UM AMBIENTE VIRTUAL DE APRENDIZAGEM COMO RECURSO DE MEDIAÇÃO NA CONSTRUÇÃO DE CONHECIMENTOS RELACIONADOS COM A OPERAÇÃO MULTIPLICAÇÃO DE NÚMEROS REAIS

Ion Moutinho
Universidade Federal Fluminense
ion.moutinho@gmail.com

Resumo:
Este relato trata de um estudo sobre o ensino de números reais para alunos da escola básica e o objetivo é apresentar um ambiente virtual de aprendizagem como recurso de mediação na construção de conhecimentos relacionados com a multiplicação de números reais. Apresenta-se uma abordagem que considera a possibilidade de um estudo sistemático sobre números reais e é fundamentada em princípios da aprendizagem matemática e em orientações das ações didáticas dos Parâmetros Curriculares Nacionais.

Palavras-chave: multiplicação de números reais; representação geométrica; Geometria Dinâmica; construção de conhecimento.

1. Introdução

O conhecimento relacionado com o conceito de número real, formalizado ou não, é assunto presente em boa parte do programa de ensino da Matemática para a escola básica. A relevância de estudos sobre ensino dos números reais se torna mais evidente quando constatamos a existência de vários obstáculos cognitivos relacionados ao aprendizado deste conhecimento. Exemplos de estudos sobre estes obstáculos podem ser encontradas nas pesquisas de Soares, Ferreira e Moreira (1999), Penteado (2004), Dias (2002), Boff (2006), Fischbein, Jehiam e Cohen (1995), e Zazkis e Sirotic (2007). Com este quadro, propostas de abordagens envolvendo os eixos constituintes dos números reais passam a ser objeto de interesse das pesquisas em Educação Matemática. Pesquisas como as de Souto (2010), Santos (2007) e a citada pesquisa de Boff (2006) sobre como livros didáticos atuais desenvolvem o assunto números reais apontam inúmeras deficiências. Consequentemente, e naturalmente, novas propostas de abordagens vêm sendo apresentadas, como, por exemplo, no citado estudo de Boff (2006) e no de Baroni e Nascimento (2005).

O presente relato apresenta um produto desenvolvido pelo próprio autor e experiências de prática de aula a partir da aplicação deste produto como recurso didático para o ensino de conhecimentos relacionados com o conceito de números reais. O produto em questão é um ambiente virtual de aprendizagem (AVA) para números reais e é constituído de animações eletrônicas interativas desenvolvidas no programa de Geometria Dinâmica, GeoGebra, de autoria de Markus Hohenwarter. Esse *AVA para Números Reais* foi desenvolvido de acordo com orientações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) e busca servir como recurso de mediação na construção de conhecimentos matemáticos relacionados com os números reais. Em particular, o AVA para Números Reais oferece uma alternativa à metodologia de transmissão de informações, com conhecimentos teóricos e gerais acompanhados de exercícios. Esta oferta acontece de forma sistemática não só para a construção do conceito de número real, mas também para a construção de conceitos como ordem, operações aritméticas, propriedades operacionais, inverso multiplicativo, potências e raízes, etc.

Neste relato, a apresentação do AVA para Números Reais está restrita à parte ligada a operação de multiplicação. Assim, a proposta é apresentar uma abordagem baseada no uso de tecnologias digitais que viabilize a um aluno construir o seu próprio conhecimento sobre a operação de multiplicação entre números reais. Apresentam-se também experiências de uso desse AVA.

2. Fundamentação Teórica

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) orientam que uma abordagem para o ensino de Matemática na escola básica deve possibilitar ao aluno participar ativamente do processo de construção de seus conhecimentos. Enquanto a comunicação do conhecimento matemático, e a validação destes, se dão pela lógica dedutiva, os PCN alertam que o ensino deste tipo de conhecimento pode se basear em outros métodos:

> Na criação desse conhecimento, contudo, interferem processos heurísticos e intervêm a criatividade e o senso estético, do mesmo modo que em outras áreas do conhecimento. A partir da observação de casos particulares, as regularidades são desvendadas, as conjecturas e teorias matemáticas são formuladas. Esse caráter indutivo é, em geral, pouco destacado quando se trata da comunicação ou do ensino do conhecimento matemático. (BRASIL, 1998, p. 26)

Com relação aos números irracionais, os PCN orientam explicitamente que uma abordagem destes não deve seguir uma linha formal e sugerem que a sua necessidade deva ser percebida por meio de situações-problema onde os números racionais não sejam conhecimento suficiente para a obtenção de uma solução. Os PCN também recomendam que não se enfatizem os cálculos com radicais.

