pode ser diferente de um conceito definição formal, este último sendo um conceito definição que é aceito pela comunidade matemática (TALL; VINNER, 1981, p.2).

Acredita-se que quando o estudante é estimulado a pensar sobre um determinado objeto surgem várias representações mentais como imagens de representações visuais, impressões, experiências e propriedades, as quais podem ser elaboradas, pelos alunos, por intermédio de processos de pensamentos sobre representações mentais, que segundo Tall e Vinner (1981) são denominadas como Conceito Imagem.

Sendo assim, esse trabalho apresenta como objetivo específico analisar os impactos e ou contribuições de uma proposta de ensino baseada nos conceitos imagens para o estudo de limite de funções de uma variável real.

2. David Tall e o pensamento matemático avançado

David Tall (1995) apresenta uma sistematização que caracteriza a evolução do pensamento matemático a partir de uma perspectiva cognitivista. De acordo com essa

sistematização a atividade humana é composta por três componentes: a percepção (entrada), o pensamento (processamento interno) e a ação (saída). Sendo assim, diante de uma atividade matemática os indivíduos percebem os objetos, pensam sobre eles e realiza ações sobre os mesmos.

Tall (1995) acredita que o desenvolvimento cognitivo do indivíduo, desde o pensamento elementar até o pensamento matemático avançado começa com a “percepção de” e a “ação sobre” os objetos do mundo externo e é construído através de dois desenvolvimentos em paralelo, a saber, um que evolui do visual espacial para o verbal dedutivo e outro que se baseia num “sucessivo capsular de processos em objetos através da manipulação de símbolos”.

No entanto, para compreender melhor as ideias de Tall (1995) faz-se necessário entender a forma pela qual processamos internamente a informação, isto é, como ocorre o pensamento. Porém, tal entendimento se mostra bastante complexo e, por isso, Tall (1995) opta em conhecê-lo através de algumas manifestações, como por exemplo, o estatuto dos objetos mentais produzidos e as representações dos mesmos. A fim de diferenciar a *matemática elementar*¹ da *matemática avançada*² Tall (1995) utiliza a teoria de Bruner (1996) sobre representações.

Bruner (1996), confere à linguagem - tanto concreta quanto abstrata - o principal meio de representação simbólica da realidade. Para ele todo indivíduo constrói o conceito que adquire do mundo através dos "símbolos linguísticos" (palavras) aos quais, gradualmente, atribui significados ao nível subjetivo e consensual. Bruner (1996) relaciona intrinsecamente o modo de representação visual (ou icônico), com o conceito da "representação linguística". Ele observa que a "representação visual, como por exemplo, um desenho, é uma das primeiras formas de comunicação utilizada por uma criança, juntamente com as "representações ativas" (ou motoras).

As "representações ativas", por sua vez, feitas pelas crianças em seus primeiros estágios de desenvolvimento, correspondem à tentativa de representação inicial de determinadas realidades, através da supressão do estágio de representação linguística (ainda em vias de se desenvolver). Como exemplo, podemos citar a criança que quando ouve a palavra "água", passa-lhe pela mente a "ação de beber" propriamente dita, e, daí por diante, a criança vai elaborando inúmeras outras "representações ativas". Isso ocorre como

¹ Tall (1995) caracteriza a matemática elementar como a matemática onde os objetos são descritos.

² A matemática avançada corresponde à matemática onde os objetos são definidos.

uma tentativa de construção de uma protolinguagem, em que as crianças objetivam substituir a linguagem formal utilizada pela comunicação que, mal formada, ainda se encontra em processo de desenvolvimento.

Segundo Bruner (1996), na tentativa de adquirir conhecimentos básicos para "decifrar" o meio em que está inserido, o homem acaba por discernir estratégias sistemáticas de comportamento, reconhecendo, continuamente, regularidades dentro da complexidade dos fenômenos do mundo que o cerca. A partir destes esquemas iniciais, ele começa a formar conceitos estratégicos que, com o passar do tempo, devidamente assimilados e sedimentados, permitem influir diretamente sobre o meio, conferindo-lhe o poder de moldá-lo e transformá-lo.

