INTEGRAL DE LINHA DE CAMPOS VETORIAIS/TRABALHO REALIZADO: IMAGEM DE CONCEITO E DEFINIÇÃO DE CONCEITO

Juliano Cezar Ferreira
IF Sudeste MG
julianocezarferreira@hotmail.com

Orestes Piermatei Filho
UFJF
orestes.piermatei@ufjf.edu.br

Resumo:
Este trabalho pretende expor alguns resultados de uma pesquisa de mestrado. O objetivo foi investigar elementos da imagem de conceito e definição de conceito, referentes à Integral de Linha de Campos Vetoriais, quando interpretado fisicamente como Trabalho Realizado. A teoria de imagens de conceito foi empregada como embasamento teórico para as discussões. Os dados foram coletados durante os Experimentos de Ensino por meio de questionários e entrevista à estudantes de Cálculo Diferencial e Integral III. Os resultados sugerem: estudantes de Física tendem a relacionar os conteúdos matemáticos com conceitos físicos; a visualização de campos vetoriais pode enriquecer ou gerar conflitos teóricos; a utilização de um software pode gerar novas compreensões; o planejamento de aulas para conteúdos matemáticos avançados deve contemplar a precisão da técnica matemática, mas também possibilitar o enriquecimento intuitivo dos conceitos envolvidos.

Palavras-chave: imagem de conceito; definição de conceito; integral de linha de campos vetoriais; trabalho realizado; maple.

1. Introdução

A maioria das pesquisas sobre o ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos relativos ao Ensino Superior tratam dos conceitos iniciais do Cálculo Diferencial (GIRALDO, 2004, BENEDETTI, 2003 BARBOSA, 2009, MARIN, 2009, TALL e VINNER, 1981). Segundo o artigo Integrating Computer Algebra Systems in post-secondary mathematics education: Preliminary results of a literature review, publicado no International Journal for Technology in Mathematics Education (IJTME) em 2010, há um contraste muito grande do número de pesquisas sobre o uso de tecnologia no ensino secundário em relação ao ensino superior:

> Em contraste com o grande corpo de pesquisa focado no uso de tecnologia que existe em nível secundário, há uma clara falta de investigação paralela no ensino superior, ou pós-secundário. No entanto, Lavicza (2008b) destaca que os matemáticos universitários usam a tecnologia, pelo menos tanto quanto os professores, e que as práticas de ensino inovadoras, envolvendo tecnologia que já estão sendo implementadas pelos matemáticos em seus cursos devem ser mais plenamente pesquisadas e documentadas. (IJTEM 16, p. 1, tradução nossa)[1]

O interesse desse trabalho foi parte de uma experiência docente em sala de aula no ensino de Matemática. Particularmente no ensino do Cálculo Integral de Curvas sob a ação de Campos Vetoriais. A atenção concentrou-se na observação das concepções matemáticas dos estudantes sobre a Integral de Linha de Campos Vetoriais. Adotamos como referencial para análise dos dados a teoria das Imagens de Conceitos (TALL e VINNER, 1981) e o processo de visualização como parte da proposta do Pensamento Matemático Avançado (PMA)[2].

O objetivo da pesquisa foi investigar recortes possíveis da porção das imagens de conceitos referentes à Integral de Linha de Campos Vetoriais evocadas pelos estudantes de um curso de Física. A integração do Maple em algumas atividades teve o objetivo de induzir a evocação de diferentes imagens de conceitos ou até mesmo “novas” produções.

2. Referencial teórico

Pesquisadores (TALL, 1991-2008) há quatro décadas já realizavam trabalhos e, portanto, pesquisavam os fenômenos ocorridos no processo de ensino e aprendizagem da Matemática do ensino superior, mais especificadamente os objetos do Cálculo Diferencial. Esse grupo denominou-se Advanced Mathematics Thinking (ATM) e se propôs a partir de então focar suas investigações no campo da psicologia cognitiva inseridos na Educação

[1] In contrast to the large body of research focusing on technology usage that exists at the secondary school level, there is a definite lack of parallel research at the tertiary, or post-secondary, level. However, Lavicza (2008b) highlights that university mathematicians use technology at least as much as school teachers, and that the innovative teaching practices involving technology that are already being implemented by mathematicians in their courses should be more fully researched and documented.

[2] Advanced Mathematical Thinking (AMT).

Matemática identificando principalmente elementos específicos do pensamento matemático avançado que constitui o conhecimento matemático universitário no ensino superior.

Ao apresentar um conceito matemático para o estudante, ele poderá construir ideias e imagens mentais das quais poderão ser utilizadas em inúmeras situações acadêmicas e em diferentes momentos de trabalho com aquele conceito. Cada indivíduo constrói uma estrutura conceitual iniciada pela apresentação. Para tanto, os termos imagem de conceito e definição de conceito foram construídos e descritos por Tall & Vinner (1981) no sentido de elucidá-los e, portanto, facilitar um entendimento da estrutura cognitiva construída pelo estudante nos momentos de apresentação de novos conceitos matemáticos.

