PROBLEMAS COMBINATÓRIOS CONDICIONAIS: A INFLUÊNCIA DOS INVARIANTES NA CATEGORIZAÇÃO DOS DIFERENTES TIPOS DE PROBLEMAS[1]

Flávia Myrella Tenório Braz[2]
CE- Universidade Federal de Pernambuco
flavia_myrella@hotmail.com

Resumo:
O presente estudo buscou verificar a aplicabilidade das categorias de *problemas combinatórios condicionais*, referentes à *escolha de elementos*, ao *posicionamento*, à *proximidade* e à *ordem*, aplicadas em estudo anterior apenas a problemas do tipo *arranjo*, aos diferentes tipos de problemas combinatórios (*produto cartesiano*, *combinação e permutação*). Para isso, foram realizados estudo e análise das diferentes categorias, em relação aos demais tipos de problemas combinatórios e observou-se que estas categorias esbarram nos invariantes de cada tipo de problema, não sendo possível a aplicabilidade de todas as categorias existentes a todos os tipos de problemas combinatórios. Estudos posteriores analisarão a compreensão de alunos dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental acerca dos problemas condicionais aplicados aos demais tipos de problemas. Ressalta-se a validade e importância do trabalho com os diferentes tipos de *problemas combinatórios condicionais* desde os anos iniciais, como forma de desenvolvimento do *raciocínio combinatório*.

Palavras-chave: Raciocínio combinatório; Combinatória condicional; invariantes.

1. Introdução

Entende-se por *Combinatória*, o ramo da Matemática que estuda as técnicas de contagem de agrupamentos possíveis de elementos de um determinado conjunto, que atendam a determinadas condições, sem necessariamente ter que contá-los um a um, pois não há necessidade de listar ou enumerar os elementos.

---

[1] Estudo realizado durante vigência do Projeto de Bolsas de Iniciação Científica(PIBIC), financiado pelo CNPq e sob orientação da autora do projeto, Dra. Rute Elizabete de Souza Rosa Borba, professora do Departamento de Métodos e Técnicas de Ensino do Centro de Educação da UFPE, coordenadora do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnologias – Edumatec e líder do GERAÇÃO – Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação da UFPE.

[2] Aluna do curso de graduação em Pedagogia da UFPE, bolsista PIBIC/ CNPq e membro do Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação da UFPE – GERAÇÃO

A *Combinatória* pertence às estruturas multiplicativas, segundo a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1986), e é constituída, de acordo com classificação de Pessoa e Borba (2009) com base nesta mesma teoria, de quatro tipos de problemas: *arranjo*, *permutação*, *combinação* e *produto cartesiano*. Cada tipo, além das características próprias dos problemas combinatórios referentes às relações de *escolha* e de *ordenação* dos elementos nos agrupamentos, possui ainda invariantes próprios, específicos, referentes à utilização ou não de todos os elementos do conjunto e ainda, o surgimento ou não de novas possibilidades de acordo com a ordem destes elementos.

Assim, nos problemas de *arranjo*, de um determinado conjunto serão selecionados apenas alguns elementos e a ordem desses elementos irá gerar novas possibilidades. Nos de *permutação*, todos os elementos do conjunto serão utilizados e a ordem também fornecerá novas possibilidades. Já nos problemas de *combinação*, de um dado conjunto utilizam-se apenas alguns elementos e a ordem em que se apresentam não irá gerar novas possibilidades, enquanto nos problemas de *produto cartesiano*, de dois ou mais conjuntos terá origem um novo (BORBA, 2010).

Os *problemas combinatórios condicionais*, objeto deste estudo, possuem além das referidas relações (de *escolha* e *ordem*, que nestes tipos de problemas se apresentam de forma mais complexa), outras referentes à *posição* e à *proximidade* de seus elementos nos agrupamentos, como observado em estudo anterior de Borba e Braz (2012). Estas autoras classificaram os tipos de *problemas combinatórios condicionais* de acordo com os aspectos cognitivos e as relações existentes nestes problemas, elaborando uma categorização aplicada, por se tratar de um estudo inicial, apenas aos problemas de *arranjo*.

