

## UM ESTUDO DO CAMPO CONCEITUAL DAS CÔNICAS

*Jusley Talita Grimes de Souza*  
*Universidade Estadual de Maringá*  
*juslei\_talita@hotmail.com*

*Lilian Akemi Kato*  
*Universidade Estadual de Maringá*  
*lilianakemikato@gmail.com*

### **Resumo:**

Os conceitos, propriedades e aplicações advindos das seções cônicas, ou seja, das curvas obtidas pela interseção de uma superfície cônica de revolução com um plano, caracterizam-se como um dos principais assuntos tratados no ensino médio e superior. Este tema começa a ser trabalhado nas séries finais do ensino fundamental, porém sua formalização conceitual é iniciada já no ensino médio e, no ensino superior exploram-se, com maior ênfase, as equações analíticas e suas representações gráficas. No entanto, tradicionalmente, este estudo está centrado mais nos exercícios, em detrimento dos significados algébricos e geométricos, causando muitas dificuldades, aos alunos, na compreensão deste assunto. Na busca de alternativas para facilitar a compreensão desse tema, buscamos na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud possibilidades para a determinação deste campo conceitual com vistas ao favorecimento da aprendizagem significativa dos conceitos e propriedades envolvidas nesta temática.

**Palavras - chave:** Cônicas; Conceito; Invariantes; Descritores; Campos Conceituais.

### **1. Introdução**

O ensino e a aprendizagem de conceitos da Matemática, seja no ensino fundamental, médio ou superior, têm levantado importantes discussões no âmbito da Educação Matemática. Dentre essas destacam aquelas que se referem a determinar estratégias que oferecem instrumentos de ação para que, alunos e professores, possam desenvolver o processo de construção do conhecimento.

Dentre os assuntos discutidos deste processo destacam-se aqueles que se referem ao processo de formação do conceito. No pensamento matemático-formal moderno, os conceitos são determinados pelo estabelecimento de relações entre as variáveis envolvidas nas situações-problema, e que naturalmente, no futuro, vão conduzir à construção do conhecimento científico e a sua representação simbólica.

Porém, as condições necessárias para o desenvolvimento de estratégias de ação que favoreçam a construção de significados dentro de um determinado campo conceitual da matemática são alvos de amplos debates que envolvem professores e pesquisadores.

Na Matemática o estudo das cônicas tem um importante significado como ferramenta para compreensão e representação de problemas do Cálculo e da Geometria em geral, além de possuir propriedades específicas que se integram constituindo um ramo de estudo próprio, desde a Antiguidade. De fato, as cônicas estão entre as mais antigas curvas matemáticas conhecidas, sendo também um dos conteúdos mais antigos da matemática estudado de forma sistemática. Menaechmus (375-325 a. C) foi o primeiro geômetra a apresentar as seções cônicas como a interseção de um cone circular reto com um plano perpendicular a base do cone e, foram concebidas numa tentativa de resolver os três problemas famosos: trissecção do ângulo, duplicação do cubo e quadratura do círculo. Dependendo do ângulo (menor, igual ou maior a 90 graus) obtemos uma elipse, parábola ou hipérbole, respectivamente.

Apolônio (262-190 a.C) foi o matemático que mais estudou e desenvolveu as seções cônicas na antiguidade. No seu tratado "As Cônicas", composto por oito livros com 487 proposições, foi suplantado todas as obras existentes na antiguidade. Os termos utilizados para designar as curvas (parábola, elipse e hipérbole) foi usado pela primeira vez por ele.

Mesmo com toda sua importância histórica e com sua contribuição no desenvolvimento tecnológico, o estudo das cônicas, seja no ensino médio ou na graduação, não desperta, nos estudantes, interesse e curiosidade suficiente para uma aprendizagem com significado, sendo, com frequência, assimilada por meio da resolução de exercícios com a manipulação ou memorização de fórmulas, sem o estabelecimento de relações desse assunto com outros da Matemática de outras áreas.

Então, nesse trabalho propomos uma abordagem desse tema partindo-se do processo de conceituação de situações do real introduzida por Vergnaud (1990) e denominada Teoria dos Campos Conceituais.

Nessa teoria, assume-se que o conhecimento está organizado em campos conceituais cuja elaboração, pelo sujeito, depende da experiência, maturidade, aprendizagem, além de outros fatores que influenciam diretamente no processo da aprendizagem. (MOREIRA, 2004).