A despeito destas orientações, parecem existir restrições com relação ao ensino das operações aritméticas envolvendo os irracionais. Os PCN também orientam que

> A respeito das operações aritméticas e algébricas com os irracionais quando eles aparecerem em representações simbólicas ($\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, π etc.), o aluno pode ser conduzido a efetuá-las seguindo regras operatórias análogas às que são válidas para os racionais. (BRASIL, 1998, p. 84)

Se o objetivo é uma abordagem de ensino que possibilite um aluno construir seus conhecimentos, torna-se necessário encontrar alternativas didáticas a esta orientação. Considerando representações numéricas, no caso dos irracionais, as possibilidades são realmente restritas e uma opção natural é buscar alternativas didáticas em abordagens que considerem outros tipos de registro de representação para os irracionais. Zazkis e Sirotic (2007), por exemplo, acreditam que a ênfase na representação decimal de números irracionais não contribui para a compreensão conceitual do conceito de irracionalidade.

Procurando aproveitar algumas sugestões dos PCN sobre construções com régua e compasso na representação de alguns números irracionais, parece interessante tentar estender este tipo de representação geométrica para outros conceitos relacionados com os números reais.

Esta é a estratégia adotada no AVA para Números Reais apresentado aqui. Ela se baseia na forma como os gregos lidavam com a ideia de números reais e está organizada de acordo com a apresentação encontrada no livro de Courant e Robbins (1941). A próxima seção apresenta mais detalhes sobre este tipo de apresentação.

A escolha de um sistema de registros geométricos para a construção do AVA para Números Reais também é fundamentada nas pesquisas de Duval (2003). A construção do AVA é baseada na teoria de registros de representação semiótica de Duval buscando um sistema desenvolvido a ponto de possibilitar conversões de registros sobre outros vários conceitos relacionados com a noção de números reais e, principalmente, buscando possibilitar tratamentos dos registros destes conceitos.

A noção de *construção do conhecimento em Matemática* adotada neste relato se refere às três ações fundamentais, “de representar os conceitos, de tratar as representações obtidas no registro estabelecido e de converter as representações num registro para outro” (D’AMORE, 2005, p. 63).

A escolha de um ambiente de ensino baseado nas tecnologias digitais como recurso de mediação para a construção de conhecimentos matemáticos, de acordo com o significado aqui estabelecido, também é fundamentada na teoria de Fischbein (1988) sobre conceitos figurais. O projeto de construção do AVA para Números Reais considerou o estudo de Fischbein sobre o papel das figuras na formação da imagem mental de um objeto geométrico, principalmente na criação de cenários didáticos de tal modo que um aluno não encontre neles figuras prototípicas e, assim, não seja levado a interpretações devidas a uma figura restritiva.

3. O Recurso Didático AVA para Números Reais

O AVA para Números Reais é constituído por animações eletrônicas desenvolvidas no programa GeoGebra que permitem um aluno manipular e experimentar figuras e que foram desenvolvidas com o objetivo de servir de recurso de mediação na construção de conhecimentos sobre números reais. Neste ambiente, uma animação eletrônica é chamada de *cenário*. Existem vários grupos de cenários, divididos de acordo com determinados conteúdos relacionados com os números reais. Este relato está focado no grupo de cenários relacionados com a operação de multiplicação. O AVA para Números Reais tem um cenário básico para a operação de multiplicação, chamado de *calculadora geométrica de produtos*, e ilustrado na figura 1.

