FUNÇÕES EXPONENCIAIS E LOGARÍTMICAS: UM ESTUDO POR MEIO DE UMA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Ms. Adriana Tiago Castro dos Santos
Pontifícia Universidade Católica de São Paulo
Adriana_larissa.le@hotmail.com

Resumo:
O presente artigo tem por objetivo apresentar resultados de uma pesquisa realizada junto a seis alunos do 3º ano do Ensino Médio produto de uma dissertação de mestrado. Elaboramos e aplicamos uma sequência didática com atividades que possibilitasse a apreensão do conceito de função exponencial e logarítmica. Utilizamos os pressupostos da Engenharia Didática para o delineamento da pesquisa. Para análise dos resultados, verificamos quais processos do Pensamento Matemático Avançado poderiam estar presente nos protocolos dos alunos envolvidos. Os resultados apontaram que inicialmente os alunos tiveram dificuldades na interpretação de situações problemas em que era necessário aplicar as propriedades das potências, contudo, observamos que ao final das quatro sessões os alunos compreenderam o conceito da função exponencial e logarítmica. Entre os processos do Pensamento Matemático Avançado que constatamos na análise do dos protocolos, podemos citar a generalização, mudança de representação, observação e a abstração.

Palavras-chave: Função Exponencial, Função Logarítmica, Ensino Médio, Pensamento Matemático Avançado.

1. Introdução

Ao longo da Educação Básica, o ensino de Funções possui um grande espaço no Currículo na disciplina de Matemática. Contudo, resultados de pesquisas (ARDENGHI,2008), (BIANCHINI; PUGA, 2006) apontam que o conceito de função não é bem compreendido pelos alunos, e muitas vezes esses chegam ao Ensino Superior com dificuldades na compreensão e reconhecimento das funções elementares que são estudadas no Ensino Médio.

O presente artigo tem como objetivo apresentar resultados de uma pesquisa realizada com alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública do Estado de São Paulo para ensinar funções exponenciais e logarítmicas utilizando o *software* GeoGebra como uma estratégia pedagógica.

As Orientações Curriculares do Ensino Médio (BRASIL, 2006) recomendam que na abordagem do tema não seja enfatizada um trabalho exaustivo dos logaritmos, mas que sejam apresentados aos estudantes situações-problema que ilustram o modelo exponencial e logarítmico. Tais aplicações podem ser encontradas em tópicos da Matemática Financeira (juros e correção monetária), crescimento populacional, entre outros.

O documento recomenda ainda o uso de tecnologias como recurso para subsidiar a aprendizagem da Matemática. E aponta importância de contemplar a formação escolar em dois sentidos: a matemática como ferramenta para entender a tecnologia e a tecnologia como ferramenta para entender a matemática.

> Considerando a Matemática para a Tecnologia, deve-se pensar na formação que capacita para o uso de calculadoras e planilhas eletrônicas, dois instrumentos de trabalho bastante corriqueiros nos dias de hoje. No trabalho com calculadoras, é preciso saber informar, via teclado, as instruções de execução de operações e funções, e isso exige conhecimentos de Matemática. (BRASIL, 2006 p. 87)

.

Na concepção da Tecnologia para a Matemática segundo as Orientações Curriculares Ensino Médio, é importante possibilitar ao estudante o "pensar Matematicamente" neste sentido, os alunos fazem experimentos, testam hipóteses, esboçam conjecturas e criam estratégias para resolver problemas. Tais ações são descritas por Dreyfus (1991) como processos que desenvolvem o Pensamento Matemático Avançado.

O uso das tecnologias (calculadoras, *softwares* matemáticos etc.) como estratégia pedagógica e com objetivos previamente estabelecidos podem contribuir para o desenvolvimento desses processos e assim facilitar a compreensão de um conceito matemático.

2. Os processos do Pensamento Matemático Avançado

Dreyfus (1991) aponta que os processos mentais e psicológicos estão intimamente ligados, ou seja, esses aspectos raramente são separados. Assim as imagens mentais e matemáticas estão interligadas, e essa ligação entre esses processos é relevante para entender a aprendizagem e o Pensamento Matemático Avançado.

O autor compara o processo de aprendizagem matemática com o processo de pesquisa em que ambos os casos o individuo necessita manipular mentalmente, investigar e descobrir sobre objetos. Tais processos são extremamente complexos e possuem a essência sobre o que é o Pensamento Matemático Avançado. Embora a matemática avançada seja focada nas abstrações de definição e dedução, não há uma distinção clara entre o Pensamento Matemático Avançado e o elementar, é possível abordar tópicos da matemática avançada de uma forma elementar.

