UM ESTUDO SOBRE DIFICULDADES EM DEMONSTRAÇÕES DE LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA

Prof. Ma. Debora Cristiane Barbosa Kirnev
Colégio Interativa Londrina/Londrina -Paraná- Brasil
deborabarbosa09@yahoo.com.br

Prof. Dr[a] Angela Marta Pereira das Dores Savioli
Universidade Estadual de Londrina/Londrina-Paraná-Brasil
angelamarta@uel.br

Resumo:

Em um curso de matemática, espera-se que estudantes demonstrem proposições e para isso é necessário um processo mental, o raciocínio lógico dedutivo, para que argumentem coerentemente, e que é desenvolvido para mostrar que proposições matemáticas são verdadeiras. Apresentamos um trabalho que visa detectar dificuldades de graduandos em demonstrar sentenças matemáticas. À luz de teóricos, como Balacheff (1987) e Dreyfus (2002), sistematizamos uma proposta de tarefas, a fim de analisarmos que dificuldades surgem por meio da análise de registros escritos apresentados pelos graduandos durante o processo de realização dessas atividades.

Palavras-chave: Educação Matemática; Demonstrações; Raciocínio Lógico Dedutivo.

1. Introdução

O raciocínio lógico dedutivo é desenvolvido assumindo axiomas ou postulados como princípios primitivos aceitos sem demonstrações e de teoremas e proposições que são provados usando o método dedutivo. Como afirmam Moreira e David (2005, p.22) "[...] devido sua estruturação axiomática, todas as provas se desenvolvem apoiadas nas definições e nos teoremas anteriormente estabelecidos" e, ainda, explicitam que as "definições formais e as demonstrações rigorosas são elementos importantes tanto durante o processo de conformação da teoria [...] quanto na apresentação sistematizada da teoria já elaborada".

Segundo esses autores na matemática escolar[1], as definições e provas assumem outros papéis. Para o professor em formação inicial, deparar-se com essa sistematização pode ser um tanto obscuro, pois comumente não são exigidas provas e demonstrações na Educação Básica. Conforme Moreira e David (2005, p.23) "[...] a 'validade' dos resultados matemáticos a serem discutidos no processo de escolarização básica não está posta em dúvida; ao contrário, já está garantida, a priori¸ pela própria Matemática Acadêmica". Tendo em vista que os tratamentos dados à matemática escolar e à acadêmica assumem diferentes aspectos quanto às demonstrações de resultados, uma das funções de se aprender a demonstrar é provar resultados que antes eram assumidos como incontestáveis. Na Educação Básica, por exemplo, a soma de dois números inteiros gozar da propriedade comutativa é um argumento válido aceito sem demonstração, o que não ocorre em um curso superior.

Apresentamos alguns resultados de uma pesquisa que buscou investigar que dificuldades graduandos teriam ao lidar com demonstrações tidas como triviais[2]; como se familiarizam com as formas de demonstrações; e, como trabalham com provas de teoremas e proposições, validando-os.

Propusemos a graduandos de matemática tarefas abrangendo algumas formas de demonstração, isto é, demonstração direta, direta condicional ou contrapositiva, indireta por absurdo e por contra exemplo[3], envolvendo os conteúdos de conjuntos e funções, a fim de verificar possíveis dificuldades a partir da categorização[4] de Balacheff (1987) e caracterizações do pensamento matemático avançado de Dreyfus (2002).

2. Referencial Teórico

Que diferenciações há entre os termos provas e demonstrações? Segundo Garnica (1996) "provas e demonstrações são tidas com sinônimos: é o que atesta a veracidade ou autenticidade [...] a dedução que mantém a verdade de sua conclusão apoiando-se em premissas admitidas como verdadeiras."

---

[1] Entenderemos matemática escolar como aquela que é trabalhada na Educação Básica.
[2] Conteúdos como conjuntos e funções, que já são abordados desde o Ensino Médio.
[3] As formas de demonstrações são referenciadas segundo Gerônimo e Franco (2006).
[4] Definiremos posteriormente.

Almouloud (2009) afirma que os termos são utilizados como sinônimos e muitos autores fazem uso dos termos provas e demonstrações como tal. Contudo, recorremos à distinção realizada por Balacheff (1982), o qual firma que provas são explicações realizadas em um determinado momento para um determinado grupo social, enquanto denomina as demonstrações como provas particulares.

