GEOMETRIA DOS FRACTAIS – UMA FORMA DIFERENTE DE VER A GEOMETRIA

Prof. Cleiton Carvalho de Melo
Prefeitura Municipal de Ipojuca
melo.cleiton@gmail.com

Prof. Luiz Alves de Lima
Prefeitura Municipal de Ipojuca
luizluali@gmail.com

Profª. Tailesa Maria Rodrigues
Prefeitura Municipal de Ipojuca
tailesa1@hotmail.com

Resumo:

O presente estudo visa à inserção de uma geometria não euclidiana, cito Fractais, nas aulas, por exemplo, as de progressão geométrica (P.G). Portanto, esse "recente" e moderno modelo matemático têm a incumbência de revelar uma nova face matemática, através de um pouco de sua história, no que tange sua(s): Criação, geometria, propriedades, complexidade, teoria, etc. Contudo, está circunscrito a este trabalho, a elaboração por aproximação, em papel A4, de um belo fractal. O público fica por conta de professores do ensino médio e alunos de licenciatura em matemática, ou áreas afins. Buscamos, no entanto proporcionar um dinamismo no modelo matemático ao qual estamos costumados a vivenciar, dando-os a oportunidade de trabalhar com processos iterativos, escrever fórmulas gerais, calcular áreas e perímetros de figuras com crescente complexidade, ideia de limite, o uso e criação de tabelas e a excelente aplicação em conteúdos matemáticos pré-existentes.

Palavras-chaves: Geometria não-euclidiana; Irregularidades Geométricas; Fractais.

1. Introdução

Diz-se de uma forma geométrica, de aspecto irregular ou fragmentado, que pode ser subdividida indefinidamente em diversas partes, as quais, de certo modo, são cópias reduzidas do todo. (Aurélio – 2000)

Não obstante o que diz o Aurélio, Benoit Mandelbrot, matemático francês, que descobriu a geometria do fractal na década de 70, quando estava a preparar a sua primeira obra importante sobre fractais para publicação em livro, sentiu necessidade de encontrar um nome para a sua geometria. Deu consigo a consultar um dicionário de latim do seu filho, onde encontrou o adjetivo *fractus*, do verbo *frangere*, que significa quebrar. Surgiu, então, a palavra *fractal*. Segundo Benoit Mandelbrot: "Fractais são formas igualmente complexas no detalhe e na forma global".

Tecnicamente, um fractal é um objeto que não perde a sua definição formal à medida que é ampliado, mantendo-se a sua estrutura idêntica à original. Se repararmos, todas as formas geométricas ortodoxas degeneram quando são ampliadas ou diminuídas, como por exemplo, um círculo numa escala muito maior parece perder a sua curvatura à medida que ampliamos uma das suas partes, transformando-se assim numa reta. Basta ter em mente que há 500 anos pensava-se que a Terra era plana. Isto porque a escala humana não vê mais do que uma linha reta. Distanciando das formas que encontramos na maioria dos objetos que encontramos no nosso dia-dia. Olhando, por exemplo, para os brócolis, couve-flor, raios, árvores, etc. A figura 1, exemplifica a permanência da estrutura fractal.

Figura 1. Comparação dos Brócolis e o feto

Verificamos, no entanto, uma auto-similaridade em sua estrutura, caracterizando um fractal. Existem três categorias de fractais: os *fractais geométricos (fractais determinísticos)*, *fractais de fuga (gerados por computador)* e os *fractais aleatórios (fractais naturais)*. Estas categorias são determinadas pelo modo como o fractal é formado ou gerado.

As principais propriedades que caracterizam os fractais são a *auto-semelhança*, a *complexidade infinita* e a *dimensão* dos fractais, ao contrário do que sucede na geometria euclidiana, não é necessariamente uma quantidade inteira.