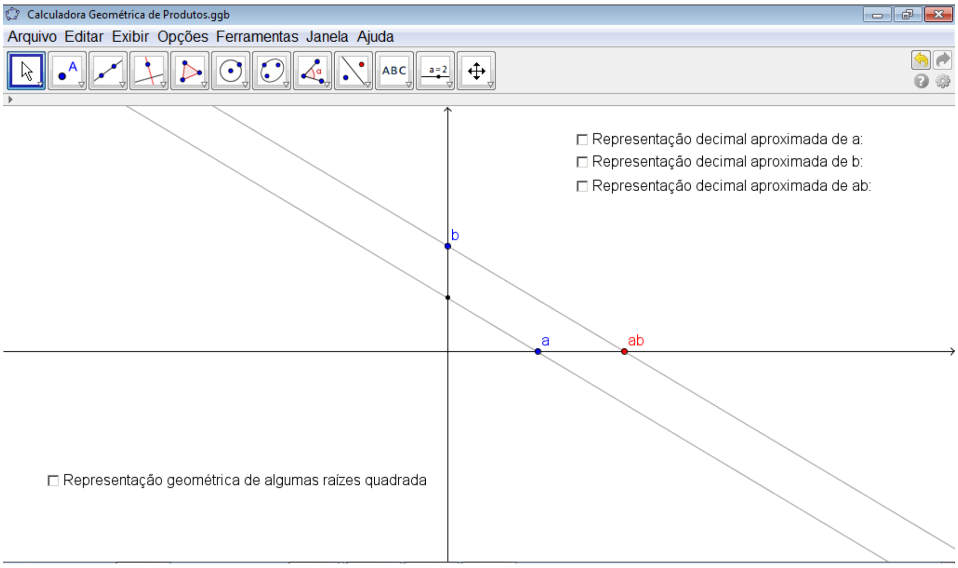

Figura 1. Ilustração do cenário básico para a operação de multiplicação:
calculadora geométrica de produtos.

Na calculadora geométrica de produtos, existem dois pontos que podem ser movidos, o ponto indicado pela letra *a*, sobre o eixo horizontal, e o ponto sobre o eixo vertical, indicado pela letra *b*. Os dois eixos representam a reta numérica e os pontos indicados por *a* e *b* representam dois números reais. À medida que os pontos *a* e *b* são movidos, um terceiro ponto também se move. Este ponto representa o produto *ab*.

Inicialmente, este cenário apresenta números reais representados geometricamente É possível alterar o cenário de modo que as retas apareçam graduadas, ou é possível selecionar as caixas no alto do canto direito do cenário de modo que representações decimais aproximadas apareçam. Selecionando a caixa na parte de baixo do canto esquerdo do cenário, alguns números reais notáveis aparecem nas representações da reta numérica.

Existem várias possibilidades de trabalho a partir do cenário básico de multiplicação. Por exemplo, é possível representar a diagonal, *d*, de um quadrado de lado um na reta numérica, realizar a multiplicação *d*.*d* e, assim, obter o resultado *d*.*d* = 2.

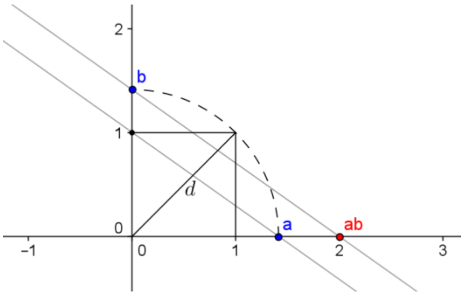

Figura 2.Ilustração de parte de uma adaptação do cenário básico.

A calculadora geométrica de produtos permite ser percebida como uma calculadora numérica em vários sentidos, possibilitando contas entre naturais, inteiros, inteiros e racionais, e racionais, como, por exemplo, 3×2, (–3)×(–2), $3\times\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}\times\frac{2}{5}$, 0,25×3,2. Com a caixa de representação de algumas raízes selecionada, também permite a realização de multiplicações com raízes quadradas e, inclusive, de algumas situações mais gerais como $\sqrt{2}\times\sqrt{3}=\sqrt{6}$. E, assim, neste ambiente, o aluno pode efetuar contas sem o apoio de regras pré-estabelecidas. Esta calculadora geométrica também permite obter vários resultados que normalmente são vistos só como propriedades algébricas. Por exemplo, pode-se efetuar a conta 0.*a* e obter o resultado 0, ou pode-se experimentar a calculadora e perceber a regra dos sinais para a multiplicação.

