Encontro Nacional de Educação Matemática
Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas
Curitiba, PR - 18 a 21 de julho de 2013

A INTUIÇÃO SEGUNDO POINCARÉ E O PRINCÍPIO DE CAVALIERI NA RESOLUÇÃO DE ALGUMAS QUESTÕES RELACIONADAS AO CÁLCULO

André Lúcio Grande
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)
Bolsista CAPES
andremath@uol.com.br

Resumo:
Este trabalho, parte integrante de uma pesquisa em andamento, visa analisar as estratégias bem como o uso da intuição e do rigor dos alunos na resolução de algumas questões relacionadas ao Cálculo, especificamente sobre o problema da determinação de áreas de figuras planas e o volume de sólidos geométricos por meio do princípio de Cavalieri. O referencial teórico utilizado envolve as ideias ligadas ao intuicionismo segundo o filósofo e matemático francês Henri Poincaré, que discute o papel da intuição, da lógica e da hipótese na construção do pensamento cientifico. A pesquisa apresenta características do tipo qualitativa, tendo como procedimentos metodológicos a elaboração e a análise da resolução de questões efetuadas por alunos de uma faculdade pública do estado de São Paulo. Como resultado, diagnosticaram-se algumas características do raciocínio intuitivo descritas por Poincaré que merecem reflexões no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo.

Palavras-chave: Intuição, rigor, sequência de ensino, princípio de Cavalieri, ensino e aprendizagem do Cálculo.

1. Introdução

De um modo geral, no âmbito da Educação Matemática, o ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral (CDI) vêm despertando o interesse de muitos pesquisadores nos últimos anos. Observa-se um número cada vez maior de pesquisas que tratam desse assunto, reflexo em grande medida da utilização de seus conceitos, teoremas e algoritmos na resolução de muitas questões e problemas da Matemática, além do fracasso escolar no que diz respeito ao desempenho dos alunos no ensino superior. Para Igliori (2009):

> É fato indiscutível que é alto o porcentual de estudantes no nível superior cujo desempenho na aprendizagem da Matemática, em especial de Cálculo, tem deixado muito a desejar. A nosso ver, a pesquisa tem papel

> fundamental no levantamento de causas e na indicação de caminhos a serem trilhados na busca de melhorias. (IGLIORI, 2009, p.13).

Muitas pesquisas endossam e relatam as dificuldades, a incompreensão e os obstáculos apresentados pelos alunos ao entrarem em contato com alguns conceitos abordados num curso de Cálculo. Alguns estudantes, em muitas situações, podem se sentir como se estivessem “pisando” num novo mundo que fora até então totalmente inexplorado, mesmo pressupondo-se conhecer alguns assuntos abordados no ensino fundamental e médio, como funções, números reais e etc. Pode-se compreender melhor esse fato segundo a afirmação de Silva (2009):

> Ao ingressarem no curso superior, os estudantes levam suas expectativas: como no ensino médio logravam sempre boas avaliações em matemática, esperam que o curso de Cálculo não represente problemas para o seu aprendizado. Entretanto, ao se deparar com questões globais envolvendo os temas anteriormente estudados, em geral de modo departamentalizado, e com novas questões impactantes, como o infinito, as aproximações, a continuidade, a incomensurabilidade, quase sempre vêem frustradas suas expectativas iniciais. (SILVA, 2009, p.1).

O fato é que não somente o impacto ao se deparar com questões globais e até mesmo novas pode causar frustrações nos alunos uma vez que no curso de Cálculo exige-se que ele estabeleça relações entre inúmeros conteúdos anteriormente estudados, e não da maneira como afirma Silva, mais departamentalizada e apenas baseada na resolução de problemas por meio de um algoritmo, teorema ou fórmula memorizável.

Essa utilização de algoritmos e técnicas algébricas é decorrente, de certa forma, do modelo de ensino de Cálculo que privilegia a apresentação dos conceitos por meio de definições, demonstrações e exercícios e não favorece inicialmente o desenvolvimento cognitivo do aluno como o uso de analogias e da intuição na construção do conhecimento, seguido da apresentação de exemplos e contraexemplos até a etapa da demonstração, o que em grande medida se reflete nas propostas de ensino dos conceitos fundamentais do Cálculo.