Os fractais estão ao nosso derredor, assim como a natureza. Alguns chamaram a atenção dos matemáticos, por exemplo, muitas conchas formam espirais, as estrelas do mar possuem um conjunto simétrico de braços, alguns vírus adotam formas geométricas regulares. Mas além dos padrões de forma, existem os padrões de movimento, como o andar humano, onde os pés tocam o solo num ritmo regular, esquerdo-direito, ou a SideWinder (figura 2), uma cobra do deserto que se move como a espiral de uma mola helicoidal, jogando seu corpo para frente em forma de curvas tentando minimizar seu contato com a areia quente. Mas a simetria da natureza é também muitas vezes imperfeita, existindo outra categoria de padrões naturais, padrões que existem onde pensávamos que tudo era aleatório e sem forma, estes padrões são chamados de fractais.

Figura 2 - SideWinder

O conceito de Fractais está intimamente ligado ao da *Teoria do Caos*, que vem do latim [chaos < gr. Cháos.] é um substantivo masculino que significa grande confusão ou desordem. (Aurélio – 2000)

Em uma pesquisa sobre esta teoria podemos perceber as idéias sendo corroboradas por diversos estudiosos, que diz respeito ao intrínseco significado da Teoria do Caos, para Almeida (2006): "A Teoria do Caos vem do seguimento da busca de um padrão em todo comportamento irregular". Consoante Batanete et al.(2005): "A Teoria do Caos baseia-se em demonstrações matemáticas e teorias que tentam descrever processos em movimento, ou seja, sistemas matemáticos que se modificam com o tempo".

Em sua gênese apresentaremos uma comparação entre a dimensão Euclidiana e Fractal. Siqueira (2005) apresentou o seguinte esquema (figura 3), para a dimensão dos fractais.

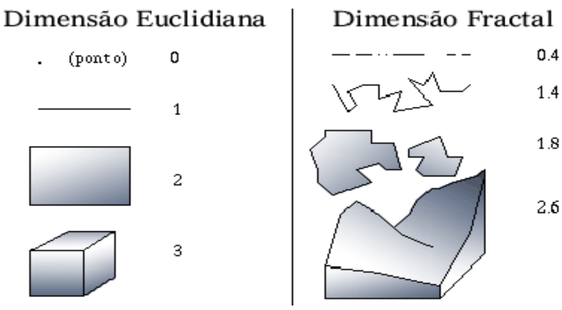


Figura 3. Comparação entre a dimensão Euclidiana e a dimensão Fractal. (Siqueira, 2005)

A dedução, por exemplo, de uma dimensão fractal usando como modelo o triângulo de Sierpinski, pode ser vista em seguida. Na cesta de Sierpinski existem 3 cópias idênticas de lado ½ e "massa" 1/3, 9 cópias idênticas de lado ¼ e "massa" 1/9, 27 cópias idênticas de lado 1/8 e "massa" 1/27, etc. Então, a cada redução de ½ no comprimento do lado, corresponde uma redução da "massa" em 1/3, ou seja, as relações "massa"/comprimento são:

$$\left(\frac{1}{3}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)d$$

$$\left(\frac{1}{3^2}\right)=\left(\frac{1}{2^2}\right)d$$

$$\left(\frac{1}{3^3}\right)=\left(\frac{1}{2^3}\right)d$$

e em geral, $\left(\frac{1}{3^n}\right)=\left(\frac{1}{2^n}\right)d$

então,

$$\log\left(\frac{1}{3}\right)^n = d\log\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow d=\left(\log 1^n-\log 3^n\right)/\left(\log 1^n-\log 2^n\right)=\left(-n\log 3\right)/\left(n\log 2\right)=1{,}58496$$

Portanto, a dimensão da Cesta de Sierpinski é 1,58496.

Já para objetos naturais, ou seja, não auto-semelhantes, a dimensão pode ser vista, como exemplo, na extensão do Rio Amazonas, no trecho que se situa entre as cidades de Macapá e Manaus. Neste trecho, a cidade de Parintins fica aproximadamente 600km de Manaus e 600km de Macapá. Tomaremos os trechos Manaus – Parintins (I) e o trecho Parintins – Macapá (II) que por sua vez são muitos parecidos com o rio inteiro. Para determinar a dimensão dos trechos supracitados (I e II), foi usado o processo chamado de "contagem de quadrados". Sabemos que a dimensão é dada por: $d=\log\left(N\right)/\log\left(1/s\right)$, onde s é o tamanho dos quadrados e N o número dos mesmos. Numa simples tabela para ambos os trechos temos:

Trecho I:

N	Log (N)	s	Log(1/s)
27	1,431 = log 27	1	0
58	1,763 = log 58	1/2	0,301

Quadro 1 – Análise do Trecho Manaus - Parintins

Trecho II:

N	Log (N)	s	Log(1/s)
22	1,342 = log 22	1	0
47	1,672 = log 47	1/2	0,301

Quadro 2 – Análise do Trecho Parintins - Macapá

Verificamos, então, que a dimensão do trecho I é:

$$d=\left(1{,}763-1{,}431\right)/\left(0{,}301-0\right)=1{,}103$$

Enquanto no trecho II é:

$$d = (1.67 - 1,342)/(0,301 - 0) = 1,096$$

Para uma aproximação mais extrapolada desses resultados teremos uma dimensão de 1,10, aproximadamente.

Corroborando com o que já foi visto, quanto aonde encontrar a Geometria Fractal, exporemos abaixo alguns ramos no qual essa Geometria também atua.

- Na medicina a dimensão fractal ajuda no diagnóstico, enquanto a geometria ajuda a medir o grau de tortuosidade da borda de um tumor, por exemplo.

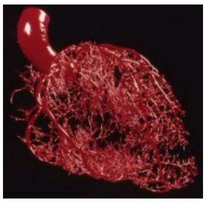


Figura 4. Sistema arterial de um coração

- Na arte não poderia ser diferente, belos fractais expostos como calendários e pôsteres, pelo artista americano Nicholas Rougeux.

Figura 5. Quadro Fractal Artístico Inspiration de Nicholas Rougeux.

- A geometria fractal se propõe a medir superfícies complexas e irregulares como a copa de uma árvore, variações climáticas, contorno de habitats etc.

Figura 6. Flor de Anne-queen

- A beleza dos fractais atua também na geografia, de forma também muito interessante, porém bem particular revelado através de um sistema fluvial.

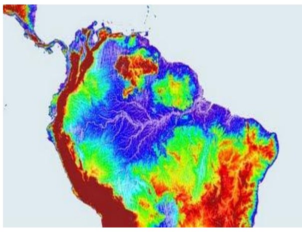


Figura 7. Sistema fluvial do rio amazonas

Poderíamos passar horas e horas apresentando a presença dos fractais, sua geometria e dimensão, em várias ciências. Contudo, nos damos por satisfeito, por hora, com alguns exemplos supracitados, deixando para outra oportunidade o aprofundamento do mais moderno modelo matemático apresentado.

Considerações Finais

Vale salientar que nossa preocupação não foi em construir um novo conceito para o assunto em questão, fractais, mas, trazer uma abordagem mais sucinta desse novo modelo matemático. O trabalho foi apoiado em outros já preparados como monografias, artigos, resumos, etc. O que não nos deixa inertes no conhecimento do mesmo, pois, tivemos um árduo trabalho de pesquisa a fim de peneirarmos o que realmente deveríamos colocar em seu bojo, pincelando ainda com grandes contribuições pessoais.

O que dá pra perceber, é que o estudo dos fractais é num mínimo cativante, pelo lúdico proporcionado por suas figuras com ricos padrões e cores. O que nos faz concluir que o incentivo ao estudo de alguns tópicos da geometria proporciona um dinamismo na matemática que costumamos estudar. Portanto, traremos como um dos nossos instrumentos de coleta a montagem de um fractal (anexos).

Referências

ALMEIDA, Arlete Aparecida Oliveira. **Os fractais na Formação Docente e sua Prática em Sala de Aula.** Dissertação apresentada á Banca Examinadora da PUC de São Paulo Para obtenção do título de Mestre em Ensino de Matemática ano 2006.

BACKERS, A. R. ; BRUNO, O. M. Trabalho apresentado ao departamento de Computação e Estatística da Universidade de São Paulo. Disponível em: http://www.dcc.ufla.br/infocomp/artigos/v4.3/art07.pdf .

BATANETE, Ana et al**. Natureza-Caos ou Ordem?** UNIVERSIDADE DE COIMBRA Faculdade de Ciências e Tecnologia, Departamento de Matemática Fundamentos e Ensino da Álgebra, 2005, p.80

Disponível em: http://www2.dm.ufscar.br/~caetano/iae2004/G9/historico.html.