E sobre argumentação? Ao raciocinar e fazermos inferências podemos argumentar de maneira lógica, apenas seguindo os princípios da Lógica Formal. Como afirma Salmon (2010, p. 1), a lógica "trata de argumentos e inferências. Um dos seus objetivos fundamentais consiste em proporcionar métodos que permitem distinguir entre argumentos e inferências logicamente certos e aqueles que não o são."

Em Matemática é necessário definir os conceitos de modo que esta definição satisfaça as características de tal conceito e somente deste conceito e demonstrar as propriedades relacionadas a este, o que difere esta ciência das demais que aceitam provas empíricas.

Bicudo (2002) afirma que, em termos da lógica, uma demonstração trata-se de um sistema formal que é a parte sintática de um sistema axiomático, composto pela linguagem e seus símbolos, expressões e fórmulas, pelos axiomas e pelas regras de inferência. Estes componentes afirmam sob certas condições a conclusão da regra que pode ser inferida de outras regras chamadas de hipótese.

Domingues e Iezzi (2003) definem demonstração como "uma sucessão articulada de raciocínios lógicos que permite mostrar que um resultado proposto é consequência de princípios previamente fixados e de proposições já estabelecidas."

Durante um curso de matemática é essencial que o graduando utilize formas de demonstrações, essas são as ferramentas que validarão afirmações matemáticas. Sobre qual o melhor método para se demonstrar ressalta-se que em "um argumento qualquer, não existe regra para determinar qual o melhor método a ser utilizado mas, com certeza, resolver vários exercícios nos fornece a intuição necessária para decidirmos o melhor caminho." (GERÔNIMO E FRANCO 2006, p. 61).

Dreyfus (2002), ao abordar sobre o pensamento matemático avançado, o caracteriza por meio de processos mentais nos quais os estudantes realizam representações mentais de objetos matemáticos, e ainda difere esta forma de pensamento do pensamento elementar por apresentar: a) reflexões sobre a própria experiência matemática ao lidar com problemas não triviais; b) complexidade durante os processos mentais; c) uma variedade de processos mentais que se interagem.

Entendemos que as demonstrações matemáticas exigem dos graduandos processos mentais que caracterizam o pensamento matemático avançado. Para a realização desses processos se faz necessário que estes abstraiam e representem objetos matemáticos, fazendo uso da argumentação para explicitar a sua forma de raciocínio lógico dedutivo.

Sobre as representações, elas podem ser simbólicas ou mentais, Dreyfus as define como:

> A representação simbólica é externamente escrita ou falada, geralmente com o objetivo de tornar a comunicação sobre o conceito mais simples. Uma representação mental, por outro lado, refere-se a esquemas internos ou de quadros de referência que a pessoa utiliza para interagir com o mundo externo. (Dreyfus, 2002, p.31)

Para o mesmo autor, as abstrações exigem a interação de vários processos, sendo estes: a representação, a generalização e a sintetização. Dreyfus (2002) define que “generalizar é derivar ou induzir a partir de indicações, para identificar pontos em comum, para expandir domínios de validade” e, que, “ sintetizar são formas de combinar ou compor partes de tal forma que formam um todo.”

Balachef (1987) apresenta dois tipos de demonstrações denominadas de prova pragmática e prova conceitual. As provas pragmáticas são produzidas por pessoas que tomam como base fatos e ações, sem um formalismo lógico, também tida como “mostrações”, pois os resultados apresentados são por meio de exemplos. As provas conceituais se caracterizam por formulações de propriedades e as possíveis relações entre elas. Deste modo as demonstrações matemáticas seriam um tipo de prova conceitual.

Balacheff (1987) admite existir vários níveis de provas pragmáticas e provas conceituais que podem ser categorizadas da seguinte maneira:

- *Empirismo ingênuo: consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a verificação de alguns casos. É considerado o primeiro passo no processo de generalização;*
- *Experimento crucial: consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a verificação para um caso especial, geralmente, não familiar;*

- *Exemplo genérico: consiste em afirmar a verdade de uma proposição após a manipulação de alguns exemplos de modo a deixá-los com uma característica que representa uma classe de objetos;*
- *Experimento de pensamento: consiste em afirmar a verdade de uma proposição de forma genérica, porém baseada no estudo de alguns casos específicos.*

Segundo Balacheff (1987), as provas pragmáticas são categorizadas ao nível do empirismo ingênuo e do experimento crucial e as provas conceituais são consideradas ao nível do experimento de pensamento. Há ainda, as provas ao nível do exemplo genérico que caracterizam um período de transição entre as provas pragmáticas e as provas conceituais.