A Matemática é uma ciência que se utiliza do raciocínio lógico-dedutivo, entretanto em muitas situações, no que se refere ao ensino e aprendizagem de seus conceitos, não são explorados alguns aspectos cognitivos como a intuição, a imaginação, o uso de recursos gráficos e geométricos, principalmente no processo de construção do conhecimento, sendo que o tratamento dos objetos matemáticos e feito de maneira axiomática.

Ávila (2011) explicita e defende o ponto de vista do ensino baseado em características intuitivas:

> A ideia de que o pensamento matemático se reduz a seus aspectos lógico-dedutivos – uma ideia muito difundida, mesmo entre professores de Matemática – é incompleta e exclui o que há de mais rico nos processos de invenção e descoberta. O pensamento matemático vai muito além do raciocínio dedutivo. Em seus aspectos mais criativos, a Matemática depende da intuição e da imaginação, às vezes até mais que da dedução. (ÁVILA, 2011, p. 4).

Sobre a questão da intuição e do rigor no ensino e aprendizagem do Cálculo, Reis (2001) apresentou uma pesquisa que buscava compreender como a relação tensional entre rigor e intuição ocorre e manifesta-se no ensino universitário de Cálculo e Análise. Seu trabalho consistiu em verificar como essa relação encontra-se nos manuais didáticos dessas disciplinas, como ela é percebida e/ou enfrentada por quatro autores de livros didáticos e pesquisadores e quais são as suas possíveis implicações na formação matemática do professor.

Um dos resultados encontrados pelo autor demonstra que existe uma relação desigual e dicotômica entre o rigor e a intuição com relação às abordagens dos livros didáticos de Cálculo e Análise, onde se observou privilegiar o primeiro aspecto com relação ao segundo. Consequentemente, de um modo geral esses materiais foram considerados pelo autor predominantemente formalistas e procedimentais.

Como conclusão do seu trabalho, o autor faz um questionamento ligado ao ensino do Cálculo:

> Notamos, então, que a questão do excesso de rigor na abordagem dos conceitos do Cálculo é um problema tão abrangente que envolve diferentes tendências de ensino, tradicionais ou não. Mas, não existiriam alternativas para se conseguir um ensino mais intuitivamente eficiente, tanto do ponto de vista matemático como sob uma ótica pedagógica? (REIS, 2001, p.183).

Buscar, segundo o autor, uma alternativa para se conseguir um ensino mais “intuitivamente eficiente” constitui uma das propostas dessa pesquisa bem como procurar elaborar intervenções de ensino dos conceitos fundamentais do Cálculo que propiciem tais situações.

Para a elaboração dessas sequencias que busquem contribuições para o ensino e aprendizagem do Cálculo privilegiando aspectos envolvendo a intuição e o rigor, faz-se necessário aferir quais as características e os mecanismos de raciocínio utilizados pelos alunos diante de questões que envolvam alguns conceitos fundamentais ligados ao CDI.

Com isso, esse trabalho tem como objetivo analisar as estratégias bem como o uso da intuição e do rigor dos alunos na resolução de algumas questões relacionadas ao Cálculo, especificamente sobre a determinação de área de figuras planas e do volume de sólidos geométricos por meio do Princípio de Cavalieri.

A análise dessas estratégias bem como a elaboração das questões será feita tendo como perspectiva teórica algumas ideias ligadas ao intuicionismo de acordo com Henri Poincaré (1905), conforme será descrito a seguir.

2. Fundamentação Teórica

Para analisar as estratégias nas resoluções elaboradas pelos alunos, devem-se levar em conta quais foram as técnicas, algoritmos, teoremas e ideias envolvidas, sendo que esses elementos estão ligados de forma direta com a questão do uso da intuição, do rigor e do formalismo no ensino e aprendizagem do Cálculo.

Uma corrente filosófica que discute e reitera a construção do conhecimento matemático por meio do uso da intuição e de outros aspectos cognitivos correlacionados denomina-se *intuicionismo,* que se desenvolveu no final do século XIX e no inicio do século XX.