A partir do cenário básico, é possível gerar inúmeros novos cenários para conceitos relacionados com a multiplicação de números reais. Por exemplo, os recursos do GeoGebra permitem fazer o número representado por *b* sempre coincidir com o representado por *a*. Portanto, *ab* passa a representar a^2, e um cenário assim vira uma *calculadora geométrica de quadrados*. Outro cenário pode ser obtido quando o ponto que representa o produto *ab* passa a ser livre para movimentação e o ponto indicado por *b* passa a ficar em função das posições escolhidas para *a* e *ab*. Aí o cenário vira uma *calculadora geométrica de soluções para a equação ax = b*. Neste caso, quando se posiciona *a* na representação da reta numérica correspondente a 5 e *ab* na representação correspondente a 1, a nova calculadora exibe o resultado, $b = 0{,}2$, a solução da equação $5x = 1$. Inclusive, fixando $ab = 1$, tem-se um novo cenário, chamado de *calculadora geométrica de inversos*. Neste, com a variação do ponto *a*, tem-se o ponto *b* representando o inverso multiplicativo de *a*, a^{-1}, e variando juntamente com o ponto *a*.

4. Comentários sobre o AVA para números reais

O cenário do AVA para Números Reais sobre multiplicação (figura 1) pode ser facilmente adaptado para a representação de situações-problema. A figura 3 ilustra dois cenários construídos para o uso do AVA para Números Reais no ensino por meio de situações-problema. O cenário ilustrado à esquerda, na figura 3, representa uma situação-problema relacionada com a experiência vivida por Tales (cerca de 625 a.C. – 55b a.C.) sobre a determinação da altura de uma pirâmide por meio de sua sombra. Neste, os pontos indicados por *s* e *h* podem ser movidos livremente, e todos os outros elementos do cenário variam de acordo. O cenário ilustrado à direita, na figura 3, serve para representar situações-problemas envolvendo retângulo, como, por exemplo, a de determinar o aumento de área de uma região retangular que tem seus lados dobrados.

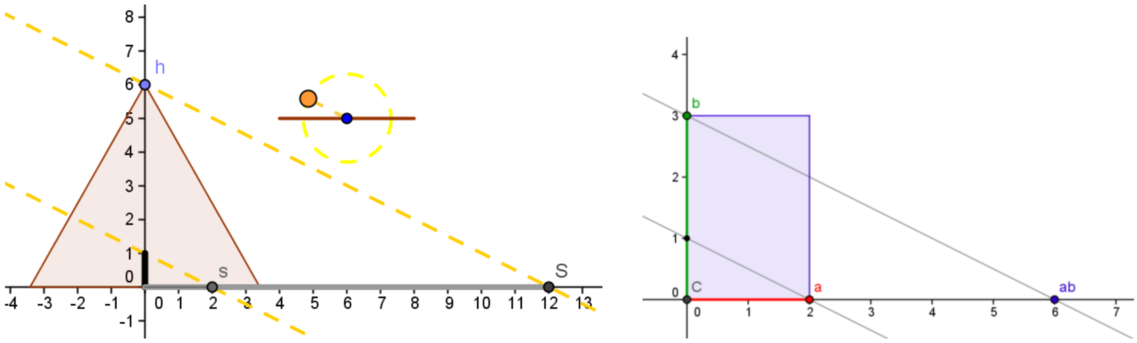

Figura 3. Ilustração de parte de uma adaptação de dois cenários do AVA para a representação de determinadas situações-problema.

Este tipo de cenário, que ajuda a contextualizar a operação de multiplicação, mostra outra utilidade dos cenários baseados no uso da calculadora geométrica, na oferta de um sistema alternativo de registros de representação que facilite o entendimento de problemas do tipo multiplicativo, isto é, que possa facilitar a tarefa de passagem do texto à escrita da operação a ser efetuada.

O cenário para o cálculo da altura de uma pirâmide serve para o estudo de uma situação-problema que chama a atenção para a necessidade da noção de multiplicação. Também existem cenários no AVA para Números Reais que chamam a atenção para a necessidade de uma noção de multiplicação mais ampla do que a já conhecida para números racionais. Por exemplo, numa proposta para sala de aula de verificação de que a fórmula, $l\sqrt{2}$, determina o comprimento da diagonal de um quadrado de lado *l*, o aluno pode experimentar um cenário como o ilustrado na figura 4, à esquerda. Neste, o aluno encontra a representação da diagonal sobre o eixo horizontal coincidindo com o produto, $l\sqrt{2}$, efetuado pelo próprio aluno. Basta fazer *a* coincidir com *l* e *b* com $\sqrt{2}$ que ele verá o produto *ab* coincidir com a diagonal. Esta experiência pode ser repetida para valores arbitrários de *l*, escolhidos pelo aluno.