Bell (1976), De Villiers (1990,1999) e Hanna e Jahnke (1996) concordam que são funções das provas e demonstrações: a) verificação; b) explanação; c) sistematização; d) descoberta; e) comunicação; f) construção de uma teoria empírica; g) exploração do significado de uma definição ou a consequências de um pressuposto; h) incorporação de um fato bem conhecido em um novo quadro e, assim, visualizá-lo em uma nova abordagem.

Garnica (2002) afirma que a prova rigorosa, realizada nos termos da lógica, é tida como elemento de prática científica da Matemática e fundamental na formação inicial do professor em uma abordagem crítica dos objetos matemáticos. Em suas referências sobre prova rigorosa, vale ressaltar que: "a prova rigorosa é elemento essencial para compreendermos o funcionamento do discurso matemático e o modo como são formadas as concepções em um ambiente de sala de aula."

Enfim, o desenvolvimento de demonstrações matemáticas deve propiciar também o desenvolvimento intelectual do estudante e a familiaridade com as sentenças matemáticas a fim de que este possa ter autonomia ao lidar com tais sentenças. Nas análises recorremos tais autores por corroborarmos com os mesmos.

3. Procedimentos metodológicos

A pesquisa foi desenvolvida em uma universidade do norte do Paraná e o principal instrumento de coleta de dados foram tarefas envolvendo demonstrações matemáticas.

Os sujeitos de pesquisa foram dezesseis graduandos de um curso de Licenciatura em Matemática matriculados na disciplina de *Estruturas Algébricas*. Esta disciplina tem como pré-requisito a conclusão da disciplina de *Elementos da Matemática*, na qual são trabalhadas as diferentes formas de demonstrações.

A preparação das tarefas levou em consideração que necessitávamos de algum conteúdo para direcionar as formas de demonstração. Ao pesquisar a ementa da disciplina de *Elementos de Matemática*, verificamos que os primeiros conteúdos trabalhados envolvendo demonstrações são conjuntos e funções.

Deste modo, preparamos uma proposta piloto utilizando como principal referência o livro de Domingues e Iezzi (2003), que consta na bibliografia da disciplina de Estruturas Algébricas que os sujeitos da pesquisa cursavam na época da aplicação. A proposta inicial foi discutida em um grupo de estudo, a fim de refiná-la para a aplicação, promovendo-lhe melhorias.

A aplicação dessa proposta ocorreu em dois encontros. O primeiro contemplou questões envolvendo definições acerca de elementos relacionados com conjuntos e funções além de quatro demonstrações. No segundo encontro foram apresentadas cinco proposições a serem demonstradas, envolvendo ambos os conteúdos de conjuntos e funções.

Considerando que a aplicação das tarefas ocorreu em dois dias, em uma pré-análise das propostas de tarefas, obtivemos três grupos distintos: a) os sujeitos que realizaram apenas a primeira proposta de tarefas; b) os sujeitos que realizaram ambas as propostas de tarefas; c) os sujeitos que realizaram apenas a segunda proposta de tarefas. Neste trabalho averiguaremos dificuldades nas formas de demonstração no grupo que participou das duas partes da aplicação das tarefas.