Os intuicionistas afirmavam que a Matemática somente pode ser construída por meio da experiência humana, sendo que sua existência fora dela não apresentava sentido, ao contrário da filosofia platônica que considerava os objetos matemáticos existentes, prontos e acabados, independente da atividade humana, em que cabe ao homem apenas descobri-los.

Os matemáticos intuicionistas consideravam a Matemática como uma construção mental, onde os objetos matemáticos são elaborados dessa forma, em que o homem tem uma intuição particular que lhe permite construções mentais a partir de uma percepção imediata, onde existe uma participação do sujeito na construção do conhecimento.

Refletindo tais pontos de vista intuicionistas, observa-se que os mesmos convergem e servirão como uma lente teórica para a análise dessa pesquisa. Sendo assim, como referencial teórico serão utilizadas as ideias ligadas ao intuicionismo segundo a visão do filósofo e matemático francês Henri Poincaré, que aborda em suas obras como *A Ciência e a Hipótese* (1902), *O Valor da Ciência* (1905), *Ciência e Método* (1908), alguns temas que discutem o papel da intuição, da lógica e da hipótese na construção do pensamento cientifico.

Em sua obra A Ciência e a Hipótese (1984), por exemplo, o autor procura trazer à tona a análise dos principais aspectos para se considerar uma ciência válida apenas se for passível de experimentação. Essa crítica explicitada por Poincaré contrapõe à ideia de considerar a ciência como uma verdade absoluta defendida pelo logicismo.

Poincaré defendia a intuição como papel central na questão da criatividade e a invenção. A intuição, segundo o autor, é uma faculdade do espírito, cuja função é essencialmente heurística, pois para o mesmo, é pela intuição que se descobre e se inventa, mas é pela lógica que se justifica.

O autor contrapõe-se fortemente ao logicismo, criticando a ideia de submeter à Matemática à lógica, considerando essa última, bem como Aristóteles, como uma ferramenta importante e necessária, mas não uma ciência propriamente dita. Poincaré afirmava que a lógica não cria o novo, pois não se recorre mais aos raciocínios como a intuição. Sendo assim, não é dela que sozinha podemos criar novas ciências.

Com relação às características do raciocínio intuitivo, Poincaré distingue os tipos de intuição na seguinte classificação:

- **o apelo aos sentidos e à imaginação**, também denominada de intuição sensível, com o uso de representações geométricas, por exemplo. Essa intuição, segundo Poincaré, não pode nos dar a certeza, entretanto a mesma possui a propriedade de instrumento da invenção do conhecimento matemático.

Como exemplo dessa intuição geométrica, Poincaré considera a seguinte afirmação: "Se numa reta o ponto *C* está entre *A* e *B* e o ponto *D* esta entre *A* e *C* então o ponto *D* esta entre *A* e *B*". Para comprovar a veracidade de tal afirmação, somos levados ao recurso geométrico imaginando tal situação.

- a **intuição ao número puro**, que pode ser a geradora do verdadeiro raciocínio matemático, sendo o número desprovido de qualquer característica geométrica, de onde se origina a generalização por indução e pode-se encontrar de forma explícita nas ciências experimentais. Esse raciocínio também pode ser descrito como raciocínio por recorrência, que Poincaré defende ser o único instrumento que possibilita uma passagem do finito para o infinito.

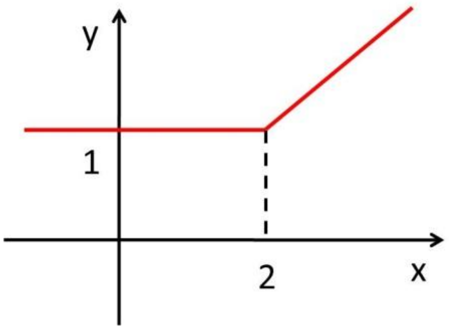
O cuidado, segundo Poincaré, que se deve tomar reside no fato de que o uso da intuição pode nos trazer resultados inesperados, pois algumas afirmações podem ser consideradas verdadeiras por uma simples ideia ou esquema mental criado na tentativa de provar tal afirmação e que nem sempre correspondem com sua demonstração. Isso acaba criando um conflito cognitivo com aquilo que acreditamos intuitivamente por meio de representações geométricas, ou o apelo aos sentidos e a sua demonstração formal.