O presente estudo teve por objetivo o aprofundamento de pesquisas realizadas por Borba e Braz (2012) e Braz e Borba (2012), aplicando, a partir do estudo cuidadoso das referidas pesquisas e dos demais tipos de problemas combinatórios, as categorias por estas autoras criadas aos demais tipos de problemas combinatórios (*permutação*, *combinação* e *produto cartesiano*). A partir de então, serão elaborados, nas próximas etapas do estudo, instrumentos de sondagem de compreensão dos *problemas condicionais* aplicados aos problemas de *permutação*, *combinação* e *produto cartesiano* a serem resolvidos por alunos do 5º, 7º e 9º anos do Ensino Fundamental.

Estudos anteriores (Borba e Braz, 2012; Braz e Borba, 2012) constataram que alunos desde o 5º ano do Ensino Fundamental, já possuem alguma compreensão de *problemas combinatórios condicionais*, no que se refere a problemas de *arranjo*. A compreensão destes alunos, bem como dos alunos do 7º e 9º anos, acerca da *Combinatória Condicional* em outros tipos de problemas combinatórios é também objetivo deste estudo, ampliando os estudos anteriores de Braz e Borba e deve ser realizado nas próximas etapas da pesquisa. Isto por entender a importância de se trabalhar os diferentes tipos de problemas combinatórios desde o Ensino Fundamental, por razões explicitadas a seguir.

2. Por que estudar Combinatória?

Diversos autores (Fischbein,1975; Batanero, Godino e Navarro-Pelayo, 1996; Borba, 2010) têm ressaltado a importância da *Combinatória* para o desenvolvimento cognitivo dos educandos. Isto porque a *Combinatória* é fonte do raciocínio lógico-matemático, contribuindo para o aprofundamento e compreensão de outros conceitos matemáticos, como da probabilidade, por exemplo, uma vez que para a determinação do provável, do improvável e do impossível, faz-se necessário o levantamento de possibilidades (BORBA, 2010).

O *raciocínio combinatório* contribui também para outras áreas do conhecimento como a Biologia, a Química, a Estatística. É ainda possível observar a *Combinatória* em diversas situações do dia a dia, como na organização de uma equipe, de cardápios, roteiros de ônibus, na escolha de trajes.

O *raciocínio combinatório* caracteriza-se ainda, segundo Borba (2010), como base de raciocínio científico, por possuir um caráter hipotético-dedutivo, pois “na Combinatória é viabilizado o levantamento de todas as possíveis relações de uma situação e a análise – pela combinação de procedimentos e experimentação e análise lógica – da validade das possibilidades” (2010, p. 4). Os problemas combinatórios requerem uma análise criteriosa do que é solicitado para que então se possa pensar em estratégia(s) eficiente(s) para sua resolução, o que implica no levantamento de hipóteses.

Este raciocínio pode se desenvolver por meio das interações entre a maturação cognitiva e as experiências sociais tanto ocorridas fora da escola, quanto nela, como confirmado em estudo de Schiliemann (1998). Porém, apesar de se desenvolver também através do cotidiano, das práticas sociais extraescolares, não se descarta a importância da escola e do educador na sistematização e desenvolvimento deste conhecimento.

Em síntese, pode-se constatar que o *raciocínio combinatório* contribui para o desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático e científico, para o próprio desenvolvimento escolar, no que diz respeito a conhecimentos da Matemática, da Biologia, entre outros, e contribui ainda para outras áreas do conhecimento em dimensões mais profundas que a escolar. Vai além, adentrando ainda nas práticas cotidianas, auxiliando no levantamento de hipóteses e estratégias para resolução de problemas. Mas, apesar de toda contribuição que o desenvolvimento do *raciocínio combinatório* pode trazer ao educando, a *Combinatória* é ainda pouco trabalhada na Educação Básica, ficando muitas vezes restrita apenas ao Ensino Médio.

Inhelder e Piaget (1976) trazem a *Combinatória* como pertencente ao período operatório formal do desenvolvimento cognitivo, se desenvolvendo, portanto, da adolescência até a fase adulta. Pessoa e Borba (2009), porém, observaram, em estudo realizado com 568 alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio, que desde os anos iniciais os alunos já são capazes de compreender os problemas combinatórios, esgotando o número de possibilidades válidas se não for muito elevado, se tornando melhores sucedidos com o avançar da escolaridade. Isto porque, inicialmente os alunos apresentam estratégias menos formais de resolução (desenhos, listagens, árvores de possibilidades, etc.) e com o passar dos anos vão desenvolvendo estratégias mais formais e sistemáticas.