Nesse sentido, a Teoria dos Campos Conceituais possibilita o entendimento acerca das atividades mais complexas no âmbito da aprendizagem.

trata-se de uma teoria psicológica do conceito ou, melhor ainda, da conceituação do real: permite identificar e estudar as filiações e as rupturas entre conhecimentos do ponto de vista de seu conteúdo conceitual; permite igualmente analisar a relação entre os conceitos como conhecimentos explícitos e as invariantes operatórias que estão implícitas nas condutas dos sujeitos em situação, assim como aprofundar a análise das relações entre significados e significantes (VERGNAUD, 1990).

Vergnaud define campo conceitual como "um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações de pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição." (MOREIRA, 2004).

Os principais conceitos desenvolvidos na Teoria dos Campos Conceituais são, além do próprio campo conceitual, os conceitos de esquema, invariante operatório (teorema - em - ação ou conceito - em - ação), além de uma concepção particular de conceito, em que este é definido como uma terna constituída por três conjuntos (S, I, R) na qual:

S é um conjunto de situações que tornam o conceito significativo;

I é um conjunto de invariantes (objetos, propriedades e relações) que podem ser reconhecidos e usados pelo sujeito para analisar e dominar essas situações;

R é um conjunto de representações simbólicas que podem ser usadas para pontuar e representar esses invariantes e, portanto, representar as situações e os procedimentos para lidar com eles.

Logo S é o conjunto de situações que dão sentido ao conceito (a referência), I o conjunto de invariantes operatórios associados ao conceito (o significado) e R o conjunto de representações linguísticas e não linguísticas que permitem representar simbolicamente o conceito (significante).

Assim, a Teoria dos Campos Conceituais apontam a importância da contextualização por meio de situações e problemas que os alunos já tenham algum conhecimento prévio, para a partir daí elaborar mecanismos de ação para resolver ou compreender melhor a situação. No entanto, sabe-se que existe uma lacuna entre os invariantes que são utilizados num primeiro contato com o problema, que são advindos de suas experiências anteriores e, os invariantes que devem aparecer na construção do conhecimento científico.

Nesse sentido, o estudo de um determinado campo conceitual envolve além da compreensão das situações envolvidas nesse campo, uma análise das estratégias cognitivas desenvolvidas por eles na resolução dessas situações, ou mais arrojadamente, na detecção dos possíveis invariantes operatórios que se evidenciam nesse processo.

Este trabalho apresenta um estudo acerca da delimitação do campo conceitual das cônicas segundo os descritores geométricos e algébricos, que caracterizam suas propriedades e, na segunda parte, uma descrição de um conjunto de situações, e os possíveis invariantes, que dão sentido ao conceito de parábola. Este trabalho, ainda está em desenvolvimento quanto ao conjunto de situações de estudo para os conceitos de elipse e hipérbole.

## 2. Desenvolvimento

Iniciamos este trabalho, baseando-nos nos descritores geométricos e algébricos, que estabelecem o conjunto de propriedades que caracterizam cada cônica. Para Vergnaud (2009) um descritor é um conjunto de propriedades distintas que caracteriza um objeto. Por exemplo, podemos dizer que a nacionalidade é um descritor que caracteriza um cidadão. Assim, apresentamos a seguir os três descritores geométricos e os seis algébricos, que caracterizam as cônicas segundo as suas propriedades.

Os descritores geométricos são dados pelo tipo de interseção de um cone de duas folhas e um plano. São eles:

Descritor 1: Interseção de um plano paralelo com a base da superfície cônica.

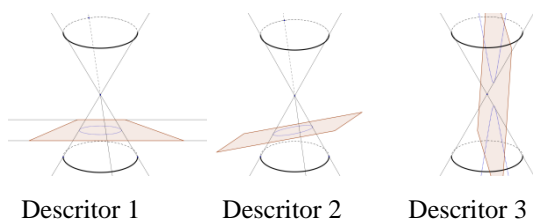
- Se o plano for paralelo a base e não contém o vértice da superfície então, a cônica obtida é um círculo;
- Se o plano for paralelo a base e contém o vértice da superfície então, a cônica obtida é um ponto.

Descritor 2: Interseção de um plano inclinado com a base da superfície cônica.

- As cônicas obtidas são: elipse, parábola, ponto, reta e hipérbole.

Descritor 3: Interseção do plano perpendicular a base da superfície cônica.

- As cônicas obtidas são: hipérbole e duas retas concorrentes.



Descritor 1

Descritor 2

Descritor 3

Os descritores algébricos são dados pelos coeficientes não nulos da seguinte equação  $F(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ .

Descritor 1: Somente um coeficiente é não nulo

- $A \neq 0, B \neq 0, C \neq 0, D \neq 0$  ou  $E \neq 0$ , temos: reta;
- $F \neq 0$ , temos:  $\emptyset$ ;

Descritor 2: Somente dois coeficientes são não nulos

- $A \neq 0$  e  $B \neq 0, A \neq 0$  e  $D \neq 0, B \neq 0$  e  $C \neq 0, B \neq 0$  e  $D \neq 0, B \neq 0$  e  $E \neq 0, C \neq 0$  e  $E \neq 0, D \neq 0$  e  $E \neq 0, D \neq 0$  e  $F \neq 0$  ou  $E \neq 0$  e  $F \neq 0$ , temos: reta;
- $A \neq 0$  e  $C \neq 0$ , temos: ponto e retas concorrentes;
- $A \neq 0$  e  $E \neq 0$  ou  $C \neq 0$  e  $D \neq 0$ , temos: parábola;
- $A \neq 0$  e  $F \neq 0$  ou  $C \neq 0$  e  $F \neq 0$ , temos:  $\emptyset$  e retas paralelas;
- $B \neq 0$  e  $F \neq 0$ , temos: hipérbole;

Descritor 3: Somente três coeficientes são não nulos

- $A \neq 0$  e  $B \neq 0$  e  $C \neq 0$ , temos: ponto e retas concorrentes;
- $A \neq 0$  e  $B \neq 0$  e  $C \neq 0, B \neq 0$  e  $C \neq 0$  e  $E \neq 0$  ou  $D \neq 0$  e  $E \neq 0$  e  $F \neq 0$  temos: reta;
- $A \neq 0$  e  $B \neq 0$  e  $E \neq 0, A \neq 0$  e  $B \neq 0$  e  $F \neq 0, A \neq 0$  e  $C \neq 0$  e  $F \neq 0, A \neq 0$  e  $D \neq 0$  e  $F \neq 0, B \neq 0$  e  $C \neq 0$  e  $D \neq 0, B \neq 0$  e  $C \neq 0$  e  $F \neq 0$  ou  $C \neq 0$  e  $D \neq 0, B \neq 0$  e  $C \neq 0$  e  $F \neq 0$  ou  $C \neq 0$  e  $E \neq 0$  e  $F \neq 0$ , temos:  $\emptyset$ ;
- $A \neq 0$  e  $B \neq 0$  e  $F \neq 0, A \neq 0$  e  $D \neq 0$  e  $F \neq 0, B \neq 0$  e  $C \neq 0$  e  $D \neq 0, B \neq 0$  e  $C \neq 0$  e  $F \neq 0$  ou  $C \neq 0$  e  $E \neq 0$  e  $F \neq 0$ , temos: retas paralelas;
- $A \neq 0$  e  $C \neq 0$  e  $D \neq 0$  ou  $A \neq 0$  e  $C \neq 0$  e  $E \neq 0$ , temos: circunferência;
- $A \neq 0$  e  $C \neq 0$  e  $D \neq 0, A \neq 0$  e  $C \neq 0$  e  $E \neq 0$  ou  $A \neq 0$  e  $C \neq 0$  e  $F \neq 0$ , temos: elipse e hipérbole;
- $A \neq 0$  e  $D \neq 0$  e  $E \neq 0, A \neq 0$  e  $E \neq 0$  e  $F \neq 0, C \neq 0$  e  $D \neq 0$  e  $E \neq 0$  ou  $C \neq 0$  e  $D \neq 0$  e  $F \neq 0$ , temos: parábola;

Descritor 4: Somente quatro coeficientes são não nulos

- $A \neq 0$  e  $B \neq 0$  e  $C \neq 0$  e  $D \neq 0, A \neq 0$  e  $B \neq 0$  e  $C \neq 0$  e  $E \neq 0, A \neq 0$  e  $B \neq 0$  e  $C \neq 0$  e  $F \neq 0$  ou  $A \neq 0$  e  $C \neq 0$  e  $D \neq 0$  e  $F \neq 0$ , temos:  $\emptyset$ , elipse, hipérbole e circunferência;
- $A \neq 0$  e  $C \neq 0$  e  $D \neq 0$  e  $E \neq 0$ , temos: elipse, circunferência e hipérbole;
- $A \neq 0$  e  $C \neq 0$  e  $D \neq 0$  e  $F \neq 0$  ou  $B \neq 0$  e  $D \neq 0$  e  $E \neq 0$  e  $F \neq 0$ , temos: retas concorrentes;
- $A \neq 0$  e  $D \neq 0$  e  $E \neq 0$  e  $F \neq 0$  ou  $C \neq 0$  e  $D \neq 0$  e  $E \neq 0$  e  $F \neq 0$ , temos: parábola;