Como exemplo, o autor exemplifica as funções contínuas desprovidas de derivada. Pela intuição, toda função contínua tem uma derivada, pois toda curva tem a sua tangente. Sendo assim, considere a função contínua definida a seguir:

Quadro 01 - Função continua sem derivada em um ponto

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \leq 2 \\ x, & se\ \ x > 2 \end{cases}$$



(Autor, 2013)

A função representada anteriormente é contínua em todos os pontos do se domínio, entretanto no ponto $x = 2$ a função não é derivável. A intuição nesse caso de uma imagem da função contínua ser derivável em todos os pontos do seu domínio pode levar a conclusões errôneas.

3. Metodologia e procedimentos metodológicos

A pesquisa constituiu-se da seguinte maneira: foi realizado um questionário-piloto com a participação de 14 alunos de uma faculdade pública do estado de São Paulo sendo que após a análise dos resultados obtidos no questionário deseja-se elaborar uma intervenção de ensino do Teorema Fundamental do Cálculo com os alunos da mesma instituição.

A faculdade selecionada na qual leciono as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I e II, Geometria Analítica e Métodos Quantitativos para Gestão está localizada numa cidade da região metropolitana do estado de São Paulo e possui cursos de graduação em tecnologia nas seguintes modalidades: Polímeros, Logística e Informática para Negócios.

Os 14 alunos que participaram do questionário-piloto estão regularmente matriculados nos cursos de Tecnologia em Polímeros (10 alunos) e Tecnologia em Logística (04 alunos). Esses 14 alunos participantes se organizaram em sete duplas, denominadas por D_1, D_2, ..., D_7 que se formaram por escolha própria, sendo que as mesmas foram convidadas e compareceram num único encontro que foi agendado previamente. Nesse encontro experimental, os alunos responderam a um questionário-piloto constituído por quatro questões abertas. A resolução das questões sendo feita em duplas teve por finalidade gerar discussões entre os alunos de cada dupla de quais elementos são utilizados e quais as dificuldades encontradas na resolução dessas questões.

A questão a ser analisada nesse presente trabalho apresenta em sua essência o Princípio de Cavalieri na comparação entre áreas de duas figuras bem como o volume entre dois sólidos.

De maneira sucinta, a ideia do matemático italiano Boaventura Cavalieri (1598 – 1647), tratada em sua obra *Geometria indivisibilibus*, publicada em 1635, residia no fato de que uma porção plana seria formada de uma infinidade de cordas paralelas e que um sólido seria formado por uma infinidade de secções planas paralelas.

Cavalieri argumentava que ao se fazer deslizar cada um dos elementos do conjunto de cordas paralelas de uma porção plana dada ao longo do seu próprio eixo, de modo que as extremidades das cordas ainda descrevam um contorno contínuo, a área da nova porção plana é igual a da original, uma vez que ambas são formadas das mesmas cordas. Esse procedimento pode ser utilizado analogamente para um sólido dado, em que o conjunto das secções planas paralelas do mesmo formará outro sólido com o mesmo volume deste.

O princípio de Cavalieri pode ser descritos da seguinte maneira:

> 1. Se duas porções planas são tais que toda reta secante a elas e paralela a uma reta dada determina nas porções segmentos de reta cuja razão é constante, então a razão entre essas as áreas dessa porção é a mesmo constante.
> 2. Se dois sólidos são tais que todo plano secante a eles e paralelo a um plano dado determina nos sólidos secções cuja razão é constante, então a razão entre os volumes desses sólidos é a mesma constante. (EVES, 2004, p. 426).

Uma das questões elaboradas e selecionadas para análise deste trabalho apresenta dois itens, sendo que o primeiro baseou-se em um dos testes realizados pelo psicólogo romeno Efrain Fischbein (1987), que assim como Poincaré em seus trabalhos procura elucidar a importância do estudo da intuição no processo de ensino e aprendizagem, particularmente na Matemática, destacando a preocupação com as faculdades intuitivas dos alunos exigidas na aprendizagem e no contato inicial com os objetos matemáticos.