Estudo de Matias, Santos e Pessoa (2011), relacionado aos problemas de *arranjos* na Educação Infantil, aponta que mesmo nesta etapa de escolarização, as crianças já são capazes de estabelecer relações para a resolução dos problemas combinatórios.

Desta forma, ressalta-se a possibilidade de se trabalhar com estes problemas desde os anos iniciais de escolarização, pois para Vergnaud (1986) os conceitos se desenvolvem com o passar dos anos, de forma articulada, ou seja, deve se possibilitar o contato com os diferentes tipos de problemas combinatórios, permitindo que os alunos estabeleçam as relações necessárias para melhor compreender suas características, desenvolvendo o *raciocínio combinatório*. Estes problemas podem ser inicialmente trabalhados de forma mais simples, se tornando mais complexos no avançar da escolarização.

A abordagem dos diferentes tipos de problemas combinatórios desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, também é sugerido pelos Parâmetros Curriculares Nacionais (Brasil, 1997). No entanto, observa-se que os problemas de *produto cartesiano*, são os mais comumente trabalhados nesta etapa de escolarização, estando os demais presentes formalmente apenas no Ensino Médio.

Mesmo nos livros didáticos, são poucos os problemas combinatórios encontrados e, quando constam, não são diferenciados, abrangendo poucos tipos de problemas. O mesmo acontece com outros tipos de problemas das estruturas multiplicativas, sendo os mais comuns a *multiplicação direta* e a *partição*, e com os das estruturas aditivas, sendo os de *transformação* os mais comumente trabalhados.

Havendo déficit nos livros didáticos, o educador pode utilizar de sua liberdade para trazer outros tipos de problemas para melhor contribuir para o desenvolvimento de seus alunos, pois, como dito anteriormente, conceitos se desenvolvem de forma articulada (Vergnaud, 1986) e é desta forma que eles devem ser trabalhados na escola. E entre os diferentes tipos de problemas combinatórios, encontram-se os *condicionais*, objeto deste estudo e cujas características serão abordadas a seguir.

3. O estudo proposto e os problemas combinatórios condicionais

O presente estudo acerca dos *problemas combinatórios condicionais* tomou por base estudos anteriores realizados por Borba e Braz (2012) e Braz e Borba (2012), caracterizando-se como uma continuação destes. No primeiro estudo estas autoras analisaram os *problemas condicionais* presentes em livros didáticos, bem como na monografia de Homa (2011) e puderam constatar que nestas fontes os *problemas condicionais* estavam categorizados de acordo com suas características didáticas e matemáticas, a partir de suas semelhanças, propriedades e relações matemáticas e procedimentos de resolução. As autoras, porém, buscaram uma categorização pautada nos aspectos cognitivos, ou seja, nas diferentes relações que os alunos teriam que estabelecer para solucionar os problemas.

Analisando os tipos de *problemas combinatórios condicionais*, puderam observar que os problemas combinatórios podem ser condicionados quanto à *escolha*, explicitada ou não, de seus elementos, à *posição* destes elementos, a *ordem* e a *proximidade* entre eles. E foi com base nestas relações, que podem vir isoladas ou em conjunto, que elaboraram 22 categorias de *problemas combinatórios condicionais* (Braz e Borba, 2012), aplicadas inicialmente apenas aos problemas de *arranjos*, por se tratar de um estudo inicial.

A seguir serão enumeradas as categorias elaboradas por Braz e Borba (2012) acompanhadas de alguns exemplos, que constituíram os instrumentos de sondagem por elas utilizados para a verificação da compreensão dos alunos participantes (do 5º, 7º e 9º anos do Ensino Fundamental), dos *problemas combinatórios condicionais*. Devido à falta de espaço neste trabalho, foram citados apenas alguns. Porém, outros exemplos podem ser encontrados em seus estudos de origem (Borba e Braz, 2012; Braz e Borba, 2012), bem como os resultados finais do estudo.