Basicamente, Bruner (1996) tenta estabelecer uma relação direta entre o comportamento do indivíduo com seu processo de aquisição de conhecimento - elementos peculiares que encerram, em si, uma boa parcela de subjetividade. Segundo o autor, é a educação, encarada como um processo (sistemático ou não), que acabará servindo como instrumento para que o homem possa dominar o meio em que vive.

Tall (1995) utiliza as ideias descritas acima e afirma que na matemática elementar a descrição é construída a partir da experiência com o objeto, já na matemática avançada as propriedades dos objetos são construídas a partir da definição.

A passagem do pensamento matemático elementar para o avançado causa estranheza e grandes dificuldades para aqueles que entram em contato com a matemática avançada. Isso porque envolve a transição do descrever ao definir. As exigências passam a ser a prova de um fato de forma lógica baseada em definições. Nesse momento, ocorre a transição da coerência da matemática elementar para a consequência da matemática avançada que se baseia em entidades abstratas que devem ser construídas pelo indivíduo através de deduções das definições formais.

Para Tall (1995), essas dificuldades podem ser amenizadas quando são feitos investimentos nas formas de representação. Ou seja, uma possível alternativa é incluir os diferentes tipos de representações – motoras, icônicas e as três formas de representação simbólica (verbal – descrição; formal – definição e proceptual – dualidade processo-objeto).

3. Conceito imagem e conceito definição

Para Vinner (1983), a formação de conceitos é de extrema importância para a psicologia da aprendizagem. Ao lidar com essa questão deve-se estar atento às seguintes dificuldades: a primeira relacionada à noção do próprio conceito e a segunda é a de determinar quando um conceito está corretamente formado na mente de um indivíduo. A fim de explicar esse processo cognitivo são tomadas como base as noções de conceito imagem e conceito definição desenvolvidas por Tall e Vinner (1981).

A ideia central consiste no seguinte: quando um indivíduo ouve o nome de um conceito, ele produz um estímulo que aciona algo em sua memória caracterizado como conceito imagem. Dessa forma, pode-se afirmar que o conceito imagem é algo presente em nossa mente que associa uma *coisa não verbal*³ ao nome do conceito. Note que tais representações não verbais podem ser traduzidas por formas verbais, porém nem sempre essas últimas são precisas e ou as primeiras a serem evocadas por nossa mente. Por exemplo, quando falamos limite de uma função real de uma variável quando x tende ao número a , pode vir a mente de um indivíduo a imagem $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, ou ainda, $f(x) \rightarrow c$ quando $x \rightarrow a$.

O termo conceito imagem descreve então uma estrutura cognitiva total associada ao conceito. Essa estrutura total corresponde ao conjunto de todas as imagens, propriedades e ou processos que alguma vez, na mente do indivíduo, foram associadas ao conceito. Daí pode-se perceber que à medida que o indivíduo tem novas experiências ao longo do tempo referentes a um conceito, essas imagens vão sendo enriquecidas “alargando” o conceito imagem.

Entende-se por conceito definição, a definição verbal exata que explica, de forma precisa, um conceito. Nesse caso, pode-se afirmar que o conceito definição corresponde à definição matemática formal.

Tall e Vinner (1981) destacam que para que um conceito seja adquirido por um indivíduo é necessário que se forme um conceito imagem do mesmo. Apenas o conceito definição (a definição formal) não dá garantias para a verdadeira compreensão do conceito. Vale lembrar que para alguns conceitos, certos indivíduos, podem possuir simultaneamente um conceito definição e um conceito imagem. Além disso, alguns conceitos podem ser, inclusive, introduzidos por meio de definições que, nesse caso, podem ajudar na formação do conceito imagem.

³ De acordo com Tall e Vinner (1981), o não verbal refere-se a representações visuais, impressões ou experiências.

Nesse caso, a definição serviu de suporte para a construção do conceito imagem. Porém, muitas vezes, mesmo tendo como suporte para sua construção a definição, o que ocorre é que os indivíduos após formarem o conceito imagem de um conceito, acabem dispensando o conceito definição. Assim, a partir do momento em que o conceito imagem é formado, a definição pode permanecer inativa ou até mesmo esquecida.