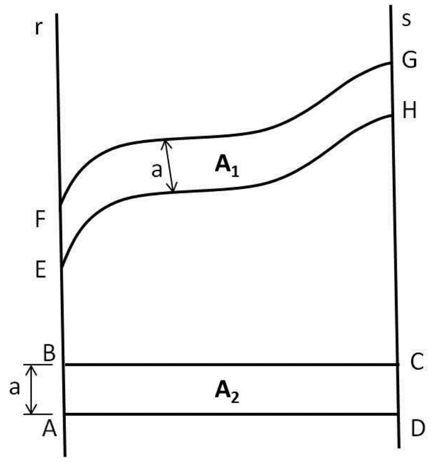
A segunda parte proposta por nós e foi inspirada na primeira parte dessa questão relativamente a questão de volumes comparando-se duas pilhas formadas por moedas de mesma massa e tamanho.

Os dois itens podem ser enunciados conforme a descrição seguinte:

Quadro 2 – Questão Q_2

02.

a) Sejam as retas *r* e *s* paralelas e os pontos *A*, *B*, *E e F* pertencentes à reta *r* e os pontos *C*, *D*, *G e H* pertencentes à reta *s*, com os segmentos *AD* e *BC* paralelos cuja distância entre eles é igual a ***a.*** Ligando-se os pontos *E* e *H* assim como *F* e *G* por meio de curvas de modo que a distância entre as mesmas seja constante e igual a ***a***, conforme a figura a seguir:



Determine qual a região que apresenta maior área, a área A_1 da região limitada pelas curvas *EH*, *FG* e as retas *r* e *s* ou a área A_2 do retângulo *ABCD*. Justifique a sua resposta.

b) Na foto a seguir têm-se dois sólidos formados por 12 moedas iguais de R$ 1,00 cada um, empilhados de maneiras distintas. Qual dos dois sólidos possui volume maior? Justifique a sua resposta.

Sólido 01 **Sólido 02**

(Autor, 2013)

4. Análise dos resultados

A resolução dessa questão envolve a utilização do Princípio de Cavalieri, de acordo com o contexto histórico da gênese e do desenvolvimento dos conceitos relacionados ao Teorema Fundamental do Cálculo (BOYER, 1996; EVES, 2004; KATZ, 1998) mostrou ser um fator imprescindível para a compreensão do conceito de integral.

Considerando-se no item ***a*** em que temos duas regiões tal que se traçarmos qualquer reta secante a elas e paralela às retas *r* e *s* determinaremos nas regiões segmentos de reta de comprimentos iguais, conclui-se que as áreas dessas duas regiões também serão iguais. O raciocínio análogo pode ser feito no item ***b***, em que os dois sólidos são formados por moedas iguais, sendo assim qualquer plano paralelo à base obteremos secções iguais e, portanto, volumes iguais.

O objetivo dessa questão é observar se o Principio de Cavalieri, mesmo de forma implícita, é utilizado tanto no cálculo de áreas de figuras planas quanto no volume dos sólidos.

A questão apresenta um predomínio do conhecimento teórico de um princípio em detrimento da utilização de algoritmos, fórmulas ou algum outro recurso aritmético. O que se pode esperar é a possível utilização de outros elementos, como a manipulação de objetos físicos, por exemplo, ou a utilização de analogias.

Com isso deseja-se analisar quais são as estratégias utilizadas pelos alunos para demonstrar que tanto as áreas quanto os volumes são iguais e qual dos dois itens pode ser considerada mais difícil, se uma dessas questões pode ser mais evidente de se resolver e quais são as implicações na resolução de uma questão que pode auxiliar a compreensão da outra.

No que se refere às resoluções da questão, na parte **a** duas duplas responderam que as áreas são iguais, porém apresentando justificativas diferentes. Cinco duplas consideraram que as áreas não são iguais, sendo que grande parte das duplas respondeu que pelo fato da curva EH ter comprimento maior que o segmento $\overline{AD}$, então a área A_1 é maior que a área A_2.

