RESOLVENDO PROBLEMAS DE OTIMIZAÇÃO NUM CURSO DE CÁLCULO COM O AUXÍLIO DO GEOGEBRA

André Lúcio Grande
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUC-SP)
Bolsista CAPES
andremath@uol.com.br

Resumo:
Este minicurso tem por objetivo apresentar algumas aplicações do GeoGebra como ferramenta auxiliar na resolução de problemas de otimização envolvendo alguns conceitos ministrados num curso de Cálculo Diferencial e Integral, tais como: funções, derivada, máximos e mínimos relativos. Como referencial teórico utilizou-se as ideias e os princípios ligados ao intuicionismo, corrente filosófica ligada aos Fundamentos da Matemática que destaca a importância do uso da intuição, da elaboração de conjecturas e hipóteses na construção do conhecimento matemático. Este trabalho se constitui como sendo do tipo qualitativo, apresentando como procedimentos metodológicos a elaboração e a resolução de problemas de otimização de funções e tem como público-alvo de um modo geral alunos e professores dos cursos de Ciências Exatas. Por meio de tais resoluções observa-se a grande variedade de recursos que o GeoGebra apresenta bem como sua importância no processo de ensino de aprendizagem da Matemática.

Palavras-chave: Otimização de funções; intuicionismo; ensino e aprendizagem de Cálculo; GeoGebra.

1. Introdução

No Ensino Superior, durante os cursos ministrados de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) um assunto que em grande medida vem despertando o interesse são os problemas de otimização de funções, devido à sua grande aplicação nas diversas áreas como Economia, Engenharia, Física, Tecnologia, dentre outras.

Esses problemas envolvem de um modo geral a maximização ou minimização de funções que podem representar algebricamente, por exemplo, o lucro ou o custo de uma empresa, uma distância a ser percorrida ou o cálculo de áreas e volumes.

Em algumas séries do Ensino Médio os alunos entram em contato com esses tipos de problemas no estudo da função polinomial do segundo grau, sendo que os valores otimizados dessa função podem ser obtidos calculando-se as coordenadas do vértice do gráfico que representa a mesma. Já nos cursos ministrados de CDI pode-se utilizar teoremas que envolvam o cálculo da derivada de uma função.

Entretanto a resolução dos problemas de otimização de funções envolvendo derivadas se constitui basicamente da utilização de técnicas algébricas e de algoritmos memorizáveis, sendo que algumas funções necessitam de muita habilidade matemática e sua resolução algébrica torna-se extremamente trabalhosa.

Essa excessiva manipulação algébrica pode ocultar alguns aspectos essenciais na construção do conhecimento matemático, como a modelagem do problema, a elaboração de hipóteses, conjecturas e posteriormente sua resolução.

Um dos recursos tecnológicos auxiliares na resolução de problemas bem como a construção dos objetos matemáticos são os softwares como os de Geometria Dinâmica, apresentando alguns benefícios que devem ser ressaltados e colocados em questão.

Dentre os softwares com esse perfil, onde se pode explorar o raciocínio intuitivo dos alunos como ponto de partida para se alcançar o nível de formalização, o GeoGebra possui dentre outros recursos a manipulação simultânea de diversos registros de representação de um mesmo objeto matemático. Assim, por exemplo, uma reta no plano pode ser representada de diversas maneiras, tanto de forma algébrica quanto geométrica simultaneamente.

Diante desse contexto e buscando alternativas que contribuam para o ensino e aprendizagem dos conceitos fundamentais do CDI, este minicurso tem por objetivo apresentar algumas aplicações do GeoGebra como ferramenta auxiliar na resolução de problemas de otimização de funções.

2. Fundamentação Teórica

A Matemática é uma ciência que se utiliza do raciocínio lógico-dedutivo, entretanto em muitas situações, no que se refere ao ensino e aprendizagem de seus conceitos elementares, não são explorados alguns aspectos cognitivos como a intuição e a imaginação no processo de ensino e aprendizagem, sendo que o tratamento dos objetos matemáticos é feito de maneira axiomática.