1. *Um elemento explicitado fixo*

Ex: André quer criar uma nova senha para seu e-mail utilizando apenas quatro das cinco letras do seu nome. Quantas senhas com quatro letras diferentes ele pode obter a partir das letras A N D R E, *que tenham a letra A*, em qualquer posição?

2. *Um elemento não explicitado, com determinada característica, fixo*

Ex: Marcela foi ao parque de diversões com seu irmão Jorginho e três primas: Marina, Andréa e Tati. Em um banco da roda gigante só cabem três pessoas. De quantas maneiras diferentes eles podem se organizar no banco, *desde que uma das primas tenha sempre lugar*?

3. *Mais de um elemento explicitado fixo*

4. *Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, fixo*

5. *Ter pelo menos um determinado elemento não explicitado, com determinada característica, fixo*

Ex: Quantos números de três algarismos diferentes podemos formar a partir dos algarismos 2, 3, 4 e 5, *que tenham pelo menos um algarismo par*?

6. *Ter no máximo determinados elementos não explicitados, com determinada característica, fixo*

Ex: Paulo, Maria, Amanda e Lila são muito amigos e adoram ir juntos na Van da escola. Mas em cada banco da Van só cabem três pessoas. De quantas maneiras diferentes eles podem se organizar no banco *desde que no máximo duas das meninas tenham lugar*?

7. *Um elemento fixo explicitado em determinada posição*

8. *Um elemento não explicitado, com determinada característica, fixo em determinada posição*

9. *Mais de um elemento explicitado em determinadas posições*

Ex: Na praça em que Marina está tem um banco no qual cabem quatro pessoas. De quantas maneiras diferentes Marina e as amigas (Aninha, Amanda, Júlia, Gabi e Maria) podem ocupar os quatro lugares do banco, *desde que Marina fique em uma ponta e Gabi na outra*?

10. *Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, em determinadas posições*

11. *Mais de um elemento explicitado com determinada proximidade*

12. *Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, com determinada proximidade*

Ex: De quantas maneiras diferentes minha tia Joana, meus primos Pedro e Ana e minha mãe, podem se sentar em um banco de três lugares *sendo que os meus primos querem sentar sempre juntos*?

13. *Mais de um elemento explicitado em determinada ordem*

Ex: Diego, Mário, João e Carlos estão disputando uma corrida. De quantas maneiras diferentes podem-se obter os três primeiros lugares *se Carlos sempre ficar à frente de Mário entre os três primeiros*?

14. *Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, em determinada ordem*

15. *Mais de um elemento explicitado em determinadas posições e ordem*

16. *Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, em determinadas posições e ordem*

Ex: Quantos números de três algarismos diferentes podemos formar com os algarismos 1, 4, 5 e 8, *sendo o 1º algarismo par e 3º algarismo ímpar*?

17. *Mais de um elemento explicitado com determinadas posições e proximidade*

Ex: Beto, Pedro, João, André e Thiago estão disputando uma corrida de cavalos. De quantas maneiras diferentes podemos ter os quatro primeiros colocados *desde que Pedro e João estejam juntos no 1º e no 2º lugar*?

18. *Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, com determinadas posições e proximidade*

19. *Mais de um elemento explicitado com determinada proximidade e ordem*

20. *Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, com proximidade e ordem*

Ex: Quantos números de quatro algarismos diferentes podemos formar com os algarismos 1, 2, 5 e 8, *em que algarismos pares sempre apareçam juntos, do maior para o menor*?

21. *Mais de um elemento explicitado com determinadas posições, proximidade e ordem*

Ex: Cinco garotas: Amanda, Renata, Lila, Vanessa e Paula estão disputando na natação. De quantas maneiras diferentes podemos obter as quatro primeiras colocadas *desde que Amanda esteja em 1º lugar e Paula seja a segunda*?

22. *Mais de um elemento não explicitado, com determinada característica, com determinadas posições, proximidade e ordem*

Braz e Borba (2012) aplicaram problemas referentes a estas categorias com 74 alunos dos 5º, 7º e 9º anos do Ensino Fundamental, buscando observar a compreensão destes acerca da *Combinatória Condicional*. As autoras concluíram que desde o 5º ano os alunos já possuem alguma compreensão dos *problemas combinatórios condicionais*, o que torna uma possibilidade o trabalho com estes tipos de problemas desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Observaram ainda que quanto mais relações envolvidas, maior era a dificuldade de resolução, pois maior esforço cognitivo era requerido. Nestes casos, o 9º ano foi mais bem sucedido.