- $B \neq 0$  e  $C \neq 0$  e  $D \neq 0$  e  $E \neq 0$  ou  $B \neq 0$  e  $C \neq 0$  e  $D \neq 0$  e  $F \neq 0$ , temos:  $\emptyset$ , retas paralelas e reta;
- $B \neq 0$  e  $D \neq 0$  e  $E \neq 0$  e  $F \neq 0$ , temos: hipérbole;

Descritor 5: Somente cinco coeficientes são não nulos

- $A \neq 0$  e  $B \neq 0$  e  $C \neq 0$  e  $D \neq 0$  e  $E \neq 0$ ,  $A \neq 0$  e  $B \neq 0$  e  $C \neq 0$  e  $D \neq 0$  e  $F \neq 0$  ou  $A \neq 0$  e  $C \neq 0$  e  $D \neq 0$  e  $E \neq 0$  e  $F \neq 0$ , temos:  $\emptyset$ , ponto, elipse, hipérbole, circunferência e retas concorrentes;
- $B \neq 0$  e  $C \neq 0$  e  $D \neq 0$  e  $E \neq 0$  e  $F \neq 0$ , temos:  $\emptyset$ , reta e retas paralelas;

Descritor 6: Todos os coeficientes são não nulos

- Temos:  $\emptyset$ , reta, retas paralelas, retas concorrentes, ponto, elipse, hipérbole, parábola e circunferência;

Esta caracterização, segundo os descritores algébricos e geométricos, permitiu-nos delimitar um conjunto de situações para analisar o espectro de abrangência dos possíveis significados (invariantes) para o conceito de parábola.

Para tanto foram determinadas algumas situações, pois, segundo Vergnaud, é através das situações que os alunos tomam consciência do sentido dos conceitos. Porém, mesmo que o domínio das situações molde o conhecimento que os alunos podem alcançar, o sentido que dão a situação não está em si mesma, mas, principalmente na relação entre a situação e o esquema. (FÁVERO, 2005).

### 3. Implementação

Neste trabalho consideramos, como esquemas, as representações e ações que os estudantes admitem para resolver uma determinada situação. Para tanto, discorreremos, primeiramente as seguintes situações:

Situação 1: Obtenha o parâmetro, o foco e a diretriz da parábola e faça um esboço:  $y^2 = 5x$

Situação 2: Obtenha o parâmetro, o foco e a diretriz da parábola e faça um esboço:  $x^2 = -4y$

Situação 3: Obtenha o parâmetro, o foco e a diretriz da parábola e faça um esboço:

$$2y^2 + 9x = 0.$$

Nessas situações, primeiramente o aluno deveria encontrar o parâmetro e, em seguida o foco, a diretriz e esboçar a parábola.

Em cada situação abaixo, obter uma equação reduzida da parábola de vértice (0,0) sabendo que:

Situação 4: O parâmetro é 2 e o foco está no semi - eixo positivo das abscissas.

Situação 5: O parâmetro é  $1/8$  e o foco está no semi - eixo negativo das ordenadas.

Situação 6: A diretriz é  $r: x - 1 = 0$ .

Situação 7: O foco é  $(8, 0)$ .

Nas situações 4 e 5, o aluno deveria identificar se a forma da equação é  $y^2 = 4px$  ou  $x^2 = -4py$ . Já nas situações 6 e 7, deveria identificar o parâmetro  $e$ , em seguida a forma da equação.

Esse conjunto de situações, acerca do conceito de parábola, foi aplicado a um grupo de 4 alunos do 2º ano do curso de Matemática, com idade entre 18 e 20 anos, sendo 3 do sexo feminino e 1 do sexo masculino, que denominaremos de Aluno 1, 2, 3 e 4.

Após a implementação os registros desses alunos foram analisados objetivando-se a identificação de possíveis invariantes adotados, por estes, durante a resolução das situações.

#### 4. Resultados

A seguir apresentamos os resultados, parciais, obtidos na implementação.

- Situação 1: a resolução desta situação envolvia o aluno escrever a equação reduzida que é da forma  $y^2 = 4px$  e substituir  $y^2$  por  $5x$  e, encontrar o parâmetro, foco, diretriz e esboçar. Obtivemos as seguintes respostas:

Aluno 1: Reescreveu a equação da seguinte forma  $y^2/5 = x$  e fez o esboço.