Há um estímulo na memória do estudante no momento em que ele ouve ou vê uma expressão como ‘Campo Vetorial’ e então ele evoca alguma imagem mental nesse momento associada aos termos (VINNER, 1991) que de modo geral não é a definição técnica conceitual, isto é, formal. É o que Vinner (1991) vai chamar de imagem de conceito[3]. Cada indivíduo possui naquele momento uma representação visual associada ao conceito ou até mesmo em outros casos, sensações despertadas ou experiências vinculadas. O histórico de experiências escolares matemáticas do estudante, por exemplo, nesse caso é valorizado uma vez que as imagens mentais elaboradas na sua memória naquele momento podem fazer parte de um conjunto que contenha muitos objetos associados ao conceito assim como uma única imagem ou até mesmo nenhuma imagem.

> A imagem de conceito é algo não-verbal associado em nossa mente ao nome do conceito. Pode ser uma representação visual do conceito, caso o conceito tenha representações visuais; pode ser também uma coleção de impressões ou experiências. (VINNER, 1991, p. 68)

Portanto, é notável que uma imagem de conceito esteja vinculada a um indivíduo específico e a sua reação a certo termo pode depender ainda do contexto no qual ele está inserido no momento da apresentação. Nesse caso Tall & Vinner (1981) introduzem a imagem mental evocada para descrever a parcela da memória utilizada num determinado

[3] Alguns autores utilizam os termos imagem conceitual e definição conceitual.

contexto. E não significa que a parcela evocada constitui necessariamente tudo que um estudante conhece do objeto apresentado. A compreensão de um conceito passa pela formação de uma imagem conceitual associada ao objeto de conhecimento. O estudante sabe falar sobre aquele objeto em diferentes contextos quando forma imagens de conceitos associadas aos termos. Ao apresentar um conceito em matemática por meio de uma definição formal[4], esperamos que o aprendiz forme ou construa imagens de conceitos associadas a essa definição para assim afirmarmos que houve uma assimilação do conhecimento e, portanto, ele compreendeu o conceito. A partir de então ele poderá utilizar essa compreensão em diferentes contextos sem, por exemplo, fazer uso da definição formal.

Definição de conceito[5] é a definição verbal que explica o conceito (VINNER, 1991) sendo muito raramente semelhante às definições matemáticas formais associadas aos conceitos.

As definições de conceitos dadas pelos estudantes por meio da descrição verbal da imagem de conceito do objeto de conhecimento apresentado podem ser esperadas pelos professores dentro de um quadro formado, por exemplo, pelas habilidades de construir essa definição a partir de uma compreensão mais profunda do conceito. E é possível que essa definição de conceito não coincida com a definição formal sendo necessário um ajuste ou intervenção do professor para efetivamente formalizar a definição. De acordo com os autores essa etapa sendo realizada no final do processo de ensino favorece uma aprendizagem mais eficaz.

Nesse trabalho, investigamos as compreensões matemáticas de estudantes numa abordagem favorável a integração de uma tecnologia da informação e comunicação. De modo específico, pretendíamos, por meio de tarefas matemáticas mobilizar elementos da imagem de conceito referente à Integral de Linha de Campos Vetoriais.

A teoria apresentada acima sugere, em particular, que a abordagem de um conceito matemático deve incluir diferentes representações, quando possível, no sentido de propiciar a realização de conexões entre as unidades cognitivas[6] (TALL & TONY

[4] Entende-se aqui por *definição formal* aquela aceita pela comunidade matemática dentro de um dado contexto social, histórico e teórico.
[5]Neste texto utilizaremos a formulação na qual a definição de conceito está incluída na imagem de conceito.
[6] Unidade Cognitiva seria cada porção da estrutura cognitiva associada a um dado conceito, no qual o indivíduo é capaz de focar atenção de uma vez. (GIRALDO, 2002)

BERNARD, 1997, apud GIRALDO, 2002). As diferentes possibilidades de se fazer essas ligações potencializam a formação de imagens de conceitos ricas.

Dreyfus (1991) revela que em muitos processos, os aspectos matemáticos e psicológicos podem ser raramente separados entre si. Quando construímos um gráfico de uma função, nós executamos um processo matemático, seguindo certas regras que podem ser postas em linguagem matemática; ao mesmo tempo estamos provavelmente gerando uma imagem mental visual desse gráfico, isto é, nós estamos visualizando a função duma forma que mais tarde nos ajudará a raciocinar sobre ela. As imagens mentais e as imagens matemáticas estão intimamente ligadas aqui. É esta ligação entre a Matemática e a Psicologia que tornam os processos interessantes e relevantes para a compreensão da aprendizagem e pensamento em Matemática avançada.