Ávila (2011) explicita e defende o ponto de vista do ensino baseado em características intuitivas:

> A ideia de que o pensamento matemático se reduz a seus aspectos lógico-dedutivos – uma ideia muito difundida, mesmo entre professores de Matemática – é incompleta e exclui o que há de mais rico nos processos de invenção e descoberta. O pensamento matemático vai muito além do raciocínio dedutivo. Em seus aspectos mais criativos, a Matemática depende da intuição e da imaginação, às vezes até mais que da dedução. (ÁVILA, 2011, p. 4).

Ainda segundo o autor, formular conjecturas por meio de analogias, intuições e a seguir demonstrá-las rigorosamente constitui uma tarefa essencial do pesquisador em Educação Matemática:

> O pesquisador, com sua experiência e familiaridade em determinada área de investigação, valendo-se das várias modalidades do raciocínio (indução, analogia de uma situação com outra, argumentos de plausibilidade) e da intuição, e levado a suspeitar da validade de um novo resultado ou teorema. A demonstração, em geral, e a etapa final, que completa o trabalho de investigação. (Ibid., p. 5).

Uma corrente filosófica que discute e reitera a construção do conhecimento matemático por meio do uso da intuição e de outros aspectos cognitivos correlacionados denomina-se *intuicionismo*, que se desenvolveu no final do século XIX e no início do século XX.

Os intuicionistas afirmavam que a Matemática somente pode construída por meio da experiência humana, sendo que sua existência fora dessa experiência não apresentava sentido, ao contrário da filosofia platônica que considerava os objetos matemáticos existentes, prontos e acabados, independente da atividade humana, em que cabe ao homem apenas descobri-los.

Esse ponto de vista dos intuicionistas, valorizando alguns aspectos cognitivos no processo de ensino e aprendizagem vem de encontro com a proposta desse trabalho.

Sendo assim, como referencial teórico serão utilizadas as ideias ligadas ao intuicionismo segundo a visão do filósofo e matemático francês Henri Poincaré, que aborda em suas obras como *A Ciência e a Hipótese* (1902), *O Valor da Ciência* (1905), *Ciência e Método* (1908), alguns temas que discutem o papel da intuição, da lógica e da hipótese na construção do pensamento cientifico. Também serão utilizadas as noções e as características do raciocínio intuitivo descritas por Efrain Fischbein (1991).

3. Metodologia e procedimentos metodológicos

Este trabalho apresenta as características de uma pesquisa qualitativa, tendo como procedimentos metodológicos a elaboração e resolução de problemas de otimização de funções utilizando como ferramenta auxiliar o software GeoGebra.

O minicurso será ministrado no Laboratório de Informática, com o número máximo de 20 participantes, tendo como público-alvo alunos e professores dos cursos de Ciências Exatas. Os participantes utilizarão o software GeoGebra 4.2, onde os problemas propostos serão construídos, manipulados e resolvidos de forma interativa. Além disso, os alunos receberão material impresso contendo informações e instruções para o desenvolvimento das tarefas.

4. Objeto Matemático

Dentre as diversas aplicações de derivada de uma função, a resolução dos problemas de máximos e mínimos se constitui de um tópico que além de sua importância inata na solução de problemas cotidianos voltados a área tecnológica pode estimular em grande medida o estudo dos conceitos fundamentais do CDI por parte dos alunos.

Esses tipos de problema, por sua simplicidade e aplicabilidade em áreas como logística e transportes, por exemplo, serão os objetos de estudo na utilização do software como recurso auxiliar.

O primeiro problema selecionado baseia-se no Princípio de Fermat, que surgiu com a solução do caminho mínimo relacionado à trajetória da luz, em que se demonstrou que a mesma percorre a trajetória em tempo mais rápido.