Constataram também, a dificuldade dos alunos em relação aos próprios invariantes dos problemas combinatórios, ressaltando a necessidade de uma maior atenção por parte do educador a estes aspectos (número de relações e invariantes).

A partir das categorias elaboradas por Braz e Borba (2012) buscou-se, no presente estudo, verificar a aplicabilidade destas aos demais tipos de problemas combinatórios (*permutação*, *combinação* e *produto cartesiano*), a partir de sua análise cuidadosa, bem como dos referidos tipos de problemas, atentando para suas características. A partir das categorias aplicáveis aos demais problemas combinatórios, será elaborado instrumento de sondagem de compreensão acerca da *Combinatória Condicional* a ser aplicado com alunos dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental. Este instrumento encontra-se, na atual etapa do estudo, em processo de conclusão e contou com a contribuição de livros didáticos, com problemas presentes no estudo de Homa (2011) e na apostila elaborada por Azevedo e Borba (2010), onde foram observados problemas condicionais e não condicionais que inspiraram a elaboração das questões.

Objetiva-se, através das análises quantitativa e qualitativa desse instrumento de sondagem, verificar se alunos dos anos iniciais e finais do Ensino Fundamental de uma escola pública já apresentam alguma compreensão dos *problemas combinatórios condicionais* aplicados aos demais tipos de problemas combinatórios. Busca-se ainda, observar a partir de que ano os alunos passam a ser mais bem sucedidos na resolução dos problemas, quais as maiores dificuldades em todas as turmas, quais categorias se caracterizam como as mais difíceis, que estratégias os alunos utilizam e quais seriam as mais eficientes. Os resultados obtidos servirão de base para estudos posteriores de intervenção e em cursos de formação de professores da Educação Básica.

4. Resultados: A aplicabilidade das categorias de problemas combinatórios condicionais aos diferentes tipos de problemas combinatórios

Para melhor compreender a aplicabilidade, ou não, das categorias anteriormente identificadas aos demais tipos de problemas combinatórios, faz-se necessário atentar para os invariantes (relações que se mantêm constantes) que caracterizam cada tipo de problema, já citados neste trabalho.

Considerando-se estes invariantes, pode-se concluir que categorias que considerem a *ordem* dos elementos *não podem* ser aplicadas a problemas do tipo *combinação*, pois na *combinação* a *ordem não influencia* no resultado. Também não cabem a este tipo de problema, contextos que envolvam *posições*.

Ainda considerando os invariantes dos problemas, pode-se também constatar que categorias que determinem o *número máximo ou mínimo de elementos* a serem utilizados, *não* podem ser aplicadas aos problemas de *permutação*, uma vez que na *permutação todos* os elementos do conjunto sempre serão utilizados. Por esta mesma razão, também *não* é possível fixar em *permutações apenas um* (ou *alguns*) *elemento*(*s*), pois esse(s) elemento(s), assim como os demais, *sempre* aparecerá(ão).

Vale salientar que os resultados aqui expostos são parte de um estudo maior que considera a elaboração de um instrumento de sondagem de compreensão dos *problemas combinatórios condicionais* em diferentes tipos de problemas combinatórios. Assim, não foram consideradas neste estudo, as categorias que incluem *elementos não explicitados*, pois se buscou reduzir o número de categorias a fim de não gerar um instrumento de coleta demasiadamente grande, pois não se esta mais considerando apenas um tipo de problema combinatório. Procurou-se desta forma, evitar o fator cansaço nos alunos participantes.