A visualização é um processo pelo qual as imagens ou representações mentais ganham existência, diz Dreyfus (1991). Mariotti & Pesci (1994, apud COSTA, 2002), chamam de visualização o pensar espontaneamente acompanhado e apoiado por imagens. Zimmermann e Cunningham (1991, apud COSTA, 2002), dizem que a visualização está relacionada com os mais diversos ramos da Matemática e é multifacetada – com raízes na Matemática e com aspectos históricos, filosóficos, psicológicos, pedagógicos e tecnológicos importantes.

Atualmente a visualização como processo do aprender e fazer matemática parece tornar-se amplamente reconhecida. A visualização não é mais relacionada simplesmente aos efeitos ilustrativos, mas também pode ser reconhecida como um componente chave do raciocínio (profundamente envolvimento com o conceitual e não o meramente perceptivo), resolução de problemas, e mesmo em provas matemáticas (ARCAVI, 2003).

3. Metodologia e alguns resultados

Este trabalho está baseado nos resultados de uma pesquisa realizada em 2012 e é fruto de uma pesquisa desenvolvida durante o mestrado profissional em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora. Adotamos na pesquisa uma metodologia qualitativa que engloba os aspectos metodológicos de experimentos de ensino.

A pesquisa desenvolveu-se com a participação de sete estudantes do curso de Física. Alguns já haviam sido aprovados em Cálculo Diferencial e Integral III e os outros estavam cursando a disciplina. Os encontros constituíram duas etapas:

Etapa 1 – Questionário Escrito, Atividade 1 e Atividade 2: levantamento das possíveis concepções sobre alguns conceitos físicos e matemáticos prévios;

Etapa 2 – Atividade 3, Atividade 4 e Entrevista Individual: Investigação de elementos que constituem a imagem de conceito e definição de conceito referentes à Integral de Linha de Campos Vetoriais quando interpretada fisicamente como trabalho realizado e suas possíveis relações com a produção de respostas dadas à entrevista;

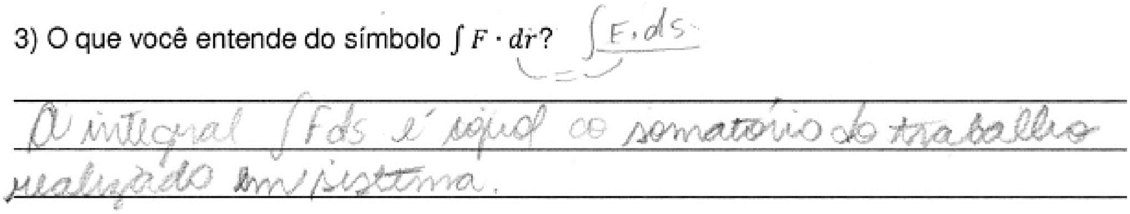
No presente trabalho (por limitações de espaço), nos restringiremos a análise da Etapa 2 descrita acima, bem como a citação de apenas alguns exemplos das respostas dadas.

4. Síntese da Análise dos Dados

Esta pesquisa teve o objetivo de “ouvir” as concepções e formas de conceber dos estudantes sobre conceitos específicos do Cálculo Integral. Estruturamos a síntese em categorias sugeridas por Meyer (2003)[7] e adaptadas para nosso objeto matemático.

- Elementos da imagem de conceito associados a respostas inválidas, do ponto de vista matemático;

1) A Integral de Linha de Campos Vetoriais é concebida como somatório do Trabalho realizado por uma Força;


3) O que você entende do símbolo $\int F \cdot d\vec{r}$? $\int F \cdot ds$

A integral $\int Fds$ é igual ao somatório do trabalho realizado em sistema.

Figura 1 – Resposta da dupla Misa e Livia à questão 3, Atividade 3

2) As representações $\int_{\sigma} F \cdot dr$ e $\int_{\sigma} F \cdot ds$ são equivalentes;

Na resposta de Misa e Livia na figura 1 observamos essa constatação.