Vinner (1983) cria um modelo explicativo para a construção de conhecimentos matemáticos. Essa construção está baseada nas relações existentes entre conceito imagem e conceito definição. Ele assume que para cada um desses conceitos, existem células distintas na estrutura cognitiva, sendo uma para o conceito definição e outra para o conceito imagem. Se nenhum significado for associado a um conceito, então a célula conceito imagem apresenta-se vazia. Isso ocorre em muitas situações em que o conceito é apenas memorizado sem que tenha significado para o indivíduo.

Esse pode ser considerado um ponto importante e crucial no que se refere ao processo de ensino e aprendizagem do conceito de limite de uma função de uma variável real. Ou seja, definições como a que segue abaixo:

Seja f uma função definida para todo número real em algum intervalo aberto contendo a , exceto possivelmente no próprio a . O limite de $f(x)$ quando x tende a a será L , escrito como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se a seguinte afirmativa for verdadeira: Dado $\epsilon > 0$ qualquer, existe $\delta > 0$, tal que $0 < |x - a| < \delta$ então $|f(x) - L| < \epsilon$ (LEITHOLD, 1994, p.58).

costumam ser introduzidas precocemente, seja pela maior parte dos professores ou mesmo por materiais didáticos de cálculo. Embora, seja mais comum reconhecer a ideia de que deve haver, para gerar o enriquecimento de um conceito imagem, a realização de situações diversificadas para que os alunos possam adquirir com precisão o conceito definição. Na prática, o que se vê, são esforços que não resultam no que se pretende. É nesse ponto que, geralmente, surgem as maiores dificuldades dos estudantes iniciantes. Em muitos casos, quando os estudantes conseguem decorar precisamente a definição, sem reconhecer o seu significado, acabam construindo (quando possível), a partir desse conceito definição, um conceito imagem pobre e vago associado, geralmente, a expressão “tende a” ou a notação utilizada para representar limites de uma função. Vale destacar que pode ainda ocorrer o aquisição de um conceito definição frágil aplicável apenas a um número limitado de exemplos particulares.

O modelo idealizado por Vinner (1983) supõe a existência de uma interação entre o conceito definição e o conceito imagem, embora ambos possam ser construídos de forma independente. É possível que um indivíduo construa, a partir de muitos exemplos, um conceito imagem que pode ser mudado à medida que esse indivíduo entra em contato com situações não previstas nos exemplos inicialmente construídos; pode acontecer também que mesmo diante de novas situações que exijam mudanças e ou adaptações do conceito imagem, o mesmo permaneça inalterado, isto é, a definição do professor fica por algum tempo na célula e pode ser esquecida ou distorcida com o passar do tempo.

Há ainda uma terceira possibilidade em que ambas as células permanecem tal como foram construídas inicialmente. Os efeitos dessa terceira possibilidade refletem em ações em que o aluno ao ser questionado pelo professor, a respeito de um conceito definição, repete a definição do professor, mas em outras situações, não consegue aplicá-la de maneira precisa.

O mesmo pode ocorrer quando um conceito é introduzido por meio de uma definição. A célula conceito imagem inicialmente vazia começa a ser preenchida com exemplos e explicações que vão sendo dadas. Porém, ela não é capaz de refletir necessariamente todos os aspectos do conceito definição.

Para Tall e Vinner (1981), deve haver uma preocupação com a forma com que o modelo pode integrar algumas atividades matemáticas, em especial, com a resolução de problemas. Isso porque os pesquisadores reconhecem que a formação dos conceitos não ocorre de forma única, ela variável, isto é, depende do desempenho dos sujeitos envolvidos. Por isso sugerem, além da resolução de problemas, atividades que estejam voltadas aos processos de construção e identificação dos conceitos a fim de colocar o aluno em contato com tarefas cognitivas, que permitem ativar as duas células – a célula do conceito imagem e a célula do conceito definição. As ações entre as células que ocorrem diante de uma tarefa cognitiva são variadas. Podem ocorrer consulta à célula do conceito definição seguida de uma ação recíproca entre ambas a fim de se construir uma resposta a uma tarefa pré-estabelecida. Pode ocorrer apenas uma consulta à célula do conceito definição e nesse caso, o conceito imagem não promove qualquer interferência na resposta a ser construída – este é o caso em que se tem um processo cognitivo assentado numa dedução formal pura. Outra ação é uma consulta a célula imagem seguida por uma consulta a célula definição, isto é, agora caracteriza-se um tipo de dedução que segue o pensamento intuitivo.