Elementos não explicitados só aparecerão junto às categorias *ter pelo menos* e *ter no máximo determinados elementos*, por nestas categorias não haverem *elementos explicitados*. Para o caso de ter essas condições com *elementos explicitados*, seria necessário admitir repetição de elementos e não estamos neste estudo incluindo problemas combinatórios com repetição. Por exemplo, não podemos pedir que entre os algarismos-chave que abrem um cadeado tenha *no máximo* dois algarismos 4 (*elemento explicitado*), pois não estamos trabalhando com repetições, que são casos especiais na *Combinatória*. Mas, podemos solicitar que tenha *no máximo* (ou *pelo menos*) dois algarismos pares (*elemento não explicitado*) que podem ser o 4 e/ou outro(s) que constarem no enunciado.

Exemplos de algumas categorias poderão ser encontrados a seguir, para a melhor compreensão sobre os diferentes tipos de problemas combinatórios e suas condições possíveis.

Categorias de problemas condicionais, por tipo de problema, seguidas de exemplos

PERMUTAÇÃO:

1. *Um elemento explicitado fixo em determinada posição*
   Ex: Quantos anagramas da palavra AMOR podemos encontrar *que comece com a letra A*?
2. *Mais de um elemento explicitado fixo em determinadas posições*
3. *Mais de um elemento explicitado com determinada proximidade*
   Ex: Quantos anagramas da palavra AMOR podemos encontrar *que tenham as letras A e O sempre juntas*?
4. *Mais de um elemento explicitado em determinada ordem*
   Ex: Quantos anagramas da palavra AMOR podemos encontrar em *que o A seja seguido do O*?
5. *Mais de um elemento explicitado em determinadas posições e ordem*
6. *Mais de um elemento em determinadas posições e proximidade*
7. *Mais de um elemento explicitado em determinadas proximidade e ordem*
8. *Mais de um elemento explicitado com determinadas posições, proximidade e ordem*
   Ex: Quantos anagramas da palavra AMOR podemos encontrar *que sempre comecem com as letras A e O juntas e nessa ordem*?

COMBINAÇÃO:

1. *Um elemento explicitado fixo*

2. *Mais de um elemento explicitado fixo*
   Ex: Cinco alunos (Maria, César, Gabriela, João e Pedro) irão formar duplas para fazer um trabalho da escola. De quantas maneiras diferentes podemos formar as duplas se *Pedro e Maria sempre participarem*?

3. *Mais de um elemento explicitado com determinada proximidade*
   Ex: Na empresa em que Armando trabalha, de segunda à sexta-feira, os funcionários podem fazer ginástica duas vezes por semana, durante o horário de trabalho. Ele que escolher dois dias *que não sejam seguidos*. Quais são todas as possibilidades de escolha de Armando?

4. *Ter pelo menos um determinado elemento não explicitado com determinada característica, fixo*
   Ex: De 10 professores (cinco mulheres e cinco homens), seis serão selecionados para fazer parte de uma comissão. De quantas maneiras diferentes essa comissão pode ser formada, *se dela fizer parte pelo menos uma mulher*?

5. *Ter no máximo determinados elementos não explicitados, com determinadas características, fixo*
   Ex: De 10 professores (cinco mulheres e cinco homens), seis serão selecionados para fazer parte de uma comissão. De quantas maneiras diferentes essa comissão pode ser formada, *se dela fizer parte no máximo dois homens*?

PRODUTO CARTESIANO:

1. *Um elemento explicitado fixo*

2. *Mais de um elemento explicitado fixo*

3. *Ter pelo menos um determinado elemento não explicitado com determinada característica, fixo*
   Ex: Um cadeado de senha possui três discos com algarismos. No primeiro estão os algarismos 1, 2 e 3, no segundo 4, 5 e 6 e no terceiro 7, 8 e 9. Qual o número de códigos possíveis *se pelo menos 1 dos algarismos-chave for par*?

4. *Ter no máximo determinados elementos não explicitados, com determinadas características, fixo*

5. *Um elemento explicitado fixo em determinada posição*

6. *Mais de um elemento explicitado fixo em determinadas posições*

7. *Mais de um elemento explicitado fixo em determinada ordem*

8. *Mais de um elemento explicitado em determinadas posições e ordem*

Ex: Um cadeado de senha possui três discos, cada um com os algarismos 1, 2, 3 e 4. Qual o número de códigos possíveis, sem repetições, *se no 1º e 3º discos os algarismos-chave forem 1 e 4, respectivamente*?