A relevância está em como esses tópicos são abordados. É necessário que haja uma interação entre os processos envolvidos nas diferentes formas de representação de um mesmo conceito, na generalização e na abstração.

O Pensamento Matemático Avançado consiste em uma listagem de processos tais como a representação, visualização, indução, análise, observação, classificação e síntese são processos componentes em interação. É importante que o professor de matemática esteja consciente desses processos para que compreenda algumas das dificuldades que os estudantes possam vir a enfrentar.

Neste contexto, elaboramos uma sequência de atividades com objetivo de analisar quais processos do Pensamento Matemático Avançado segundo Dreyfus (1991) podem estar presentes nos protocolos dos estudantes e se o uso do *software* GeoGebra contribui para facilitar o processo de abstração da função exponencial e logarítmica.

3. Metodologia

Escolhemos os pressupostos da Engenharia Didática de acordo com Artigue, Douady e Moreno (1995) como aporte metodológico para subsidiar nossa pesquisa. A noção de Engenharia Didática surgiu na Didática da Matemática no começo dos anos 80.

Um dos pontos a ser destacado é que a Engenharia Didática se caracteriza como um experimento empírico fundamentado nas realizações didáticas em sala de aula, e envolve o processo de decidir sobre os resultados por meio das observações e análise das sequências de ensino.

O processo experimental da Engenharia Didática é composto por quatro diferentes fases que descreveremos a seguir:

1) *Análises prévias:* Nesta fase inicial, o objetivo é encontrar previamente as concepções acerca dos conhecimentos didáticos anteriormente adquiridos no campo de estudo. Realizamos um breve estudo dos documentos oficiais tais como Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio, Orientações Curriculares do Ensino Médio e

Sistema de Avaliação da Educação Básica Brasileiro, revisão da literatura sobre o tema e analisamos o material didático que os alunos utilizavam e sala de aula além de um estudo histórico e epistemológico da função exponencial e logarítmica.

2) *Análise a priori:* Esta fase é o momento em que se decide sobre um determinado número de variáveis denominadas como variáveis de comando, que são fixadas as restrições pertinentes ao problema estudado. Elaboramos uma sequência didática segundo o nosso referencial teórico: os Processos do Pensamento Matemático Avançado (Dreyfus, 1991), entrevistamos o ex-professor da turma e assim traçamos algumas hipóteses sobre possíveis dificuldades dos alunos sobre o tema.

3) *Experimentação***:** É a fase da realização da Engenharia com os sujeitos escolhidos pelo pesquisador. Aplicamos a nossa pesquisa durante quatro sessões. Participaram seis alunos voluntários do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública do Estado de São Paulo e organizamos em duplas denominadas D1, D2 e D3. Utilizamos o laboratório de informática da escola para a aplicação da sequência didática.

Na primeira sessão tínhamos o objetivo de resgatar o estudo da Potenciação e suas propriedades. Na segunda sessão o nosso propósito foi de explorar as características da função exponencial; domínio da função e a representação do seu gráfico utilizando o *software* GeoGebra. A terceira sessão foi composta de atividades envolvendo o conceito de logaritmos e na quarta sessão utilizamos o GeoGebra para o estudo da função logarítmica.

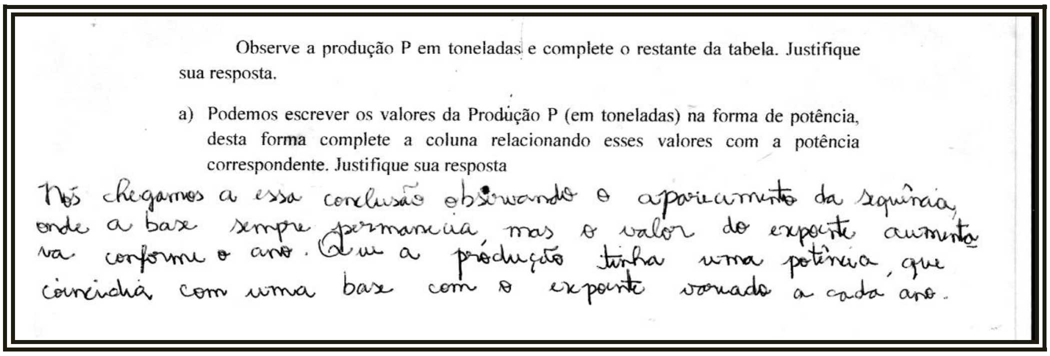
4) *Análise a posteriori* e validação**:** Consiste no conjunto de dados recolhidos ao longo da experimentação, as observações realizadas durante a aplicação, as produções dos alunos. Nesta fase, realizamos uma análise dos protocolos dos alunos e confrontamos com a nossa análise *a priori*.