4. Resultados da Pesquisa

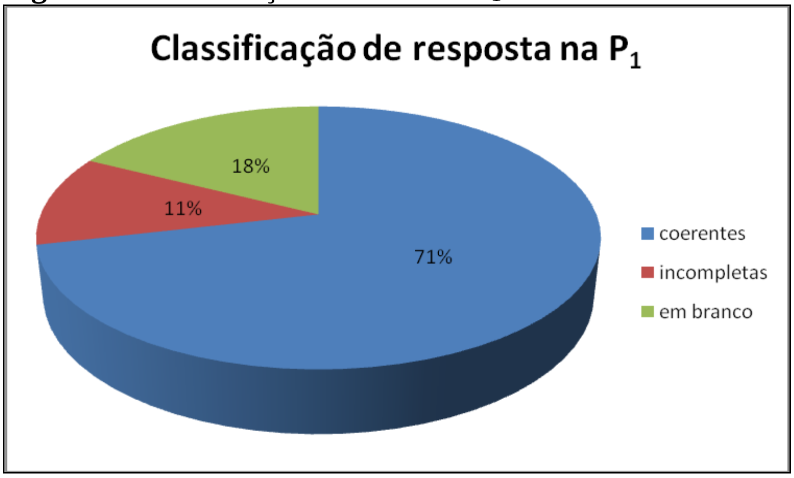
Após a aplicação das propostas de tarefas, iniciamos o processo de análise, no qual obtivemos os resultados apresentados neste trabalho.

Realizamos uma análise inicial de natureza quantitativa e os registros escritos foram classificados em coerente (C), incoerente (I), em branco (B), ou ainda, justificada (J). Entende-se neste trabalho que uma questão está :

- (C) *coerente* se for possível classificá-la nas categorizações de Balacheff (1987);
- (I) *incoerente* se houve uma tentativa de resolução, mas esta foi mal sucedida;
- (B) *em branco* para as questões que não apresentaram nenhum registro;
- (J) *justificada* para as questões que não houve uma tentativa de resolução, porém o estudante informou que, por exemplo, não sabia resolver.

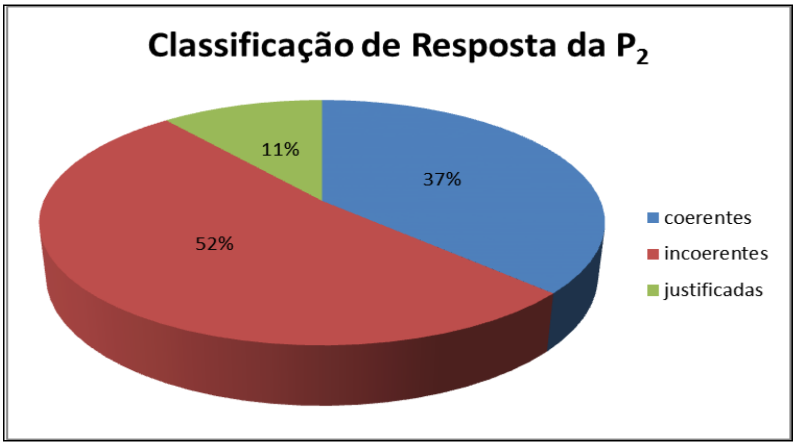
Nos gráficos a seguir apresentamos o levantamento dos tipos de respostas obtidas por estudantes em ambas as propostas de tarefas.

Figura 1 – Sintetização os dados da P_1



Fonte: dados da coleta

Figura 2 – Sintetização os dados da P_2



Fonte: dados da coleta

Comparando a primeira proposta com a segunda, diminuiu percentualmente trinta e quatro por cento o número de resoluções coerentes. Atribuímos essa diferença à natureza das tarefas. Na P_1 as tarefas de um a onze não exigem demonstrações, mas sim conceitos e definições. Quanto às tarefas doze e treze da P_1 e as tarefas da P_2, exigem alguma forma de demonstração: seja direta, contrapositiva, por redução ao absurdo, ou ainda contraexemplo. Entendemos que haja dificuldade em detectar que a questão da proposta de tarefa se trata em uma demonstração nos casos classificados como incoerentes (I) das questões doze e treze da P_1 e nas questões da P_2.

Na primeira proposta de tarefas, as questões três e doze apresentaram os menores números de questões coerentes, isto evidencia que há dificuldades nas resoluções das questões. Na segunda proposta de tarefas, a questão um, item b, não foi demonstrada por nenhum desses estudantes, porém todos tentaram resolvê-la. Organizando os dados do quadro I temos:

Quadro I – Síntese do número de respostas obtidas nas tarefas

	NÚMERO DE RESPOSTAS NA P_1				NÚMERO DE RESPOSTAS NA P_2			
Estudante	C	I	B	J	C	B	I	J
A_1	16	4	3	0	3	1	0	1
A_2	13	6	4	0	1	4	0	0
A_4	22	1	0	0	3	2	0	0
A_7	18	1	4	0	1	3	0	1
A_8	17	0	6	0	2	3	0	0
A_{10}	12	4	7	0	0	3	0	2
A_{13}	17	2	4	0	3	2	0	0