A dupla D_1 procurou traçar retas tangentes às curvas, respondendo que por meio de derivadas seria possível provar, mesmo sem saber de que forma, que $A_1 > A_2$, pois segundo a resposta da dupla isso era "perceptível". Esse tipo de afirmação demonstra o aspecto da convicção intrínseca da intuição, em que os alunos apresentam uma crença de que uma área é maior que a outra, mesmo sem a possibilidade de demonstração.

A dupla D_4 manifestou um recurso diferenciado. Um dos integrantes da dupla retirou um fio de cabelo para tentar provar que o comprimento da curva EH era maior que o segmento de reta $\overline{AD}$. Isso é um indício da utilização do apelo aos objetos físicos como estratégia de resolução da questão.

A dupla D_5 argumentou, por meio de um exemplo, utilizou-se de uma analogia geométrica, em que figuras retangulares têm área maior que as circulares, sendo que dado um quadrado cujo lado tem a mesma medida do diâmetro de um círculo, portanto a área A_2 por ser retangular é maior que a área A_1 conforme a figura a seguir:

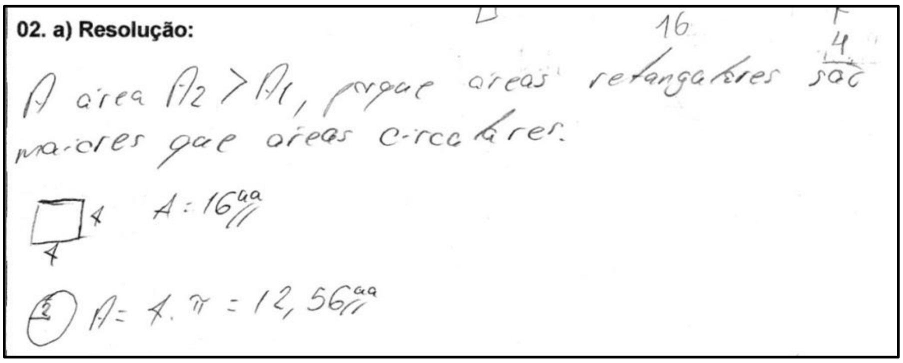


Figura 1 – Resolução da questão Q_2 feita pela dupla D_5 (Autor, 2013)

Das duplas que procuraram elaborar intuitivamente por recursos geométricos uma solução correta para o problema, a dupla D_2 observou que a área A_1 poderia ser "completada" tornando-se igual à área A_2, conforme a figura a seguir:

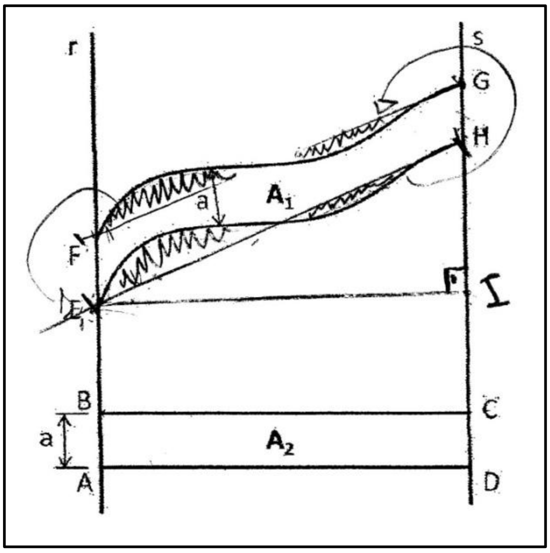


Figura 2– Resolução da questão Q_2 – a feita pela dupla D_2 (Autor, 2013)

Entretanto, a dupla apesar de apresentar uma estratégia intuitivamente interessante, não conseguiu demonstrar que a área do paralelogramo EFGH é igual à área A_2, pois o mesmo possui a mesma base (no caso $EF = a$) e a mesma altura (medida do segmento $\overline{AD}$). Essa dupla acabou afirmando que pelo fato do segmento $\overline{EH}$ ser maior que a medida do comprimento $\overline{AD}$, então a área A_1 é maior que a área A_2.