4. Análise e discussão dos resultados

4.1. Análise da Sessão I

Apresentaremos neste artigo apenas a análise dos protocolos da dupla D1 resultante da sequência didática realizada durante os quatro encontros. Procuramos identificar nos protocolos quais processos do pensamento matemático avançado segundo Dreyfus (1991) poderiam estar presentes nos registros realizados pela dupla e durante as discussões realizadas entre si.

Na Figura 1, observamos durante a aplicação da sequência que a dupla D1 utilizou como estratégia de resolução uma relação com o conteúdo de Sequência Numérica estudada no 1º ano do Ensino Médio.


Observe a produção P em toneladas e complete o restante da tabela. Justifique sua resposta.

a) Podemos escrever os valores da Produção P (em toneladas) na forma de potência, desta forma complete a coluna relacionando esses valores com a potência correspondente. Justifique sua resposta

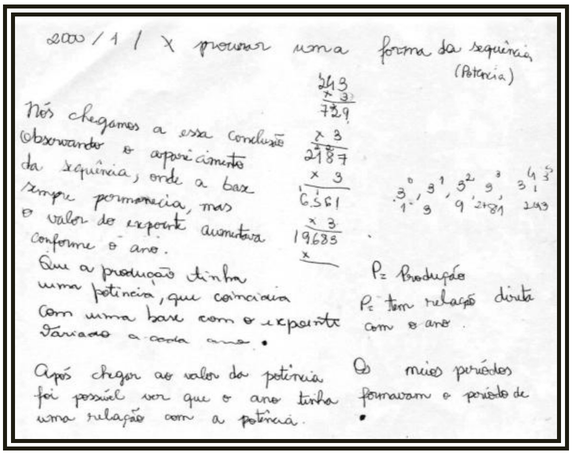
Nós chegamos a essa conclusão observando o aparecimento da sequência, onde a base sempre permanecia, mas o valor do expoente aumentava conforme o ano. Que a produção tinha uma potência, que coincidia com uma base com o expoente variado a cada ano.

Figura 1 - Protocolo da dupla D1 - Sessão I
. Fonte: SANTOS, 2011.

Observamos no diálogo da dupla D1, o processo do Pensamento Matemático Avançado descrito por Dreyfus, de mudança de representação, ao transformarem a coluna 2 Produção em toneladas pela potência correspondente na coluna 1.

- *Aluno R: Relacionando os valores na forma de Potência?*
- *Aluna F: Ah, tem que fazer uma relação da coluna 2 e transformar em Potência, mas como vamos justificar como chegamos à resposta? E como vamos escrever como percebemos que o que mudava era o expoente e não a base?*
- *Aluno R: Mas cuidado com o que você vai escrever. Se colocarmos que os valores foram triplicando, vai dar a entender que sempre foi multiplicando por 3 e não foi isso, a quantidade 3 permanecia e o que foi mudando foi o expoente.*

Após fazer diversas multiplicações pelo fator três perceberam que a variação estava relacionada com o expoente e não com a base na qual podemos perceber o processo de generalização. A mudança de representação favoreceu este processo do Pensamento Matemático Avançado porque partiram de um caso particular e chegaram a um caso geral.


2000 / 1 / x procurar uma forma da sequência (Potência)

243 × 3 = 729 × 3 = 2187 × 3 = 6561 × 3 = 19683

Nós chegamos a essa conclusão observando o aparecimento da sequência, onde a base sempre permanecia, mas o valor do expoente aumentava conforme o ano.

3^0, 3^1, 3^2, 3^3, 3^4, 3^5

Que a produção tinha uma potência, que coincidia com uma base com o expoente variando a cada ano.

P = Produção

P tem relação direta com o ano.

Após chegar ao valor da potência foi possível ver que o ano tinha uma relação com a potência.

Os meios períodos formavam o período de .