3) A função vetorial descreve a Força;

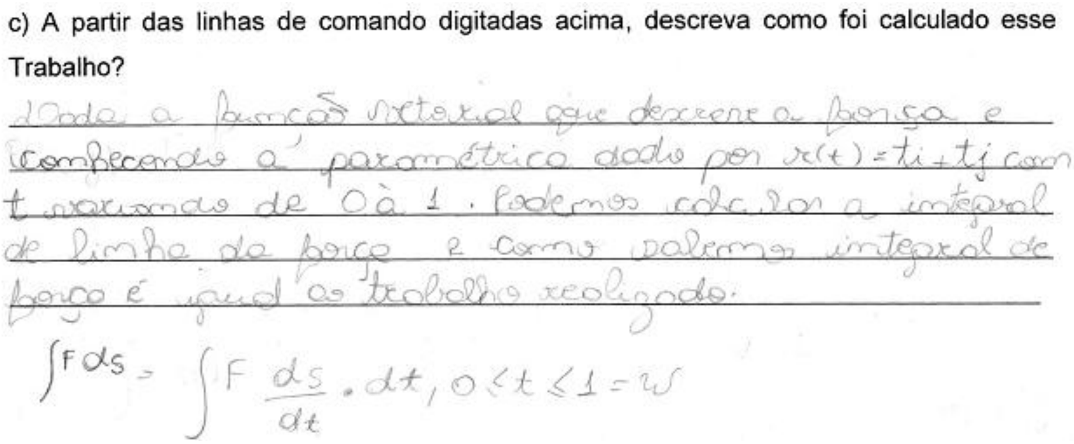
7 O objetivo de Meyer (2003) foi investigar elementos da imagem conceitual (termo utilizado pela autora) relativas ao conceito de derivada quando interpretado geometricamente por estudantes que já cursaram as disciplinas Cálculo I e II.

Havia uma questão da seguinte forma:

1) Determine o trabalho realizado por esse campo para deslocar uma partícula no caminho $r(t) = ti + \sqrt{t}j \quad de \quad t = 0\, até\, t = 1$. Utilize o CAS.

```
> força:=[-x*cos(2*y), x^2*sin(2*y)];
> x:=t:
>y:=sqrt(t):
>r:=[x,y]:
>v:=diff(r,t):
 >print(`velocidade = `, v);
>print(`função força ao longo do caminho = `,força);
>W:=int(linalg[dotprod](força,v), t=0..1,inert);
>print(`Trabalho realizado ao longo de C = `, value(W));
```

Ainda dentro dessa questão havia algumas perguntas dentre elas o item c a seguir. E a resposta da dupla Livia e Misa constatando nossa interpretação sobre a invalidade da afirmação de que a função vetorial descreve a força.



c) A partir das linhas de comando digitadas acima, descreva como foi calculado esse Trabalho?

Dada a função vetorial que descreve a força e conhecendo a paramétrica dada por $r(t) = ti + tj$ com t variando de 0 à 1. Podemos calcular a integral de linha da força e como sabemos integral de força é igual ao trabalho realizado.

$\int F ds = \int F \frac{ds}{dt} \cdot dt, 0 < t \leq 1 = W$

Figura 2 – Resposta de Livia e Misa à questão 1-c, Atividade 4

4) A Integral de Linha é nula quando o sentido da trajetória é o mesmo do campo de força.

4) Seja $F(x, y) = (x - y)i + xyj$, C é o arco de círculo $x^2 + y^2 = 4$ percorrendo no sentido anti-horario de (2,0) a (0,-2). Use o gráfico do campo vetorial e a curva para dizer se a integral de linha de F ao longo de C é positiva, negativa ou nula. Explique.

*>F:=fieldplot([x-y,x*y],x=-2..2,y=0..4):*
*>r:=animatecurve([2*cos(t),2*sin(t),t=0..Pi],frames=100):*
>display({F,r},axes=boxed,scaling=constrained,title=Trajetória da partícula sob ação do campo);

Nula, pois a trajetória descrita pela partícula tem o mesmo sentido que o campo de força, e para que haja trabalho o sentido deste deverá ser contrário do campo de força.

Figura 3 – Resposta de Misa e Livia à questão 4, Atividade 4

5) A Integral de Linha é a Área ou Volume.

3) O que você entende do símbolo $\int F \cdot dr$?

É o princípio matemático para definir uma área ou volume.

Figura 4 – Resposta de Kira à questão 3, Atividade 3

- Elementos da imagem de conceito que poderiam ser enriquecidos;

1) O Cálculo da Integral de Linha de Campos Vetoriais fornece o Trabalho realizado.

3) O que você entende do símbolo $\int F \cdot dr$?

Como a integração com a finalidade de conhecer o trajeto de uma partícula sobre uma linha. A integração nos fornece o somatório do trabalho realizado pela partícula.

Figura 5 – Resposta de Nina à questão 3, Atividade 3

2) A Integral $\int_\sigma F \cdot dr$ é uma soma dos pequenos Fdr.

3) O que você entende do símbolo $\int F \cdot dr$?

Tomando pequenos deslocamentos dr, o campo seria Fdr, então $\int$Fdr é uma "soma" dos pequenos Fdr.