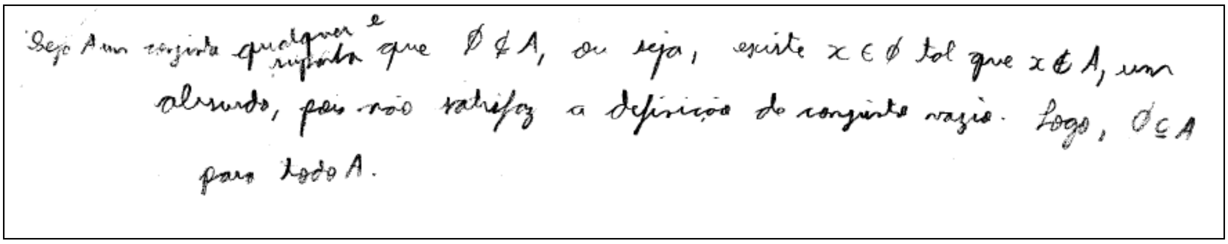
Fonte: própria autora

A pesquisa apresentada evidenciou dificuldades em demonstrações matemáticas e neste trabalho nos restringiremos a analisar as tarefas doze e treze, item a, da primeira proposta de tarefas, em uma abordagem qualitativa. Consideramos apenas os sujeitos que realizaram ambas as aplicações. A partir de uma análise crítica elencamos as dificuldades evidenciadas nos registros escritos dos estudantes em proposições matemáticas dessas tarefas.

12) Demonstre que para qualquer conjunto A, temos que $\emptyset \subseteq A$.

Dentre os graduandos que realizaram ambas as propostas de tarefas, apenas o estudante A_{13} demonstrou a proposição por *redução ao absurdo*, entendemos estar coerente quanto à forma de demonstração e utilizando uma sequência lógica dedutiva. Vejamos o protocolo a seguir:

Figura 3 – Protocolo do estudante A_{13} da P_1 tarefa $_{12}$.

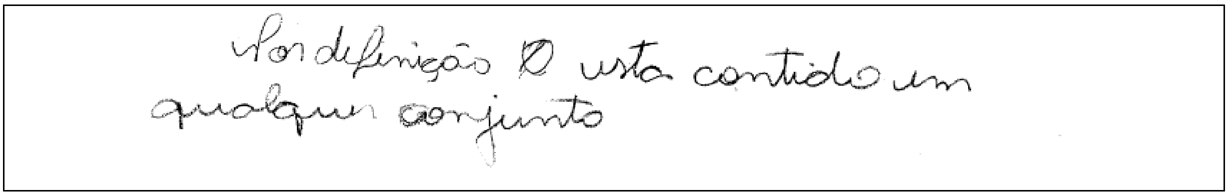

Seja A um conjunto qualquer e suponha que $\emptyset \not\subseteq A$, ou seja, existe $x \in \emptyset$ tal que $x \notin A$, um absurdo, pois não satisfaz a definição do conjunto vazio. Logo, $\emptyset \subseteq A$ para todo A.

Fonte: própria autora

O estudante A_{13} apresenta uma argumentação por meio de sentenças verdadeiras caracterizando a *demonstração por absurdo*, neste caso há a demonstração da proposição. Segundo a classificação de Balacheff (1987), temos o experimento de pensamento e, segundo Dreyfus (2002), o estudante abstraiu a demonstração da proposição e representou este processo por meio dos registros escritos.

Os estudantes A_1, A_2, A_4 responderam a proposição de modo similar ao exposto no protocolo a seguir:

Figura 4 – Protocolo do estudante A_1 da P_1 tarefa $_{12}$.


Por definição $\emptyset$ esta contido em qualquer conjunto

Fonte: própria autora

Uma vez que indicamos na questão que se tratava de uma demonstração, estes estudantes apresentaram dificuldades em apresentar uma sequência lógica dedutiva, como também em diferenciar *proposição de definição*. Segundo a classificação de Balacheff (1987), podemos classificar a demonstração como *empirismo ingênuo*, pois há uma argumentação para justificar a proposição, porém não se demonstrou o resultado.