Figura 2 - Protocolo da dupla D1 - Rascunho – Sessão I.
Fonte: SANTOS, 2011

Não previmos em nossa análise *a priori* que alguma dupla utilizasse como estratégia para resolução da atividade os conteúdos de Sequência Numérica e Progressão Geométrica que eles estudaram no 1º ano do Ensino Médio para solucionar a situação-problema.

A dupla D1 justificou no item (b) que "após chegar ao valor da potência foi possível ver que o ano tinha uma relação com a potência. Por exemplo, no ano de 2000 a potência era 0, o que prova que há uma relação entre ambos". Não ficou claro se nessa justificativa ficou explícito que esta relação estava entre o último algarismo do ano e o expoente da potência, como previmos em nossa análise *a priori*. Observamos que houve dificuldade da dupla em se expressar no registro da língua natural, pois ao ouvirmos as gravações feitas em áudio percebemos que a dupla, ao discutir entre si, conseguiu estabelecer esta relação.

Observamos dificuldades nos itens (d) e (e), pois a dupla não entendeu o enunciado, e pedimos para que fizesse a leitura novamente da situação-problema. A questão suscitou algumas discussões que apresentaremos a seguir:

- *Aluno R: Não entendi o que significa o número 0,5 no contexto do problema.*
- *Aluna F: Equivale a metade de um ano.*
- *Aluno R: ½ período ou ½ ano?*
- *Aluna F: Então... O valor de 30,5 significa que vai reduzir a metade da produção em que se teria em 31, ou seja, o resultado dividiria por 2.*

Houve a coordenação entre as diferentes formas de representar o número irracional $3^{0,5}$, $3^{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{3}$. O processo do Pensamento Matemático Avançado envolvido neste item foi a mudança de representação de um mesmo conceito. A dupla concluiu que independente das representações, os resultados são iguais, e comentou que nunca haviam parado para pensar sobre as diferentes formas que um número pode ter. Esse comentário nos levou a crer que a dupla pode ter abstraído o conceito de número irracional.

Nossa intervenção neste momento foi de dar um auxílio no uso da calculadora científica. O fato da dupla D1 ter mudado a escala do gráfico no eixo das ordenadas fez com que a aparência do gráfico não ficasse na forma usual, ou seja, representado por uma curva.

Questionamos a dupla D1 sobre quais tipos de funções eles conheciam, e foram enfáticos em dizer "apenas as funções que são representadas por retas e parábolas, aquela que parece um U" (dupla D1)

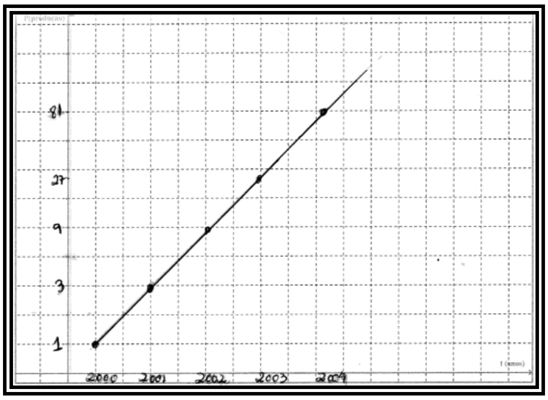


Figura 3- Protocolo da dupla D1 – Sessão I.
Fonte: SANTOS, 2011

Percebemos uma relação entre as dificuldades encontradas por essa turma e as nossas leituras durante a revisão da literatura acerca da ênfase do trabalho com funções afim e quadrática, conforme Ardenghi (2008), Bianchini e Puga (2006) constataram em seu trabalho de pesquisa.

De modo geral, acreditamos que o nosso objetivo foi parcialmente atingido durante a realização desta atividade com esta dupla. Não houve menção pela dupla D1 sobre a relação das propriedades das potências com a atividade proposta por nós. Contudo a dupla conseguiu perceber que a variação estava no expoente, fato importante para a compreensão do conceito de Função Exponencial.

4.2. Análise da Sessão II

Na sessão II exploramos as características da função exponencial, crescimento e decrescimento da curva, domínio e imagem da função.

Na questão abaixo temos por objetivo que os alunos utilizem os valores apresentados na primeira coluna para x e efetuem o cálculo da potenciação e relacionem as propriedades da potenciação com expoente negativo e expoente fracionário.

x	2^x	3^x	$\left(\frac{1}{2}\right)^x$	$\left(\frac{1}{3}\right)^x$
1				
2			$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$	
3				
0	$2^0 = 1$			
-3	$2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$			
$\frac{1}{2}$		$3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3} \cong 1{,}73$		$\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cong 0{,}71$

Figura 4 - Situação de Aprendizagem 1 adaptada pela autora.
Fonte: São Paulo, 2009, p. 14.