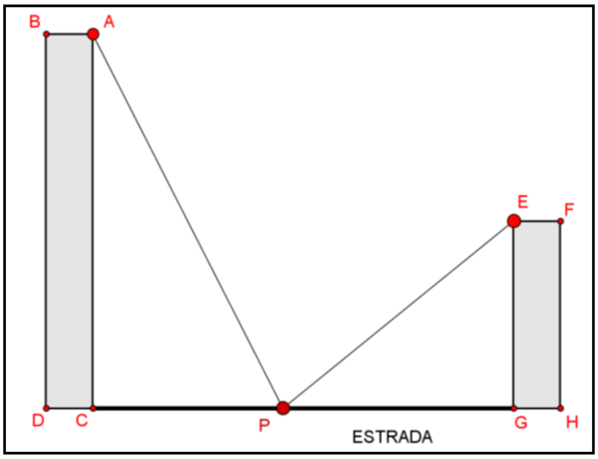
O segundo problema está relacionado com o denominado Problema de Steiner, que consiste em encontrar um ponto no plano cuja soma das distâncias deste a três pontos dados seja mínima.

Esses problemas apresentam vários tipos de solução como, por exemplo, a algébrica e a geométrica, e por meio dos recursos do Geogebra objetiva-se modelar-se o problema privilegiando os aspectos cognitivos da intuição, do estabelecimento de conjecturas e do formalismo em sua resolução.

Os problemas propostos serão descritos a seguir:

Quadro 1 – Problema 1

01. Numa estrada, com 9 km de comprimento será construída uma estação de tratamento de água (ETA), localizada no ponto P, para abastecer duas cidades A e E, localizadas ao norte dos pontos C e G cujas distâncias são 8 km e 4 km respectivamente da estrada, conforme a figura a seguir:

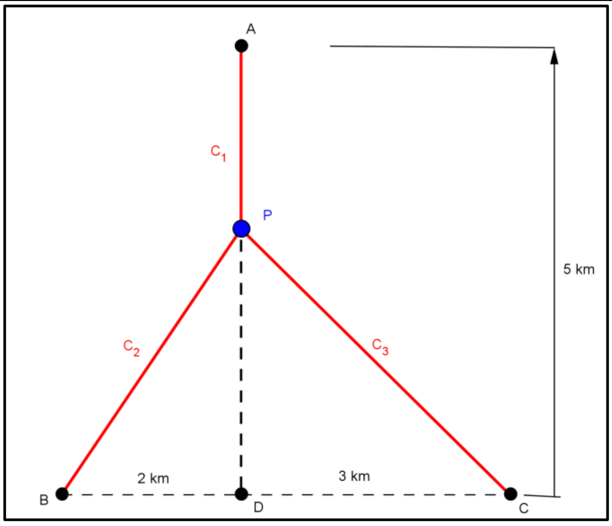


Determine a que distância $\boldsymbol{x}$ do ponto C deve ser instalada a estação de tratamento de modo que a soma das distâncias da estação às cidades $L = |\overline{AP}| + |\overline{PE}|$ seja mínima.

(Autor, 2013)

Quadro 2 – Problema 2

02. Uma central de distribuição de energia elétrica deve ser instalada num ponto P sobre o segmento $\overline{AD}$ de modo que a soma dos comprimentos $C_1 + C_2 + C_3$ dos fios ligando os pontos consumidores A, B e C seja minimizado, conforme a figura a seguir:



Determine a localização do ponto P.

(Autor, 2013)

Como exemplo da gama de recursos que o GeoGebra possui no sentido de buscar a solução, considere, por exemplo, o problema 1 que pode ser modelado algebricamente da seguinte maneira:

Seja $x = |\overline{CP}|$ a distância do ponto P ao ponto C e L a distância total. Sendo assim, teremos:

Minimizar: $L = |\overline{\mathrm{AP}}| + |\overline{\mathrm{PE}}|$

$$L = \sqrt{x^2 + 8^2} + \sqrt{(9-x)^2 + 4^2} \;\Rightarrow\; L(x) = \sqrt{x^2 + 64} + \sqrt{(9-x)^2 + 16}$$

O domínio da função L é o conjunto $D_L = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 9\}$.