13) Demonstre que, se A, B, e C são conjuntos, então: a) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Os graduandos A_1, A_2, A_4, A_7 e A_{13} realizaram a demonstração da proposição pela forma direta, provando as duas inclusões que garantem a igualdade da proposição. Utilizaram os conectivos adequados e as definições corretas para interseção e união; construíram uma sequência lógica dedutiva válida. A diferença entre as demonstrações está na forma de registrar. Temos a seguir o protocolo de A_4 para exemplificar uma prova matemática desses graduandos.

Figura 5 – Protocolo do estudante A_4 da P_1 tarefa $_{13a}$.

Devemos mostrar que:
i) $A\cap(B\cup C) \subset (A\cap B)\cup(A\cap C)$ e
ii) $(A\cap B)\cup(A\cap C) \subset A\cap(B\cup C)$

Demonstração:

i) Seja $x \in A\cap(B\cup C)$ ou seja, $x\in A$ e $x \in (B\cup C)$. sendo assim $x\in A$ e $x \in B$ ou $x\in C$, deste modo $x \in A$ e $x\in B$, ou $x\in A$ e $x \in C$, isto é, $x \in (A\cap B)$ ou $x\in(A\cap C)$ logo $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$. Portanto $A\cap(B\cup C) \subseteq (A\cap B)\cup(A\cap C)$

ii) Seja $x \in (A\cap B)\cup(A\cap C)$, ou seja. $x\in(A\cap B)$ ou $x\in(A\cap C)$, isto é $x\in A$ e $x\in B$ ou $x \in A$ e $x\in C$, deste modo $x\in A$ e $x \in B$ ou $x\in C$, sendo assim $x\in A$ e $x\in(B\cup C)$, logo $x\in A\cap(B\cup C)$. Portanto $(A\cap B)\cup(A\cap C) \subset A\cap(B\cup C)$.

Por (i) e (ii) podemos concluir que $A\cap(B\cup C) = (A\cap B)\cup(A\cap C)$.

Fonte: registro escrito do protocolo A_4: questão treze a) da P_1

Ao analisarmos os processos mentais, segundo Dreyfus (1991), envolvidos nesta forma de demonstração, apontamos que ocorreram processos de visualização; tradução dos símbolos, análise das sentenças, utilização da notação matemática; compreensão de definições de interseção e união de conjuntos. Os processos mentais descritos auxiliam no processo de sintetização, formalização e prova da sentença matemática conforme verificada no registro escrito.

Os processos mentais identificados corroboram para categorizarmos este grupo em um caso de *experimento de pensamento*, segundo Balacheff (1987), pois utilizam-se dos conceitos e definições para argumentarem.

No caso específico de A_{10}, há demonstração da sentença por meio de conectivos lógicos e utilização equivalências para garantir a igualdade da proposição.

Figura 6 – Protocolo A_{10} da P_1 tarefa $_{13a}$.

Seja $x \in [A \cap (B \cup C)] \Leftrightarrow \{(x \in A) \wedge [x \in (B \vee C)]\} \Leftrightarrow \{(x \in A) \wedge [(x \in B) \vee (x \in C)]\} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \{[(x \in A) \wedge (x \in B)] \vee [(x \in A) \wedge (x \in C)]\} \Leftrightarrow [x \in (A \wedge B)] \vee [x \in (A \wedge C)] \Leftrightarrow x \in [(A \wedge B) \vee (A \wedge C)] \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Como só usamos equivalências lógicas a recíproca é verdadeira. □

Fonte: registro escrito do protocolo A_{10}: questão treze a) da P_1

Ao concluir a demonstração, afirma "como só usamos[5] equivalências lógicas a recíproca é verdadeira". Esta afirmação permitiu uma dupla interpretação, a primeira que a igualdade já esta garantida pelas equivalências não havendo mais o que provar, ou, a segunda que ao utilizar equivalências lógicas é condição suficiente e a recíproca verdadeira é condição necessária, ou seja, "se usamos equivalências lógicas, a recíproca é verdadeira". Deste modo, evidencia que teria que se provar a recíproca, mas que esta seria de modo análogo. Consideramos que em uma demonstração não se pode afirmar sentenças ambíguas.