De modo geral a dupla obteve dificuldade para preencher a tabela, pois de nenhuma forma mencionamos as propriedades de potências como caminho para a resolução. O fato de que havia alguns valores para serem completados, possibilitou o processo de observar, estabelecer conjecturas e levantar hipóteses para fazer a relação das propriedades das potências com expoentes negativos, potência de números fracionários e radicais estudadas no Ensino Fundamental.

Acreditamos que o uso da calculadora facilitou o desenvolvimento da atividade.

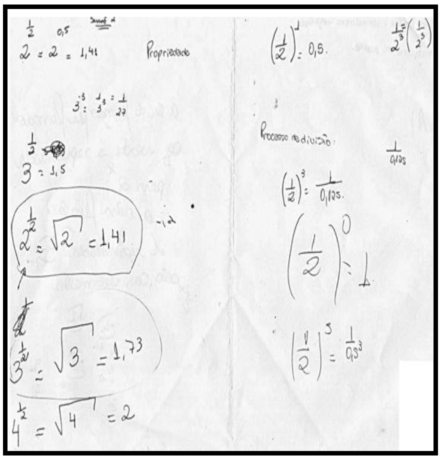


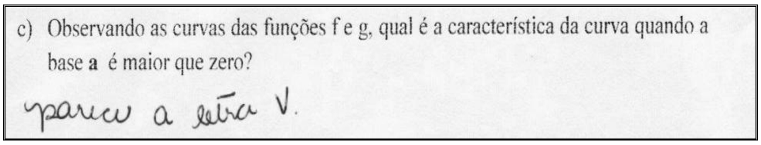
Figura 5 - Rascunho feito pela dupla D3 – Sessão II.

Fonte: SANTOS, 2011

Podemos observar o que Dreyfus chama de processo de mudança de representação, investigação ao analisar o rascunho da dupla D3 (Figura 5). A dupla D3 utilizou a calculadora científica e verificaram que $2^{\frac{1}{2}} = 2^{0,5} = \sqrt{2}$ possuem diferentes representações, mas possuem o mesmo valor. A dupla D3 utilizou a calculadora para testar outros valores como consta no protocolo acima.

Nosso objetivo foi possibilitar uma relação entre a tabela 1 proposta na atividade e a representação do gráfico das funções na atividade 2, para que os alunos pudessem observar alguns valores e concluir que a função g definida por $g(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ é uma função decrescente enquanto que a função f definida por $f(x) = 2^x$ é uma função crescente.

Observamos que as três duplas tiveram dificuldades em interpretar o item (c) conforme a Figura a seguir, pois identificaram a representação do gráfico da função apenas como um desenho, e não como uma relação de dependência entre as grandezas x e y.


c) Observando as curvas das funções f e g, qual é a característica da curva quando a base **a** é maior que zero?

parece a letra V.

Figura 6 Protocolo dupla D1- Sessão II.
Fonte: SANTOS, 2011

Após essa atividade, a partir do item (d), a dupla utilizou o *software* GeoGebra para responder os demais itens. Percebemos que ao utilizar o *software*, a dupla demonstrou maior entusiasmo, pela rapidez que o GeoGebra proporciona ao esboçar o gráfico das funções. Entre os processos do Pensamento Matemático Avançado segundo Dreyfus (1991) que pudemos perceber ao analisar o protocolo da dupla D1, podemos citar o processo de observação, mudança de representação algébrica para a representação gráfica, observou e generalizou quando uma função exponencial pode ser crescente ou decrescente.

4.3. Sessão III

Utilizamos a atividade abaixo para iniciar a Sessão III cujo objetivo foi de explorar o conceito de logaritmos.