Uma ideia intuitiva semelhante a essa foi apresentada pela dupla D_3, respondendo que as áreas são iguais sem, entretanto, apresentar maiores justificativas, afirmando apenas que as regiões possuem as medidas “proporcionais” e que por isso se justificaria a igualdade das áreas.

Outra dupla que respondeu corretamente a questão sem justificar foi a dupla D_6, que tentou inicialmente resolver a questão utilizando-se do conceito de integral, afirmando que se tivermos as leis de formação das funções representadas geometricamente pelas curvas *EH* e *FG*, então se pode provar que as áreas são iguais.

A dupla D_7 também cita a possibilidade de se provar por integral. Isso pode nos levar a concluir que os alunos manifestaram a forte compreensão do conceito de integral como técnica de resolução de problemas de área.

Diferentemente da questão **2a**, parte **b** da questão $\mathbf{Q_2}$ foi respondida corretamente por todas as duplas, que em sua maioria justificou que se as moedas são todas iguais, então o volume também deverá ser igual, independente da forma em que as mesmas estarão dispostas.

A dupla D_1, por exemplo, tentou “medir” as dimensões do bloco para tentar comprovar que os volumes são iguais. Com o uso de uma régua fizeram aproximações para as medidas e tentaram assim justificar sua resposta.

Já a dupla D_2 afirmou que se as áreas da base e as alturas dos dois sólidos são iguais, então os volumes serão iguais, não percebendo a imprecisão dessa justificativa, pois como contraexemplo podemos considerar um cone e um cilindro circular reto, com a mesma base e a mesma que apresentam volumes diferentes.

Para a dupla D_3 pode-se provar por meio de uma balança a medição para tal demonstração, pois sendo feitas do mesmo material e tendo massas iguais, terão volumes iguais.

Muitas duplas utilizaram-se da técnica de perceber que no sólido 2 a parte que “falta” do sólido pode ser completado, conforme a dupla D_5 realizou o raciocínio geométrico a seguir:

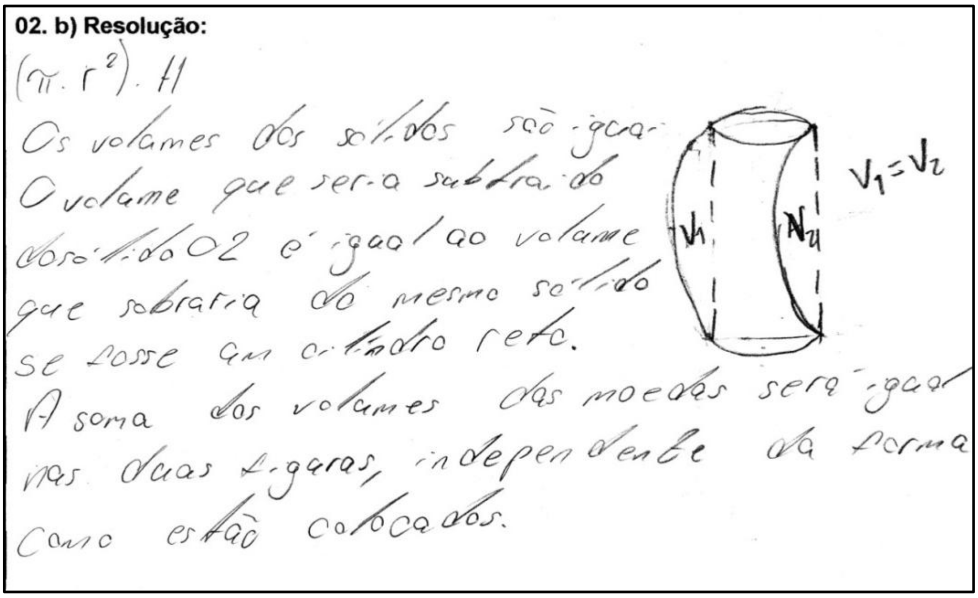


Figura 3 – Resolução da questão Q_2 - b feita pela dupla D_5 (Autor, 2013)

O que se pode observar é que o mesmo procedimento utilizado pelas duplas na resolução da questão 2b não foi utilizado em grande medida na questão 2a, o que sucinta que o Princípio de Cavalieri mesmo de maneira implícita é utilizado na comparação entre o volume de dois sólidos em detrimento do cálculo de áreas.