Os modelos descritos são assumidos implicitamente pelos professores. Mas para Vinner (1983), não refletem a prática, pois não existem meios que possam fazer com que a estrutura cognitiva dos indivíduos seja forçada a utilizar definições para formar conceitos imagens ou resolver uma tarefa proposta. E ainda, o fato de muitas definições se mostrarem complicadas ao extremo para os alunos, impede a criação de conceitos imagens na mente dos estudantes.

Na prática, o modelo para o processo que realmente ocorre baseia-se apenas na consulta do conceito imagem seguido de uma resposta com base neste, que proporciona uma resposta intuitiva, como declara Domingos (2003). Neste caso, a célula conceito definição, acaba não sendo consultada no processo de resolução de problema, mesmo sem estar vazia.

Vale lembrar que Tall (1992) também utiliza os termos conceito imagem e conceito definição, mas de forma diferenciada quanto à abordagem dada aos mesmos. Tall (1992) considera que o conceito definição não é mais do que uma parcela do conceito imagem total que existe na mente de cada indivíduo. Assim, o conceito imagem descreve a estrutura cognitiva total que é associada ao conceito. Já o conceito definição refere-se a forma das palavras usadas para especificar o conceito, mas onde este pode ser apreendido pelo indivíduo, de uma forma rotineira ou de um modo mais significativa, sendo assim, relacionado a um conceito global de estudo.

O conceito definição pode ser dado ao indivíduo ou construído pelo mesmo e pode ainda variar com o tempo. Dessa forma, podem-se distinguir dois tipos de conceito definição: o *conceito definição pessoal* e o *conceito definição formal*⁴. Em cada indivíduo o conceito definição gera o seu próprio conceito imagem, o que para Tall e Vinner (1981) denomina-se imagem do conceito definição e que, portanto, pode ser considerado conceito imagem. Vale destacar que para alguns indivíduos ele pode não existir e para outros pode ou não ser coerentemente relacionado com outras partes do conceito imagem.

4. Algumas sugestões para o ensino de limite a partir das noções de conceito imagem e conceito definição

⁴ O conceito definição formal é aquele aceito por toda a comunidade matemática.

As características do pensamento matemático avançado juntamente com as contribuições de Tall e Vinner (1981), referentes às noções de conceito imagem e conceito definição, servem como ferramentas que permitem não só analisar o modo como os conceitos matemáticos se formam na mente do indivíduo, como também, contribuem para a reorientação de práticas de ensino que possam propor atividades que sejam responsáveis por um ambiente de aprendizagem significativo, em que é possível a apreensão de conceitos matemáticos mais abstratos, em especial, o conceito de limite de funções reais de uma variável.

Nesse sentido, são propostas a seguir algumas sugestões que podem contribuir para a construção de espaços de aprendizagens que contemplem as ideias até então apresentadas.

A problematização surge naturalmente como elemento motivador que deve levar a construção do conceito. No caso de limites de funções de uma variável real, a problematização pode estar relacionada à história da matemática, quando são levantadas questões sobre o surgimento do conceito de limite; ao contexto geométrico, quando são abordadas a ideia de reta tangente e também aos problemas mais aplicados, como aqueles que discutem, por exemplo, a ideia de velocidade.

O conceito imagem deve ser ampliado de forma a incorporar elementos algébricos, geométricos e linguísticos. Nesse sentido, é oportuno evitar a forma excessiva de exercícios de padrão repetitivo, dando lugar a exercícios que estimulem a criatividade e promovem uma maior transição entre representações gráfico-algébrica e algébrica-gráfico, a fim de enriquecer o conceito imagem dos alunos. Atividades nesse sentido permitem com que o aluno compreenda a importância de evocar o conceito definição e confrontá-lo com o conceito imagem, o que evita obstáculos para a aprendizagem.