*1) A população **N** de um determinado município cresce exponencialmente, desde a sua fundamentação há 20 anos, de acordo com a expressão $N = 3000.10^{0,1t}$, sendo **t** em anos. Responda:*

*a) O Valor de **N** quando o município foi fundado;*

*b) O valor de **N** dez anos após a fundação;*

*c) O valor de **N** nos dias atuais;*

d) Depois de quanto tempo, após a fundação a população atingirá a marca de 3000000 habitantes, se o ritmo de crescimento continuar assim?

e) Depois de quanto tempo, após a fundação, o valor de N atingirá 600 000?

f) Você conseguiu chegar na expressão $10^{0,1t} = 200$?

g) Observe que $10^2 = 100$ e que $10^3 = 1000$ então deve haver um número n entre 2 e 3 tal que $10^n = 200$, usando a calculadora científica tente encontrar um valor estimado para n. (use 3 casas decimais)

h) Agora aperte a tecla log e depois o número 200. Qual é a sua conclusão?

i) A partir dos dados encontrados, volte ao item (g) e termine de resolvê-lo.

Como previmos em nossa análise *a priori* a dupla D1 não teve dificuldade em responder os itens (a), (b), (c) e (d), pois era questões que necessitavam apenas fazer manipulações aritméticas no tratamento numérico e reconhecer que a variável dependente estava no expoente, como também compreender a situação-problema.

A partir do item (e) as dificuldades começaram a surgir, como por exemplo, na mudança da variável, pois fizeram: $N = 3.000.10^{0,1.(2,3)}$ e foram atribuindo vários valores para t até chegar no expoente procurado. Ao contrário da outra dupla D1, esta não conseguiu chegar à forma $10^{0,1\,t} = 200$, pois não observou que no lugar de N era necessário atribuir o valor de 60000. Faltou a compreensão que o valor procurado era o número representado pela letra t e não o valor de N.

Após inúmeras tentativas de encontrar o expoente necessário para a solução do problema, pedimos para que a dupla D1 deixasse o item (e) e continuasse a leitura dos demais itens, e mesmo no item (g) que sugere o uso de 3 casas decimais, esta dupla usou várias casas decimais para expoente.

O item (e) só foi resolvido depois que utilizou a tecla log, escreveu $\log 200 = 2.30102996$ e arredondou para 2.20103.

Embora tenha encontrado o valor correto do expoente para a variável t, a dupla D1 escreveu da seguinte maneira:

e) Depois de quanto tempo, após a fundação, o valor de N atingirá 600 000?

$N = 3.000 . 10^{0,1 . 2 . 3 0103}$ $N = 3000200$

Figura 7 - Protocolo da dupla D1 - Sessão III.
Fonte: SANTOS, 2011

Talvez o erro possa ter sido ocasionado pela manipulação da calculadora científica, ou por falta de atenção.

h) Agora aperte a tecla log 200. Qual é a sua conclusão?

Que ela é bem útil que Resolve Rapidamente nossos problemas ela encontra o expoente.

i) A partir dos dados encontrados, volte ao item (g) e termine de resolvê-lo.

$N = 3000 . 10^{0,1 . 2 . 3 0103}$

$N = 3000 . 200$

$N = 600000$

Figura 8 - Protocolo da dupla D1 - Sessão III.
Fonte: SANTOS, 2011

A dupla concluiu que o logaritmo é o expoente, mas não percebeu que o item (e) era o inverso do que eles fizeram nos itens (a), (b), (c) e (d).

2) Observe os números disposto e complete a tabela

N	Escrita em Potência	Escrita em Logarítmo
100	10^2	log 100 = 2
1000	10 3	log 1000 = 3
10	10^1	log 10 = 1
10^0	10^0	log 10 = 01
[illegible]	$10^{\frac{1}{2}}$	log (5 = 1/2) $10^{\frac{1}{2}}$ = 3,16 ...
$\frac{1}{100}$	10^{-2}	log 10^{-2} = 0,01
1	10^0	log = 1
0,1	10^{-1}	log 0,1 = -1
0,001	10^{-3}	log 10^{-3} = - 3
0,0004	4. 10^{-4}	log 0,0004 = -4
-10	$-10^{?}$	log -10 =
0	—	—

Figura 9 - Protocolo da dupla D1 - Sessão III
. Fonte: SANTOS, 2011

Ao analisar o protocolo acima, observamos inúmeras dificuldades na mudança de representação e a relação do registro numérico na escrita em forma de potência para a escrita em logaritmos. A dupla D1 conseguiu relacionar a atividade realizada na Sessão I, para uma mudança de representação de um expoente fracionário para a forma de um radical. Onde consta $10^{\frac{1}{2}}$, a dupla escreveu o $\log 5 = \frac{1}{2}$ e novamente escreveu $10^{\frac{1}{2}}$ = 3,16..., parece que a dupla fez $(10 \div 2 = 5)$ e concluiu que o $\log 5$ é igual a $\frac{1}{2}$, não concluindo que o $\log \sqrt{10} = \frac{1}{2}$. n

Acreditamos que essa dificuldade está relacionada à compreensão do conceito de logaritmos representada por um radical ou com expoente fracionário.