9. *Mais de um elemento explicitado com determinada proximidade*

10. *Mais de um elemento em determinadas posições e proximidade*

    Ex: Um cadeado de senha possui três discos, cada um com os algarismos 1, 2, 3 e 4. Qual o número de códigos possíveis, sem repetições, *se no 1º e 2º discos os algarismos chaves forem 1 e 4*?

11. *Mais de um elemento explicitado com determinada proximidade e ordem*

12. *Mais de um elemento explicitado com determinadas posições, proximidade e ordem*

Nota-se que, das 22 categorias de *problemas combinatórios condicionais,* elaboradas por Braz e Borba (2012) com problemas de *arranjo*, oito são aplicáveis às *permutações*, cinco às *combinações* e 12 aos *produtos cartesianos*, havendo categorias comuns a uns ou a todos os tipos de problemas. Percebe-se assim, que é 47 o número total de tipos de *problemas combinatórios condicionais* (considerando-se também os de *arranjo*), distribuído entre as referidas categorias. Ressalta-se que não foram aplicadas as categorias com *elementos não explicitados*, com exceção das categorias aplicadas aos problemas de *arranjo*, constantes dos estudos anteriores, bem como das categorias *ter pelo menos* e *ter no máximo determinados elementos*, nos problemas combinatórios presentes no estudo atual.

Problemas que condicionem a *ordem* ou as *posições* dos elementos não se aplicam a problemas de *combinação*, assim como não é possível condicionar as *escolhas* (apenas alguns aparecerem ou no máximo ou pelo menos alguns deles) dos elementos nos problemas de *permutação*. Limitar os elementos a *pelo menos* ou *no máximo* alguns é possível para problemas de *produto cartesiano* e *combinação*, além de *arranjo*, como visto no estudo anterior. O *produto cartesiano* pode, ainda, ser condicionado quanto à *proximidade*, à *posição* e à *ordem* de seus elementos, ou seja, dentre os três tipos de problemas combinatórios presentes nesta pesquisa, é o único, além do *arranjo*, abordado em estudo anterior, que pode envolver as quatro relações presentes em *problemas combinatórios condicionais* referentes à *escolha*, *posição*, *proximidade* e *ordem*.

A partir das categorias encontradas nestes problemas, vem sendo elaborado um instrumento de sondagem de compreensão, que será posteriormente aplicado em turmas do 5º, 7º e 9º anos do Ensino Fundamental.

5. Considerações finais

Este estudo caracterizou-se como uma ampliação de um estudo inicial realizado por Borba e Braz (2012) e Braz e Borba (2012), aplicando as categorias de *problemas condicionais* por elas elaboradas aos demais tipos de problemas combinatórios. Foi constatado que essas categorias se condicionam em função dos invariantes de cada problema combinatório. Desta forma, nem todas são aplicáveis a todos os tipos de problemas combinatórios, estando submetidas às características de cada tipo, obtendo-se assim oito categorias nos problemas de *permutação*, cinco nos de *combinação* e 12 nos problemas de *produto cartesiano*. Resulta-se, então, em 47 tipos de *problemas combinatórios condicionais* (incluídos os *arranjo*), distribuídos em 22 categorias.

Foram as categorias aplicáveis a problemas de *permutação*: *Um elemento explicitado fixo em determinada posição; Mais de um elemento explicitado fixo em determinadas posições; Mais de um elemento explicitado com determinada proximidade; Mais de um elemento explicitado em determinada ordem; Mais de um elemento explicitado em determinadas posições e ordem; Mais de um elemento em determinadas posições e proximidade; Mais de um elemento explicitado em determinadas proximidade e ordem; Mais de um elemento explicitado com determinadas posições, proximidade e ordem.*

Em problemas de *combinação* obteve-se: *Um elemento explicitado fixo; Mais de um elemento explicitado fixo; Mais de um elemento explicitado com determinada proximidade; Ter pelo menos um determinado elemento não explicitado com determinada característica, fixo; Ter no máximo determinados elementos não explicitados, com determinadas características, fixo.*