Para encontrarmos os extremos relativos da função L devemos impor a condição necessária em que $\frac{dL}{dx} = 0$, o que nos leva à seguinte equação:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + 64}} - \frac{(9-x)}{\sqrt{(9-x)^2 + 16}} = 0 \qquad (I)$$

Entretanto a equação I exige uma manipulação algébrica relativamente grande, considerando-se que para problemas com um número maior de variáveis o grau de complexidade da resolução aumenta.

Com o GeoGebra, pode-se utilizar um sistema de coordenadas cartesianas para modelar o problema. Os alunos nessa fase podem estabelecer algumas conjecturas sobre como varia o comprimento total à medida que o ponto P se desloca no segmento $\overline{CG}$, além de se procurar esboçar o gráfico da função L(x), onde *L* representa a soma das distâncias $|\overline{\mathrm{AP}}| + |\overline{\mathrm{PE}}|$ e *x* a distância do ponto P ao ponto C.

Além disso, pode-se ao criar o ponto X_1 que descreve no plano cartesiano a variação da distância total $\mathrm{L} = |\overline{\mathrm{AP}}| + |\overline{\mathrm{PE}}|$ em função da distância *x* do ponto P ao ponto C, e coordenar simultaneamente os registros gráficos e geométricos, sendo um dos grandes recursos que o GeoGebra possui no estudo e modelagem de problemas desse tipo.

O uso dessa ferramenta permite aos participantes refutar algumas conjecturas formuladas anteriormente, quando se observou pelo gráfico gerado que o valor de *L* diminui num determinado intervalo de *x* e a seguir aumenta, sendo que para um determinado valor de *x* teremos a distância total *L* mínima, conforme a figura a seguir:

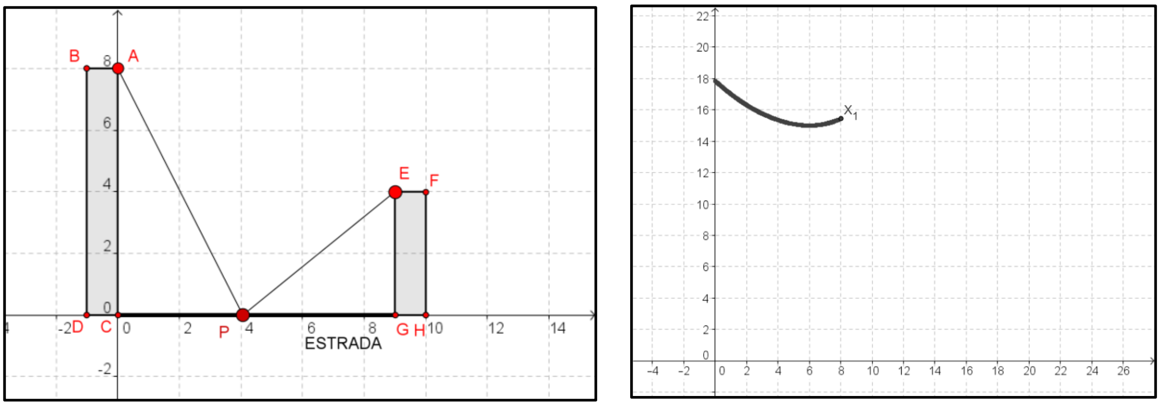


Figura 1 – Problema 1: Registro gráfico (Autor, 2013)

Após confirmar algumas conjecturas, o GeoGebra permite encontrar o resultado otimização para o problema em questão. Ao digitar no campo de entrada a lei de formação da função *L*, obtemos a sua representação gráfica.

O GeoGebra possui ainda o comando inspetor de funções, onde ao selecionar a função que se deseja analisar obtemos algumas propriedades tais como Mínimo, Máximo, Raiz, Integral, Área da função. Esse recurso foi utilizado pelos alunos como forma de verificar os resultados otimizados.