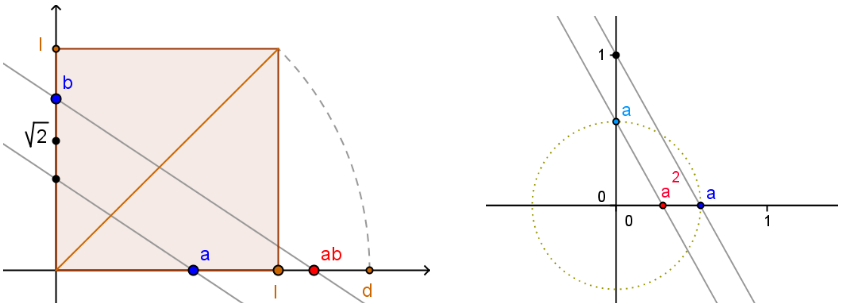

Figura 4. Ilustração de dois cenários, a da esquerda é referente à verificação da fórmula, $l\sqrt{2}$, e a da direita é referente ao estudo da relação entre *a* e a^2.

Como não existe uma figura prototípica para a representação geométrica da multiplicação, o estudo com apoio do AVA pode evitar interpretações equivocadas, como pensar que é sempre verdade que $a \leq ab$ ou $a \leq a^2$, onde *a* e *b* representam números reais. Este último caso é ilustrado na figura 4, à direita, onde parte do cenário com a calculadora geométrica de quadrados é representado. Com a liberdade de movimentação do ponto indicado por *a*, é inevitável encontrar um caso onde se tenha $a^2 < a$. Na verdade, numa análise mais cuidadosa, em função de possíveis posições do ponto indicado por *a*, não é difícil perceber uma classificação relacionando *a* e a^2, em função dos valores reais de *a*.

5. Experiências

O AVA para Números Reais vem sendo aplicado pelo autor do presente relato em algumas situações de ensino. Uma delas é na apresentação de minicursos e oficinas em eventos diversos, como a VI Semana da Matemática da UFF, em 2012, e encontros acadêmicos, sempre com público formado por professores e estudantes universitários. Em geral, o público demonstra apreciar o trabalho e os professores, em especial, demonstram interesse em poder usar o AVA para Números Reais. Estas experiências também são aproveitadas para a realização de alguns testes, como perguntar aos participantes se, por exemplo, é verdade que $a \leq ab$ ou $a \leq a^2$, quando a e b representam reais. A confirmação destas relações é constante. Porém, depois de alguns movimentos nas representações de a e de b, em cenários apropriados, a correção da resposta é imediata. Um trabalho que também parece ter sucesso é o de entender a relação entre ac e bc, quando $a < b$. Com a movimentação no cenário adequado, sempre é possível descrever a relação em função dos valores que c pode assumir. As experiências com oficinas, realizadas em laboratórios de informática, com cada participante tendo um computador com o AVA para Números Reais instalado, também incluem atividades dirigidas. Mesmo com os participantes apresentando ritmos diferentes, tem sido verificado que sempre conseguem realizar as tarefas no AVA.

No I Encontro de Educação Matemática de Lagoa Santa, em Minas Gerais, a oficina teve, excepcionalmente, um público predominante de professores do Ensino Fundamental I. Eles demonstraram dificuldades no entendimento e no propósito do AVA para Números Reais. Contudo, uma das tarefas pareceu ser bem proveitosa, a que propunha a resolução de uma lista de problemas multiplicativos. A maioria dos participantes conseguiu trabalhar bem a conversão dos registros, passando do texto para a representação das informações na calculadora geométrica de produtos.

O AVA para Números Reais também tem sido aplicado no ensino à distância. O presente autor é coordenador de uma disciplina do Curso de Licenciatura em Matemática pelo consórcio CEDERJ e é coordenador de uma disciplina do Curso de Especialização pelo LANTE, Novas Tecnologias para o Ensino da Matemática (NTEM). Os cenários do AVA têm se mostrado uma ferramenta valiosa na busca de recursos para o ensino dos alunos desta modalidade, principalmente por poderem ser incluídos em fóruns *on-line*, inclusive mantendo a propriedade de movimentação. Este recurso tem estimulado bastante o ensino colaborativo por meio dos fóruns. No Curso de Graduação, os cenários têm sido úteis também para tirar dúvidas dos alunos, como na hora de explicar a propriedade de monotonicidade da multiplicação. Vale notar que a disciplina de graduação é oferecida para alunos calouros. No Curso de Pós-Graduação, os cenários têm sido usados de forma sistemática, dentro de discussões sobre ensino dos Números Reais. O estudo de propriedades operacionais apoiado no AVA para Números Reais e baseado em experimentações, reflexões e conjecturas tem causado um ótimo impacto nos alunos docentes, que sempre declaram querer levar os recursos estudados para suas salas de aula. Um dos resultados da experiência com o Curso de Especialização, NTEM, é que este ano o presente autor está orientando 15 alunos no trabalho de conclusão do curso, todos com temas relacionados à aplicação em sala de aula do AVA para Números Reais como recurso de mediação na construção de conhecimentos relacionados com o conceito de números reais.