Já nos problemas de *produto cartesiano*, obtiveram-se as seguintes categorias: *Um elemento explicitado fixo; Mais de um elemento explicitado fixo; Ter pelo menos um determinado elemento não explicitado com determinada característica, fixo; Ter no máximo determinados elementos não explicitados, com determinadas características, fixo; Um elemento explicitado fixo em determinada posição; Mais de um elemento explicitado fixo em determinadas posições; Mais de um elemento explicitado fixo em determinada ordem; Mais de um elemento explicitado em determinadas posições e ordem; Mais de um elemento explicitado com determinada proximidade; Mais de um elemento em determinadas posições e proximidade; Mais de um elemento explicitado com determinada* *proximidade e ordem; Mais de um elemento explicitado com determinadas posições, proximidade e ordem.*

Condições que envolvam *ordem e posições*, não se aplicam a *combinação*, da mesma forma que problemas de *permutação* não podem ser condicionados quanto à *escolha* de apenas um ou alguns elementos.

Como visto em estudos anteriores, alunos desde os anos iniciais já possuem alguma compreensão dos *problemas condicionais* referentes a *arranjos* e posteriormente será verificada sua compreensão acerca dos *problemas condicionais* aplicados aos demais tipos de problemas combinatórios, bem como a compreensão de alunos dos 7º e 9º anos do Ensino Fundamental.

Ressalta-se a importância do trabalho com diferentes tipos de problemas combinatórios, entre eles os *condicionais*, desde os anos iniciais do Ensino Fundamental, como forma de possibilitar maiores reflexões e estabelecimento de relações por parte dos alunos para o desenvolvimento qualitativo do *raciocínio combinatório*, que tanto contribui para o desenvolvimento dos educandos, bem como para outras áreas do conhecimento.

6. Agradecimentos

Ao Programa de Bolsas de Iniciação Científica da Universidade Federal de Pernambuco – PIBIC, ao CNPq, a orientadora e autora do projeto, Dra. Rute Borba e ao Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco, que contribuiu para o aprofundamento de meu conhecimento acerca da Combinatória com ricas discussões.

7. Referências

AZEVEDO, Juliana e BORBA, Rute. *Ensino de Combinatória* 2010 (Apostila).

BATANERO, Carmen; GODINO, Juan e NAVARRO-PELAYO, Virginia. *Razonamiento Combinatorio*. Madrid: Editorial Síntese, S.A., 1996

BORBA, Rute. O raciocínio combinatório na educação básica. In: *Anais do X Encontro Nacional de Educação Matemática*. Salvador, 2010.

BORBA, Rute e BRAZ, Flávia M. T. O que é necessário para compreender problemas combinatórios condicionais? In: *Anais do III Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, Fortaleza, 2012.

BRASIL, MEC. *Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática. 1º e 2º ciclos*. Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

BRAZ, Flávia M. T. e BORBA, Rute. A compreensão de problemas combinatórios condicionais por alunos do 5º ano do Ensino Fundamental. In: *Anais do XX Congresso de Iniciação Científica da UFPE – CONIC*, Recife, 2012.

FISCHBEIN, Efraim. *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children,* Reidel, Dordrecht, 1975.

HOMA, Agostinho Iaqchan. Testes adaptativos no padrão SCORM com Análise Combinatória. *Monografia de Especialização*. Programa de Pós - Graduação em Educação Matemática da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), 2011.

INHELDER, Barbara e PIAGET, Jean. *Da lógica da criança à lógica do adolescente*. São Paulo: Livraria Pioneira Editora. 1976.

MATIAS, Patrícia C., SANTOS, Missilane M. de S. e PESSOA, Cristiane. Crianças de Educação Infantil resolvendo problemas de arranjo. In: *XIII Conferencia Interamericana de Educação Matemática – CIAEM*. Recife, 2011.

PESSOA, Cristiane e BORBA, Rute. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1a a 4a série. *Zetetike (UNICAMP)*, v. 17, pp. 105-150, 2009.

SCHLIEMANN, Analúcia. A compreensão da análise combinatória: desenvolvimento, aprendizagem escolar e experiência diária. In: CARRAHER, Terezinha Nunes; CARRAHER, David e SCHLIEMANN, Analúcia. *Na vida dez, na escola zero.* São Paulo: Cortez, 1988.

VERGNAUD, Gérard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas Um exemplo: as estruturas aditivas. *Análise Psicológica*, 1, 1986. pp. 75-90.