FERNANDES APARECIDA, Jaqueline. **Fractais: Uma Nova Visão Da Matemática.** Monografia apresentada ao Centro Universitário de Lavras. Unilavras Lavras MG 2007.

FRACTAL. Wikipédia Enciclopédia Livre Disponível em: http//:pt.wikipedia.org/wiki/Geometria_dos_fractais.

IEZZI, Gelson & HAZZAN, Samuel – Fundamentos de Matemática Elementar, 4: sequências, matrizes, determinantes, sistemas. 7 ed. – São Paulo: Atual, 2004.

JANOS, Michael: Geometria Fractal – RJ – Editora Ciência Moderna Ltda.,2008.

MANDELBROT, Benoit. Biografia de Matemáticos. Disponível em: http://www.santarita.g12.br/matematicos/gm3/benoit_mandelbrot.htm

Miniaurélio Século XXI Escolar: O minidicionário da língua portuguesa / Aurélio Buarque de Holanda Ferreira; 4 ed. ver. ampliada. – Rio de Janeiro: Nova Fronteira, 2000.

MUREB SALLUM, Élvia. IME – USP : Fractais no Ensino Médio - Revista do Professor de Matemática 57, 2005. Artigo publicado.

OLIVEIRA, Dejanir. **A Geometria Fractal No Ensino Fundamental e Médio**. Monografia apresentada à banca da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras de Presidente Venceslau – SP. (Fafipreve) - Presidente Venceslau 2008.

SANTOS, C; OLIVEIRA, A. A. Universidade Federal de São Carlos.

SIQUEIRA, Rodrigo. Grupo Fractarte **Janelas para o infinito**. Exposição de Fractais. Disponível em: http://www.insite.com.br/fractarte/artigos.php

TEORIA DO CAOS - Wikipédia, a enciclopédia livre. Disponível em:

<http://pt.wikipedia.org/wiki/Teoria_do_caos>.

TEORIA DO CAOS. Wikipedia Enciclopédia Livre. Disponível em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Efeito_borboleta .

Anexos

Construção de um Fractal numa Folha de Papel

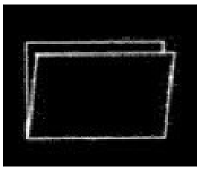
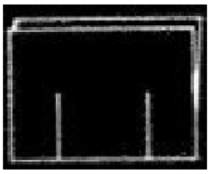
Material:

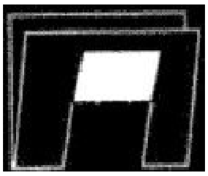
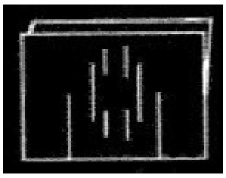
• Folha de papel A4

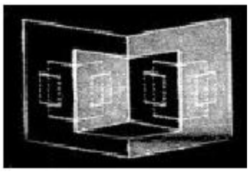
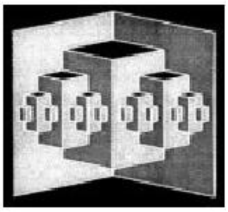
• Tesoura

Instruções:

Passo 1. Meça o comprimento da folha (= *a*); **Passo 2**. Meça a largura da folha (= *b*); **Passo 3**. Dobre a folha de papel ao meio; **Passo 4**. Faça 2 cortes de comprimento *a/4* afastados de cada lado do papel *b/4;* **Passo 5**. Dobre o segmento criado pelos dois cortes; **Passo 6**. Repita os passos 1 - 5, mas agora para a parte da folha que acabou de dobrar; **Passo 7**. Continue o processo o máximo de vezes possíveis; **Passo 8**. Dobre a folha A4 formando um ângulo reto; **Passo 9**. Dobre a parte da folha obtida no passo 5, de modo a formar um ângulo reto com a dobra do passo 8; **Passo 10**. Repita o passo 9 para as outras partes da folha.

Passo 1.  Passo 3.  Passo 4. 

Passo 5.  Passo 8. 

Passo 9.  Passo 10. 

Disponível em: http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm14/index.htm