Aluno 2: Reconhecemos uma parábola pelo formato de sua equação  $x^2 = 4px$  ou  $y^2 = 4py$ .  $y^2 = 5x$ , neste caso a parábola estaria localizada no eixo das abscissas e que a diretriz é 5.

- Situação 2: a resolução desta situação envolvia o aluno escrever a equação reduzida que é da forma  $x^2 = 4py$  e substituir  $x^2$  por  $-4y$  e, encontrar o parâmetro, foco, diretriz e esboçar. Obtivemos as seguintes respostas:

Aluno 1: Reescreveu a equação da seguinte forma  $x^2/-4 = y$ , fez o esboço, escreveu que o foco é  $(0, 0)$  e a diretriz é o eixo  $y$ .

Aluno 2: Fez o esboço e escreveu que a concavidade estava voltada para baixo por causa do sinal de menos.

- Situação 3: a resolução desta situação envolvia que o aluno isolar  $y^2$ , escrever a equação reduzida  $y^2 = 4px$  e substituir  $y^2$  por  $-9/2 x$  e, encontrar o parâmetro, foco, diretriz e esboçar. Obtivemos as seguintes respostas:
- Aluno 1: Reescreveu a equação da forma  $x = -2y^2/9$ , o foco é  $(0, 0)$ , a diretriz é o eixo  $x$  e fez o esboço.

Aluno 2: Reescreveu a equação da seguinte maneira  $y^2 = -9/2 x$  e fez o esboço.

Nas situações 1 a 3 o aluno 3 fez somente o esboço da parábola e o aluno 4 não conseguiu dar uma resposta.

- Situações 4 e 5: a resolução destas situações envolvia o aluno identificar as equações reduzidas da forma  $y^2 = 4px$  e  $x^2 = -4py$ . Obtivemos as seguintes respostas:

Aluno 2: Obteve as equações reduzidas das parábolas que são  $y^2 = 8x$  e  $x^2 = -1/2 y$ .

Os alunos 1, 3 e 4 não resolveram as situações 4 e 5. Já as situações 6 e 7 os quatro alunos não resolveram.

## 5. Considerações Finais

Embora este trabalho ainda esteja em andamento, visto que pretendemos continuar desenvolvendo outras situações envolvendo os conceitos de cônicas, a etapa inicial já nós apontou alguns encaminhamentos acerca dos possíveis invariantes, presentes na estrutura cognitiva dos estudantes, que podem tornar-se obstáculos para a aprendizagem de diversos conteúdos do Cálculo.

Destacamos, neste trabalho, os principais invariantes identificados, bem como suas implicações para a aprendizagem de outros conceitos: não diferenciar os elementos foco e vértice da parábola: Isso ocorre porque o foco é dado por  $F = (p,0)$  ou  $F = (0,p)$  e, como o aluno não soube identificar o parâmetro, não diferenciou os elementos. Por exemplo, o Aluno 1 que escreveu o foco como sendo  $(0,0)$ . Não reconhecer a equação reduzida da parábola: os alunos consideraram a equação reduzida da parábola como sendo  $x^2 = 4px$  e  $y^2 = 4py$ , ao invés de  $x^2 = 4py$  e  $y^2 = 4px$  e, o aluno 4 que não resolveu as situações escreveu que a equação é dada da seguinte forma:  $x^2 = y$ .

A identificação desses invariantes apontam algumas das dificuldades, dos alunos, na identificação das cônicas, e seus elementos, na sua forma algébrica. E isso, possivelmente não deve ser somente para a equação da parábola, o que nós ainda pretendemos investigar. No entanto já é possível afirmarmos que essas deficiências podem prejudicar os alunos na identificação de domínios de funções de várias variáveis, por exemplo, em que, no caso de funções de  $\mathbb{R}^2$  em  $\mathbb{R}^3$ , o domínio são regiões do plano.

## 6. Referências



MOREIRA, M. A. A teoria dos campos conceituais de Vergnaud: o ensino de ciências nesta área. Porto Alegre: Instituto de Física da UFRGS, 2004.

VERGNAUD, G. La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactique des Mathématiques, v. 10, n. 3, p. 133-170, 1990.

FÁVERO, M. H. Psicologia e conhecimento: subsídios da psicologia do desenvolvimento para a análise de ensinar e aprender. Brasília: Editora da Universidade de Brasília, 2005.

VERGNAUD, G. A criança, a matemática e a realidade. Curitiba: Editora da UFPR, 2009