Por meio deste protocolo, observamos que esta dupla não compreendeu que o logaritmo está relacionado com o expoente. Uma das dificuldades debatidas entre a dupla D1 foi mudar a representação do número 1 para a base 10. Uma aluna chegou a dizer: *"Como transformar o número 1 em 10? Isso é impossível!* Entretanto o seu colega disse: "*Você esqueceu que se colocarmos no expoente o número zero, teremos o número 1, é somente uma mudança de representação numérica*." Observamos que a dupla não utilizou a calculadora científica para conferir os resultados.

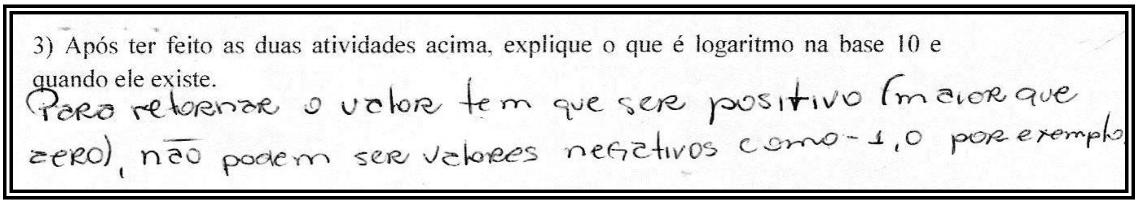

3) Após ter feito as duas atividades acima, explique o que é logaritmo na base 10 e quando ele existe.
Para retornar o valor tem que ser positivo (maior que zero), não podem ser valores negativos como -1,0 por exemplo

Figura 10- Protocolo da dupla D1 - Sessão III.
Fonte: SANTOS, 2011

Após ter completado a tabela na questão 2, a dupla D1 observou a tabela novamente, utilizou a calculadora científica e percebeu que o logaritmo na base 10 existe para valores maiores que zero, mas esqueceu de incluir o zero em suas conclusões.

Os Processos do Pensamento Matemático Avançado presentes nesta atividade são os da observação e visualização. O uso da calculadora científica foi relevante para que a dupla D1 respondesse à questão, entretanto percebemos que não houve conferência dos resultados na tabela anterior. Perguntamos aos alunos como eles usavam a calculadora científica nas aulas, e responderam que era somente para resolver os cálculos, mas nunca retornavam a questão para verificar se o resultado estava correto.

5) Repetindo o procedimentos realizados nos itens acima, sendo A = 10^a e B= 10^b então podemos escrever log A.B = $\log(10^a \cdot 10^b) \log(10^a + 10^b) = \log = 10^{AB} = 10^{AB} = AB$

6) Determine o valor dos logaritmos abaixo:

a) $A = \log_2 \frac{16}{4} = 2$ $\quad A = \log_2 \frac{16}{4} = \log_2 4 = 2$

b) $B = \log_2 16 - \log_2 4 = 4$ $\quad 4 - 2 = 2$

Observe os itens (a) e (b) da questão anterior. Sendo A = B e c= a base do logaritmo então poderemos escrever que $A = \frac{\log_c a}{\log_c b} = \frac{2}{4} = 4 - 2 = 2$

Figura 11 - Protocolo da dupla D1 - Sessão III.
Fonte: SANTOS, 2011

Na questão 5 e 6, a dupla D1 realizou os processos do Pensamento Matemático Avançado como a observação e a generalização, pois retornou à questão 4 e fez o $\log AB = \log a + \log b$, deduzindo com isso, que na divisão seria o mesmo processo, ou seja, $\frac{\log A}{\log B} = \log A - \log B$.

7) Dada a expressão $M = \log_2 7^3$ escreva

a) como um produto de logaritmos em fatores iguais.

$M = \log_2(7.7.7)$

b) Agora, transforme o produto de encontrado na questão anterior em soma de 3 parcelas. Chamando de N a expressão que você encontrou

$N = \log_2 7 + \log_2 7 + \log_2 7 = 3 \log_2 7$

c) Podemos dizer que N = M?