Figura 6 – Resposta de Isaac à questão 3, Atividade 3

A análise relativa às respostas fornecidas às questões das Atividades 3 e 4, levantou possíveis relações existentes entre a definição de conceito, referente a Integral de Linha de Campos Vetoriais, quando interpretada fisicamente como trabalho realizado, e elementos da imagem de conceito, relativas ao referido conceito, inferidos a partir das respostas fornecidas. Neste sentido, encontramos:

1) A resposta do sujeito apresenta uma definição de conceito diferente da definição de Integral de Linha de Campos Vetoriais mas coerente com os elementos que compõem a imagem de conceito evocada para responder algumas questões propostas.

5) Calcule $\int F \cdot dr$ onde $F(x,y) = xy^6 i + 3x(xy^5 + 2)j$ e $r(t) = 2\cos(t)\, i + sen(t) j, 0 < t < 2pi.$

$\int F \cdot dr = 5{,}10$ J

6) O que representa o valor encontrado em 5?

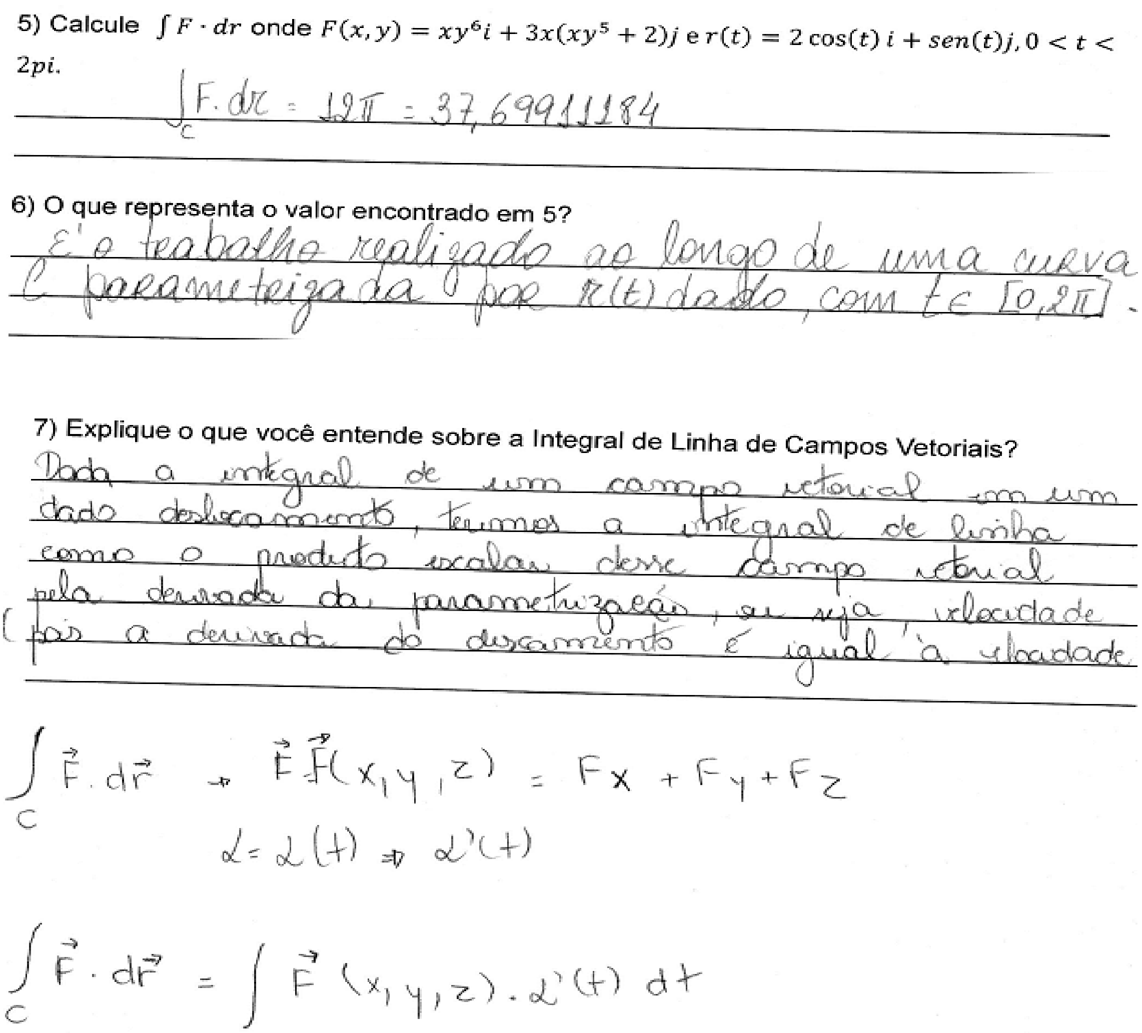
O trabalho realizado.

7) Explique o que você entende sobre a Integral de Linha de Campos Vetoriais?

É o trabalho exercido por uma força para desloca uma partícula que está sob influência do campo de força.