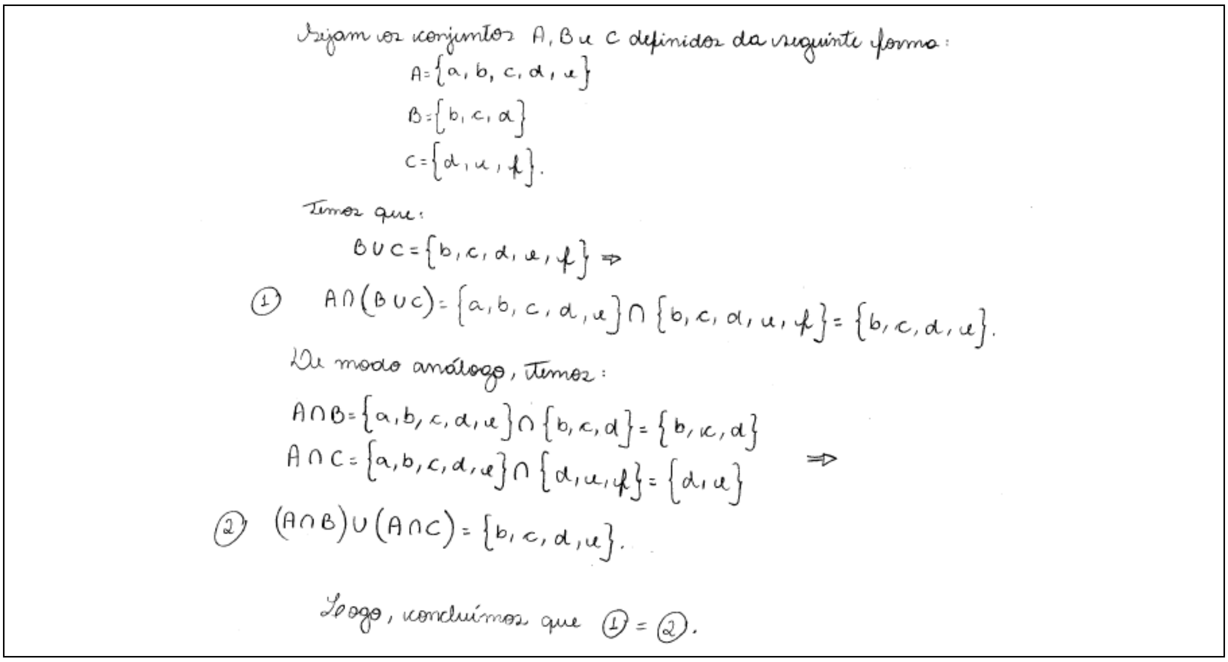
Entendemos que este graduando, desenvolveu os processos mentais[6] de *sintetização*, *formalização* e *generalização* de modo singular, pois a argumentação por meio dos conectivos mostra que o estudante criou procedimentos padronizados de forma a

[5] Grifo nosso.
[6] Segundo Dreyfus (1991).

compor as partes da demonstração. Logo, o estudante desenvolveu a sistematização, uma das habilidades necessárias para se demonstrar.

No caso de A_8, utilizou-se de exemplos particulares para demonstrar a proposição. Vejamos o protocolo a seguir:

Figura 1 – protocolo A_8: questão treze a) da P_1


Sejam os conjuntos A, B e C definidos da seguinte forma:

$A=\{a, b, c, d, e\}$

$B=\{b, c, d\}$

$C=\{d, e, f\}$.

Temos que:

$B \cup C=\{b, c, d, e, f\} \Rightarrow$

(1) $A \cap (B \cup C)=\{a, b, c, d, e\} \cap \{b, c, d, e, f\}=\{b, c, d, e\}$.

De modo análogo, temos:

$A \cap B=\{a, b, c, d, e\} \cap \{b, c, d\}=\{b, c, d\}$

$A \cap C=\{a, b, c, d, e\} \cap \{d, e, f\}=\{d, e\} \Rightarrow$

(2) $(A \cap B) \cup (A \cap C)=\{b, c, d, e\}$.

Logo, concluímos que (1) = (2).

Fonte: registro escrito do protocolo A_8: questão treze a) da P_1

Segundo Dreyfus (1991), não ocorreram os processos mentais de *reconhecer* e *traduzir*. A falta desses processos comprometeu o desenvolvimento da demonstração e outros processos não foram desenvolvidos, como o de *sintetizar* e *provar*.