Pode-se por fim propor uma solução geométrica para o problema utilizando as ferramentas geométricas do software, conforme a figura a seguir:

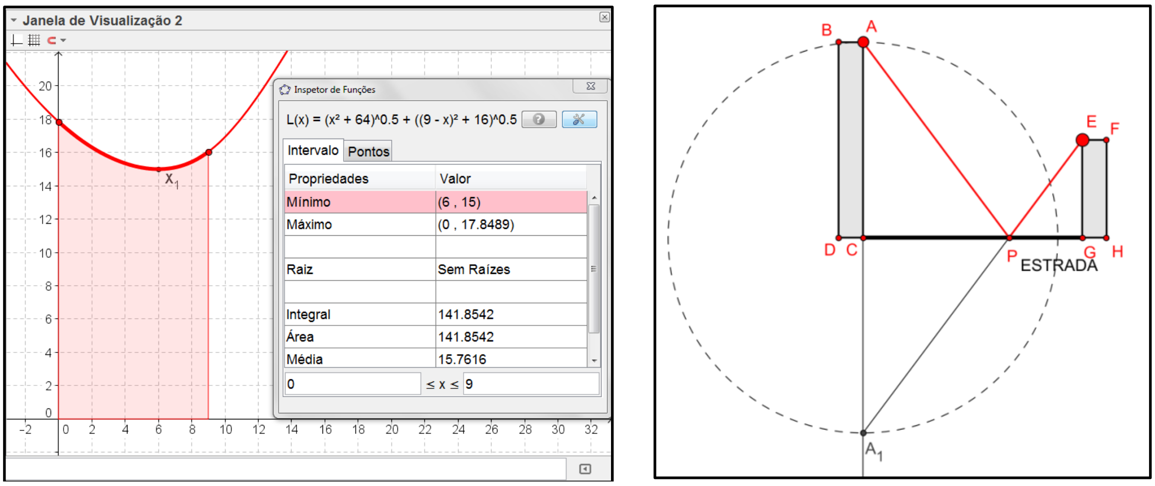


Figura 2 - Gráfico da função *L* e solução geométrica (Autor, 2013)

5. Considerações Finais

Este trabalho apresentou como objetivo principal descrever algumas contribuições do software GeoGebra na resolução de problemas de otimização de funções procurando evidenciar quais são os recursos que podem ser explorados no sentido de se modelar tais problemas.

Observou-se que o GeoGebra permite, sem muitos pré-requisitos por parte dos usuários, manipular de forma dinâmica objetos geométricos auxiliando intuitivamente dessa forma a formulação de conjecturas por parte dos alunos e posteriormente as possíveis refutações e formalizações dessas conjecturas.

A utilização do GeoGebra permitiu ao aluno de forma interativa auxiliar não somente no processo da elaboração do problema assim como a resolução da mesma.

Com isso, concluiu-se que o GeoGebra constituiu-se de uma valiosa ferramenta tecnológica que pode ser utilizada na construção do conhecimento matemático, conforme procurou-se mostrar por meio da resolução dos problemas propostos.

6. Referências

ÁVILA, G. S. S. (2011). **Várias Faces da Matemática: tópicos para licenciatura e leitura geral.** 2ª. ed. São Paulo: Edgard Blucher.

COURANT, R. & ROBBINS, H. (2000). **O que é matemática?: uma abordagem elementar de métodos e conceitos.** Tradução de Adalberto da Silva Brito. Rio de Janeiro: Ciência Moderna, 2000.

FISCHBEIN, E. (1991). The interaction between the formal, the algorithmic, and the intuitive components in a mathematical activity. In: **Didactics of Mathematics as a Scientific Discipline**. Dordrecht: Kluwer Academic.

POINCARÉ, H. (2000). **O valor da ciência**. Tradução de Maria Helena Franco Martins. Rio de Janeiro: Contraponto.

STEWART, J. **Cálculo – volume 1**, 6ª. ed., tradução Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos Gilli Martins. São Paulo: Cengage Learning, 2010.