6. Considerações Finais

O ensino relacionado ao conceito de número real não precisa ficar restrito a abordagens formais. Em particular, o ensino da operação multiplicação não precisa ficar restrito a uma coleção de propriedades operacionais postuladas, mesmo que por analogia. É possível, sim, oferecer oportunidades de construção do conceito de multiplicação para os números reais. O AVA para Números Reais permite um aluno representar números reais e produtos de números reais, permite tratar estes elementos no sistema de representações estabelecido e oferece associações com outros sistemas de representação, e, portanto, nesse sentido, pode ser usado como recurso didático de mediação na construção do conceito de multiplicação de números reais, por exemplo.

A experiência até agora com o AVA para Números Reais diz que os professores vislumbram boas possibilidades de aplicação deste recurso em sala de aula.

As características do AVA para Números Reais relatadas aqui indicam um potencial didático deste recurso e, assim, a sua aplicação na sala de aula deve ser levada em consideração. Um questionamento natural, com esta aplicação, é sobre metodologias cabíveis na mediação. Por exemplo, estando o AVA para Números Reais apoiado no uso da Geometria, pode-se pensar no modelo de van Hiele para o ensino mediado por este recurso.

7. Referências

BARONI, R. L.; NASCIMENTO, V. M. *Um tratamento, via medição, para os Números Reais*, VI SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA. 2005.

BOFF, D. S. *A construção dos números reais na escola básica.* Dissertação de Mestrado Profissionalizante. Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre. 2006

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. 5ª a 8ª séries*. Brasília. 1998.

COURANT, R.; HOBBINS, H. *O que é Matemática?* Rio de Janeiro, Ciência Moderna. 2000

D'AMORE, B. *Epistemologia e didática da Matemática*. Tradução de Maria Cristina Bonomi Barufi. São Paulo: Escrituras Editora, 2005.

DIAS, M. S. *Reta Real, Conceito imagem e conceito definição*. Dissertação de

Mestrado. São Paulo: PUC/SP. 2002.

DUVAL, R. *Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática*. In: Aprendizagem em matemática: registros de representação semiótica. p.11-33. 2 ed. São Paulo: Papirus. 2003.

FISCHBEIN, E. *The theory of figural concepts*. Educational Studies in Mathematics, v. 24, p. 139-162. 1988.

FISCHBEIN, E.; JEHIAN, R.; COHEN, D. *The concept of irrational number in High-School: Students and Prospective Teachers*. Educational Studies in Mathematics, v. 29 (1), p. 29-44. 1995.

PENTEADO, C. B. *Concepções do professor do ensino médio relativas à densidade do conjunto dos números reais e suas reações frente a procedimentos para a abordagem desta propriedade*. São Paulo: PUC/SP. Dissertação de Mestrado. 2004.

SANTOS, J. C. *Números Reais: Um desafio na Educação Básica*. Monografia de Especialização. Universidade Federal Fluminense, Niterói, Rio de Janeiro. 2007.

SOARES, E. F. E.; FERREIRA, M. C. C.; MOREIRA, P. C. *Números reais: concepções dos licenciandos e formação Matemática na licenciatura*. Zetetiké, Campinas, v.7, n.12, p. 95-117. 1999.

SOUTO, A. M. *Análise dos Conceitos de Número Irracional e Número Real em Livros Didáticos da Educação Básica*. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) – Universidade Federal do Rio de Janeiro – UFRJ, Instituto de Matemática – IM. 2010.

ZAZKIS, A.; SIROTIC, N. *Irrational numbers on the number line – where are they?*. International Journal of Mathematical Educational in Science and Technology, v. 38 (4), p. 477–488. 2007.