5. Considerações Finais

Analisando as respostas elaboradas pelas duplas sobre as duas questões, podem-se inferir alguns resultados pertinentes de comentários, sendo que algumas características do raciocínio intuitivo descritas por Poincaré foram observadas.

Na primeira questão relacionada à comparação das áreas, muitas duplas responderam que utilizando-se do conceito de integral era possível mostrar que são iguais, sem conseguir provar. Isso demonstra que o conceito de integral que fica “impregnado” para os alunos como sinônimo de área, sendo que o conhecimento de um princípio poderia resolver a questão.

Esse fato, em grande medida, demonstra o excessivo caráter algébrico e procedimental dos conceitos desenvolvidos num curso de Cálculo, em que um amontoado de conteúdos são ministrados sem discussões e a participação efetiva dos estudantes na construção do conhecimento.

Outras duplas, mesmo de maneira desorganizada, procuraram explorar o raciocínio intuitivo, como algumas duplas fizeram ao comparar as áreas com a utilização de recursos geométricos e físicos, realizando analogias para encontrar a solução proposta. Entretanto, conforme afirmava Poincaré a intuição pode nos levar a conclusões incorretas.

No caso da utilização do Princípio de Cavalieri, observa-se que o mesmo é pouco explorado nos cursos de Cálculo bem como em cursos de ensinos fundamental e médio, sendo que mesmo de forma implícita os alunos utilizaram-no apenas para a comparação dos volumes, o mesmo raciocínio poderia ser utilizado para o problema das áreas, porém a questão de volumes parece ser intuitivamente mais fácil de trabalhar.

A análise das respostas e estratégias elaboradas pelos alunos evidenciou algumas características recorrentes do modelo que que muitos cursos de Cálculo são ministrados baseado em definição-demonstração-exercícios, e da mesma forma como alguns livros didáticos apresentam os conteúdos.

Com essa análise, devemos refletir sobre as possibilidades de se desenvolver um curso de Cálculo que procure explorar o raciocínio intuitivo dos estudantes como ponto de partida da abordagem dos conceitos fundamentais, fazendo com que os mesmo participem na construção do conhecimento matemático até atingir-se o estágio do formalismo com a interferência do professor com a apresentação das definições, teoremas e demonstrações.

6. Referências

ÁVILA, G. S. S. **Várias Faces da Matemática: tópicos para licenciatura e leitura geral**. 2ª. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2011.

BOYER, C. **História da Matemática.** Tradução Elza F. Gomide. 2ª. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

EVES, H. **Introdução à História a Matemática.** Tradução Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora de UNICAMP, 2004.

FISCHBEIN, E. **The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity.** In: Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline. Dordrecht: Kluwer Academic, 1991.

______. **Intuition in science and mathematics: An educational approach.** Dordrecht: D. Reidel, 1987.

IGLIORI, S. B. C. Considerações sobre o ensino do cálculo e um estudo sobre os números reais. In: **Educação Matemática no Ensino Superior: Pesquisas e Debates**, vol. 5. Organizadoras: Maria Clara Rezende Frota & Lilian Nasser, pp. 11-26. Recife: SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2009.

KATZ, V. J. **A History of Mathematics: an Introduction.** Reading: Addison-Wesley, 1998.

POINCARÉ, H. **Ensaios Fundamentais**. Rio de Janeiro: Contraponto, 2008.

______. O valor da ciência. Tradução de Maria Helena Franco Martins. Rio de Janeiro: Contraponto, 2000.

______. A Ciência e a Hipótese. Tradução Maria Auxiliadora Kneipp. Brasília: Editora UNB, 1984.

REIS, F. S. **A tensão entre Rigor e Intuição no ensino de Cálculo e Análise: a visão de professores-pesquisadores e autores de livros didáticos.** Tese (Doutorado em Educação), Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas, 2001.

SILVA, B. A. Componentes do Processo de Ensino e Aprendizagem do Cálculo: Saber, Aluno e Professor. In: Anais do **IV SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisas em Educação Matemática**, Brasília: SBEM – Sociedade Brasileira de Educação Matemática, 2009.