Explorar exercícios que visam aspectos construtivos de limites pode significar a valorização da intuição no sentido de compreender os conceitos matemáticos com multiplicidade de resultados e propriedades.

A aquisição do conceito definição é facilitada quando se tem atividades que, de alguma forma, podem associar a linguagem natural à linguagem matemática formal. Dessa forma, é importante, por exemplo, apresentar atividades na qual o estudante possa expressar, por meio da escrita, o que entende por limite. A passagem da definição intuitiva de limite para a formal deve ser feita naturalmente, por meio de questionamentos simples, como por exemplo: “Qual o significado preciso de ‘ x tende a 2’?” ou “O que significa

dizer que $f(x)$ aproxima-se cada vez mais de L ?”

Um aspecto específico importante no ensino de limites é ressaltar a condição “ $x \neq a$ ” na definição para mostrar que, ao procurar o limite de $f(x)$ quando $x \rightarrow a$, nunca considera-se $x = a$. Uma boa maneira é propor atividades com gráficos que mostrem que a função $f(x)$ não foi definida em $x = a$, ou seja, o que importa são os valores próximos de a .

Finalmente, deve-se observar que o exagero nas definições e demonstrações rigorosas apresentadas de forma mecanizada e procedimental não contribuem, na maior parte das vezes, positivamente para a aquisição do conceito definição e do conceito imagem de limite. As demonstrações devem consistir em processos significativos capazes de evocar imagens que contribuem para a aquisição do conceito imagem e dê sentido ao conceito definição ou vice-versa.

5. Considerações finais

Hoje, é necessário repensar as formas com as quais o ensino de cálculo, em especial, o de limites, vem sendo tratado por muitos professores e por sequências didáticas presentes em vários livros. Torna-se urgente equacionar as formas de ensino para que a prioridade seja estabelecer espaços de aprendizagens onde os estudantes não tenham que recorrer à memorização por não conseguirem dar significado a teoria formal que lhes é apresentada. Nesse sentido, acredita-se que uma proposta de ensino de limites de uma função real de uma variável baseada nas noções de conceito imagem e conceito definição, propostas por Tall e Vinner (1981), possam contribuir para a formação de indivíduos críticos e reflexivos, que não só compreendem o significado que ϵ solons e deltas podem ter em definições formais, mas que sejam capazes de utilizá-los para intervir no mundo em que vivem.

6. Referências

BARUFI, M. C. B. *A construção/negociação de significado no curso universitário inicial de cálculo diferencial e integral*. Tese de doutorado em Educação. Faculdade de Educação. USP. São Paulo, 1999.

BRUNER, J. *The culture of education*. Harvard Univ. Press, 1996.

DOMINGOS, A. M. D. *Compreensão de conceitos matemáticos avançados – a matemática no início do superior*. Tese de Doutorado em Ciências de Educação. Universidade de nova de Lisboa. Lisboa, 2003.

LEITHOLD, L. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: Harbra, 1994.

SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. In: Dubinsky, E.; Harel, G. (Ed.). *The concept of function: Elements of Pedagogy and Epistemology*, 1992. p. 25-58. (Notes and Reports Series of the Mathematical Association of America, vol. 25).

STEWART, J. *Cálculo*. v.1. São Paulo: Cengage Learning, 2009.

SWOKOWSKI, E. W. *Cálculo com geometria analítica*. São Paulo: Mc Graw Hill, 1994.

TALL, D.; VINNER, S. Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity, *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, vol. 3, n. 12, p. 151-169, 1981.

TALL, D. The Transition to Advanced Mathematical Thinking. In: Grouws D. A. (Ed). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, ed. New York: Macmillan, 1992. p. 495-511.

VINNER, S. Conflicts between definitions and intuitions: the case of the tangent. In: CONFERENCE OF THE INTERNATIONAL GROUP FOR THE PSYCHOLOGY OF MATHEMATICS EDUCATION, 6, 1983, Antuérpia. *Proceedings...*Antuérpia: Antwerp University, p. 24-28, 1983.