Segundo Balacheff (1987), um caso de *empirismo ingênuo*, em que o estudante acredita ter provado apenas apresentando um exemplo. Segundo Hanna (2000), não se cumpriu algumas das funções de se demonstrar, a de explorar o significado de uma definição e analisar as consequências de um pressuposto, pois esse graduando recorre a exemplos para provar a sentença.

Concluí-se que há dificuldades relacionadas a demonstrações matemáticas quanto a forma e conteúdo. Nos casos de A_8 e A_{10} detectamos dificuldades referentes ao desenvolvimento da forma de demonstração. Em ambos os casos, a argumentação não caracteriza uma sequência lógica dedutiva. No caso de A_8 há dificuldades relacionadas ao conteúdo de conjuntos.

Agradecimentos

Agradecemos à CAPES e à Fundação Araucária pelo apoio financeiro.

5. Referências

ALMOULOUD, S. A. **Prova e demonstração em matemática: problemática de seus processos de ensino e aprendizagem**. EMANPED, GT: Educação Matemática / n.19, 2009. Disponível em , http://www.ufrrj.br/emanped/paginas/conteudo_producoes/docs_30/prova.pdf acesso em 15/10/2010.

BALACHEFF, N.. **Preuve et démonstration en mathématiques au collège. Recherches em Didactique des Matémathiques**, Grenoble, 1982, v. 3, n. 3, 261-304.

BALACHEFF, N.. Processus de preuve et situations de validation. In: **Educational Studies in Mathematics**, 1987, Vol. 18, n. 2,147-176.

BALACHEFF , N.. Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. In David Pimm (Ed.). **Mathematics Teachers and Children**. Hodder and Stoughton, London, 1988, 216-229.

BALACHEFF, N.. Is Argumentation an Obstacle? In: **International Newsletter on the Teaching and Learning of Mathematical Proof**. Grenoble, 1999, n.1, may-jun.

BALACHEFF, N. . **The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof. Les Cahiers du Laboratoire Leibniz**, Grenoble, 2004, n. 109.

BICUDO, I.. **Demonstração em Matemática**. Bolema, ano 15, nº 18, 79-90. 2002

DOMINGUES, H. H. ; IEZZI, G.. **Álgebra Moderna**. 4ª ed. São Paulo: Atual, 2003.

DREYFUS, T.. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: Tall, D.. **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, 199, p. 25-41.

GARNICA, A. V. M. . As **Demonstrações em Educação Matemática: um ensaio**. Bolema, 2002, ano 15, nº18,91-99.

GERÔNIMO, J. R., FRANCO, V.S.. **Fundamentos de Matemática:** uma introdução à Lógica Matemática, Teoria dos Conjuntos, Relações e Funções. Maringá: Eduem, 2006.

HANNA, G. . Proofs that proove and proofs that explain. Proceedings of the 13rd., **Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**. (PME 13). Paris, França. (2): 1989, p. 45–51.

HANNA, G. . **More than Formal Proof. For the Learning of Mathematics**. 9 (1): 1989, p.20–23.

HANNA, G. . Proof, explanation and exploration: an overview. **Educational Studies in Mathematics** 44, 2000, p. 5–23.

HANNA, G., BARBEAU, E. . Proofs as bearers of mathematical knowledge. **ZDM Mathematics Education** *40*, 2008, p. 345 -353.

KIRNEV, D. C. B. . **Dificuldades evidenciadas em registros escritos a respeito de demonstrações matemáticas**. Dissertação em Ensino de Ciências e Educação Matemática, UEL, Londrina, PR, 2012.

MOREIRA, P. C.; DAVID, M. M. M.S.. **A formação matemática do professor: licenciatura e prática docente escolar**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005. p.22-23.

SALMON, W. C.. **Lógica**. 3ª ed. Rio de Janeiro: LTC, 2010.

TALL, D.. The psychology of advanced mathematical thinking. In: Tall, D.. **Advanced mathematical thinking**. Dordrecht: Kluwer, 1999, p. 3-21.

TALL, D. Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. **Plenary Lecture, Conference of the International Group for the Psychology of Learning Mathematics**, Recife, Brazil, July 1995, vol I, p. 161–175.