Figura 6 – Resposta de Misa e Livia às questões 5,6 e 7 Atividade 4

2) A resposta do sujeito apresenta uma definição de conceito que se aproxima da definição formal mas não é consultada para a formulação das respostas fornecidas às demais questões.


5) Calcule $\int F \cdot dr$ onde $F(x,y) = xy^6 i + 3x(xy^5 + 2)j$ e $r(t) = 2\cos(t)\, i + sen(t) j, 0 < t < 2pi.$

$\int_C F.dr = 12\pi = 37,69911184$

6) O que representa o valor encontrado em 5?

É o trabalho realizado ao longo de uma curva C parametrizada por r(t) dado, com t ∈ [0,2π].

7) Explique o que você entende sobre a Integral de Linha de Campos Vetoriais?

Dada a integral de um campo vetorial em um dado deslocamento, temos a integral de linha como o produto escalar desse campo vetorial pela derivada da parametrização, ou seja, velocidade (pois a derivada do deslocamento é igual à velocidade

$\int_C \vec{F}.d\vec{r} \to \vec{F}(x,y,z) = F_x + F_y + F_z$

$\alpha = \alpha(t) \Rightarrow \alpha'(t)$

$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \vec{F}(x,y,z) \cdot \alpha'(t)\, dt$

Figura 7 – Resposta de Aurora e Isaac às questões 5,6 e 7, Atividade 4

Pudemos levantar algumas considerações relativas à mobilização de diferentes porções da imagem de conceito evocadas para responder algumas questões:

1) O campo Vetorial visualizado no Maple não é um campo de Força;

Essa afirmação partiu de um estudante participante da pesquisa que não havia concordado com o gráfico de um campo vetorial gerado pelo Maple. Segundo o estudante, aquele campo não poderia ser uma campo força, pois não havia uma partícula geradora. E isso gerou um conflito teórico. Na entrevista, a estudante relata:

***Pesquisador**: Explique com suas palavras o que significou a visualização ocorrida em algumas atividades.*

***Livia**: Acho que para resolução das atividades até para entender melhor o que estava sendo colocado foi bastante importante. Tendo parte da figura a gente já gerou uma série de discussões... O que pedia na atividade a gente tentava relacionar com os conceitos que a gente já tinha. Apesar da gente não concordar com a representação que tava mostrando.*

2) O sentido do Campo Vetorial e a trajetória da partícula visualizada no Maple revela o sinal do $\int_{\sigma} F \cdot dr$

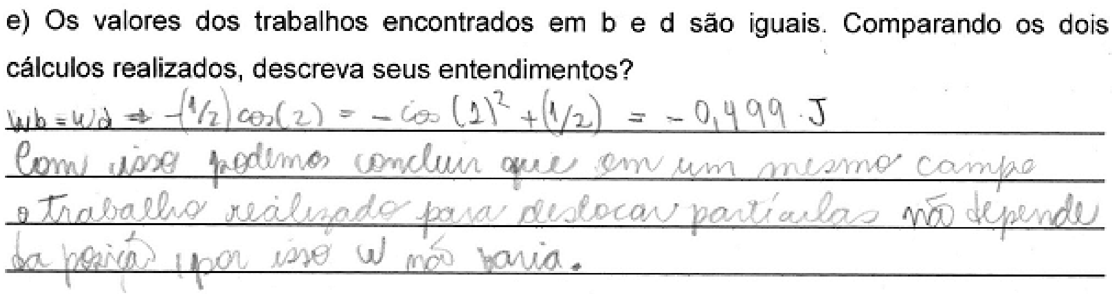
A animação realizada pelo movimento da partícula segundo a curva sob a ação de um campo vetorial gerou facilmente a constatação do sinal da Integral sobre essa curva.

3) A Integral de Linha pode ser uma ferramenta para calcular o Trabalho realizado ou o Fluxo do Campo Elétrico;

Uma estudante levantou uma outra possível aplicação do cálculo da Integral de Linha. Nesse caso ela sugeriu o cálculo do Fluxo do Campo Elétrico.

4) A Integral de Linha de um Campo Vetorial conservativo independe do caminho;

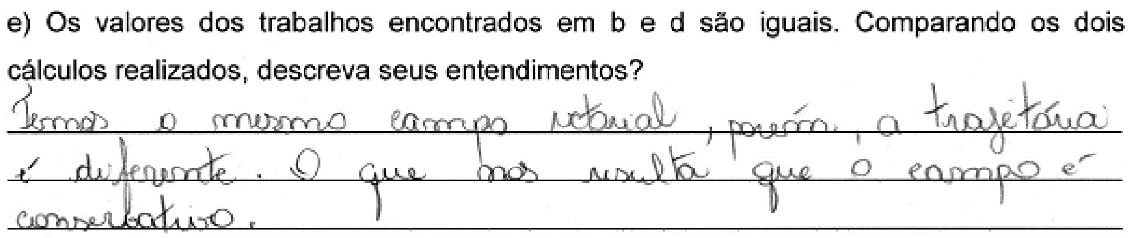
Havia uma questão propondo o cálculo procedimental da Integral de linha sob a ação de um campo vetorial ligando dois pontos. No item b a trajetória entre esses pontos era diferente da trajetória que ligava os mesmos dois pontos do item d.


e) Os valores dos trabalhos encontrados em b e d são iguais. Comparando os dois cálculos realizados, descreva seus entendimentos?

$W_b = W_d \Rightarrow -(1/2)\cos(2) = -\cos(1)^2 + (1/2) = -0,499\ J$

Com isso podemos concluir que em um mesmo campo o trabalho realizado para deslocar partículas não depende da posição por isso W não varia.

Figura 8 – Resposta de Misa e Livia à questão 1-e, Atividade 4


e) Os valores dos trabalhos encontrados em b e d são iguais. Comparando os dois cálculos realizados, descreva seus entendimentos?

Temos o mesmo campo vetorial, porém, a trajetória é diferente. O que nos resulta que o campo é conservativo.

Figura 9 – Resposta de Aurora e Isaac à questão 1-e, Atividade 4

Sem definir matematicamente um campo conservativo foi possível identificar elementos próximos desse conceito. Entendemos que o processo de exploração do conceito sem a definição técnica, a priori, favoreceu essas compreensões.

5. Algumas Conclusões

Por meio da análise dos resultados podemos afirmar que todos os sujeitos participantes mobilizaram diferentes porções que constituem a imagem de conceito referente à Integral de Linha de Campos Vetoriais quando interpretada fisicamente como trabalho realizado.

Analisando esses elementos e confrontando-os com as definições de conceito referentes à Integral de Linha de Campos Vetoriais, observou-se, em alguns casos certa incoerência. Corroborando com o sustentado por Vinner (1991), identificamos sujeitos que expressaram uma definição de conceito, referente à Integral de Linha de Campos Vetoriais, quando interpretado fisicamente como trabalho realizado, que não foi consultada por esses sujeitos, ao responder as questões propostas. Isso evidencia aquilo que foi descrito por Vinner (1991), a saber: os estudantes, mesmo inseridos em um contexto técnico no qual não consultar definições pode levá-los a cometer erros, não consultam sua definição de conceito relativo a um conceito. Mas, em contrapartida, mobilizam elementos da imagem de conceito, referente a esse conceito, para responder as questões.

A visualização proporcionada pela utilização do Maple em algumas questões como estímulo visual parece ter contribuído para ativar outras partes da imagem de conceito referente a Integral de Linha de Campos Vetoriais quando interpretado fisicamente como trabalho realizado.

Assim, a proposta de integrar ferramentas que possam facilitar a visualização no processo de ensino e aprendizagem é, no mínimo, enriquecedora, pois favorece a ligação entre as imagens mentais e as imagens matemáticas (DREYFUS, 1991). A diversidade de compreensões matemáticas de um conceito pode ser explorada por esse processo, tendo em vista as possibilidades de geração de conflitos e, portanto, ambiente fértil para o conhecimento.

No caso da pesquisa em questão, reconhecemos a importância da visualização principalmente na resolução de problemas. Percebemos como as discussões surgiram mais espontaneamente a partir do processo de visualização. E muitas dessas discussões geravam diferentes estratégias de resolução. Entendemos que todas as ações referidas sugerem uma produção matemática por parte dos estudantes. E nesse caso concordamos com Arcavi (2003) ao ressaltar a importância da visualização não somente para efeitos ilustrativos, mas também pelo reconhecimento desse processo como um componente chave do raciocínio.

Pela grande possibilidade de produção matemática desse processo cognitivo sugerido pelos resultados da pesquisa e sustentado por Arcavi (2003), ressaltamos a importância da disposição do professor em estabelecer e conduzir certas abordagens alternativas em sala de aula.

6. Considerações finais

No nosso estudo, tivemos um objetivo específico: investigar recortes possíveis da porção das imagens de conceitos referentes à Integral de Linha de Campos Vetoriais quando interpretada fisicamente como trabalho realizado de estudantes Cálculo III. Tanto o planejamento das tarefas quanto nosso papel de investigador foi orientado por esse objetivo. Nesse sentido, os resultados não são genéricos, mas aplicáveis a contextos com características semelhantes.

Tomando como referência as análises em nossa pesquisa, acreditamos que a exploração dos conceitos matemáticos avançados podem enriquecer as imagens de conceito dos estudantes permitindo que estes operem em diferentes contextos. A pesquisa ainda sugere que estudantes de Física tendem a relacionar os objetos matemáticos com conceitos físicos; a visualização de campos vetoriais pode enriquecer ou gerar conflitos teóricos; a utilização de um Software pode gerar novas compreensões. Nessa perspectiva, percebemos que o planejamento de aulas para conteúdos matemáticos avançados deve contemplar a precisão da técnica matemática, mas também possibilitar o enriquecimento intuitivo dos conceitos envolvidos.

Os resultados da investigação ainda apontam determinadas posturas quanto às abordagens desses conteúdos em sala de aula. Sobretudo quando se trata da estrutura formal das definições matemáticas que são pouco compreensivas mesmo para estudantes matriculados em disciplinas de Cálculo mais avançado, como foi o caso da pesquisa. Abordagens alternativas podem atuar de forma efetiva nas imagens de conceitos dos estudantes levando a desdobramentos nas concepções da própria atividade de aprender matemática.

Por fim, entendemos que a estrutura formal da matemática precisa ser assimilada. Mas ao distinguir o objeto matemático de ensino do objeto matemático técnico, a Teoria das Imagens de Conceito (TALL & VINNER, 1981) sugere que essa assimilação não seja suficiente. Produzir matemática não é reproduzir sua organização formal. Essa organização formal é um estado presente da Matemática. E no processo de aprendizagem, esse estado deve ser desequilibrado possibilitando uma nova reconstrução do objeto de conhecimento.

7. Referências

ARCAVI, Abraham. **The Role of Visual Representations in the Learning of Mathematics**. Educational Studies in Mathematics, n. 52, p. 215-241, 2003.

BARBOSA, S. M. **Tecnologias da informação e comunicação, função composta e regra da cadeia** – 2009, 199 f. Tese (doutorado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2009.

BENEDETTI, F.C. **Funções, Software Gráfico e Coletivo Pensantes** - 2003, Dissertação (mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2003.

BUTEAU, C., MARSHALL, N., JARVIS, D. H, & LAVICZA, Z. (2010). **Integrating Computer Algebra Systems in post-secondary mathematics education: Preliminary results of a literature review.** *International Journal for Technology in Mathematics Education, 17*(2), 57-68. [Full-text available with permission granted by IJTME]International Journal for Technology in Mathematics Education, Volume 16, No 2

COSTA, Conceição **"Processos mentais associados ao pensamento matemático avançado: Visualização".** Anais do Encontro da Seção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, p. 257-273, Coimbra, Portugal, 2002.

DREYFUS, T. (1991). **Advanced mathematical thinking processes**. In David Tall (Org.), Advanced mathematical thinking (pp. 25–41). Dordrecht: Kluwer.

GIRALDO, V., CARVALHO, L.M., TALL, D.O.,(2002) **Conflitos Teórico-Computacionais e a Imagem Conceitual de Derivada**. In L.M. Carvalho and L.C. Guimarães, História e Tecnologia no Ensino da Matemática, vol.1, p. 153 - 164, Rio de Janeiro, Brasil. 2003. Disponível em:

<http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot2003b-giraldo-carv-rj.pdf> Acesso em: 25 de outubro de 2011.

GIRALDO, V.Descrições e **Conflitos Computacionais: O Caso da Derivada**. Tese de Doutorado do Curso de Engenharia de Sistemas e Computação. COPPE-UFRJ. Rio de Janeiro, 2004.

MARIN, D. **Professores de Matemática Que Utilizam Tecnologias de Informação e Comunicação no Ensino Superior** – 2009, Dissertação (mestrado em Educação Matemática) – Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro, 2009.

TALL, D. O. (Ed.) (1991). **Advanced Mathematical Thinking**. Londres: Kluwer Academic Publisher.

___________. (1991). **The psychology of advanced mathematical thinking**. In: David Tall (Org.), Advanced mathematical thinking (pp.61-75). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

___________. **A Transição para o Pensamento Matemático Avançado Funções, Limites, Infinito e Prova**, traduzido por Márcia Fusaro Pinto, Departamento de Matemática – Faculdade de Educação, UFMG. Publicado em Grows D. A. (ed) Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning, Macmillan, New York, p. 495 – 511. 1992. Disponível em: http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1992e-trans-toamt. pdf>. Acesso em: 13 out. 2011.

TALL, D. & VINNER, S. 1981. **Concept image and concept definition in mathematics, with special reference to limits and continuity**. Educational Studies in Mathematics, 12, pp. 151-169.

VINNER, Shlomo. **O papel das definições no ensino e aprendizagem de matemática.** Traduzido por Márcia Pinto e Jussara Araújo. In: TALL, D. The Role of Definitios in the Teaching and Learning of Mathematics. Advanced Mathematical Thinking. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers. cap. 5, p. 65 – 81. 1991.

_______________. **Concept definition, concept image and the notion of function**. Int. J. Math. Educ. Sci. Technol., v. 14, n. 3, p. 293-305, 1983.