Sim porque possuem a mesma representação

d) Observe os itens (a), (b) e (c) então podemos escrever que se o $\log_a M^N =$

$N . \log_a M$

Figura 12- Protocolo da dupla D1 - Sessão III.
Fonte: SANTOS, 2011

Na questão 7 a dupla D1 teve dificuldade em interpretar a questão, pois não sabia o significado da frase: “produto de fatores iguais”, após várias tentativas e discussões, percebeu que era desenvolver o logaritmo de uma potência por meio de uma multiplicação.

Nesta Sessão, a dupla D1 apresentou várias dificuldades nos procedimentos numéricos e algébricos presentes nos protocolos. Contudo, é uma dupla que realiza discussões e propicia o trabalho em equipe.

Na Sessão IV foi realizada com o auxílio do *software* GeoGebra. Nosso objetivo foi explorar a visualização do gráfico de funções no registro gráfico, e o conceito de função inversa para que ao final desta Sessão, os alunos pudessem concluir que a função logarítmica é a inversa da função exponencial. Percebemos que a dupla não teve dificuldade de realizar as atividades propostas e constataram que a função exponencial é a função inversa da função logarítmica.

5. Considerações

O presente trabalho teve como objetivo apresentar resultados parciais de uma pesquisa que resultou uma dissertação de mestrado. Foi elaborada, aplicada e analisada uma sequência didática para o ensino de função exponencial e logarítmica utilizando o *software* GeoGebra com alunos do 3º ano do Ensino Médio de uma escola pública do Estado de São Paulo.

Entendemos que o professor de Matemática, ao propor atividades aos seus alunos necessita ter conhecimentos de quais processos cognitivos podem favorecer a aprendizagem, e como apresentar aos estudantes conteúdos matemáticos que possibilitem o desenvolvimento desses processos e contribuam com a aprendizagem. Procuramos propor atividades que possibilitassem o desenvolvimento dos Processos do Pensamento Matemático Avançado à luz de Dreyfus (1991) e foi norteada pelos pressupostos da Engenharia Didática.

No decorrer das sessões observamos que a dupla foi evoluindo, as discussões entre a dupla favoreceu o levantamento de hipóteses sobre o comportamento do gráfico da função, do domínio e da imagem.Acreditamos que a partir do momento que usamos a calculadora científica para testar hipóteses e utilizamos o *software* GeoGebra facilitou a compreensão desses conceitos. A dupla destacou a importância da visualização do gráfico da função no *software,* além da possibilidade de testar outras funções de modo dinâmico e rápido.

De modo geral podemos dizer que as principais dificuldades que surgiram foram ao realizar procedimento numérico e algébrico, principalmente no momento em que foi solicitado para completar as tabelas, pois eram necessários conhecimentos prévios sobre as propriedades das potências. Outra dificuldade que podemos ressaltar foi a justificativa com palavras, a dupla D1 foi muito enfática em dizer que: " *Nas aulas de matemática em geral, não somos motivados a justificar as nossas conclusões com palavras, mas apenas com números"* (dupla D1).

Os avanços dos alunos foram claramente destacados na Sessão IV, a dupla utilizou uma estratégia diferente para descobrir a expressão algébrica das funções a partir de seu gráfico Essas estratégias nos surpreenderam, pois foi diferente do que previmos em nossas análises *a priori*, esperávamos que os alunos observassem as coordenadas de alguns pontos que pertenciam às retas que propomos e as observassem, para compreender o conceito de função inversa, no entanto, quando os alunos utilizaram o *software* GeoGebra, as estratégias foram diversas, utilizaram recursos de tentativa e erro, recurso da Geometria e o cálculo de Determinantes estudados em Geometria Analítica.

Dreyfus defende de que o uso do computador como ambiente de aprendizagem utilizando diferentes representações de um mesmo conceito pode contribuir para estabelecer relações entre elas e ao surgimento de ideias para a formação de conceito que podemos chamar de processos de investigação. Acrescentamos que o uso da calculadora científica também contribuiu para o desenvolvimento dos processos de investigação, mudança de representação, generalização e abstração.

.Como reflexão da nossa prática ao realizar esta pesquisa nós percebemos o quanto é trabalhoso elaborar uma sequência didática e planejar estratégias de ensino com objetivos previamente estabelecidos. Percebemos que o uso apenas de materiais pedagógicos e livros didáticos em que os exercícios estão prontos não é suficiente para contribuir para a aprendizagem. É necessário que o professor escolha situações-problema que contemplem situações que possibilitem aos alunos a oportunidade para investigar, elaborar e testar hipóteses, conjecturar e assim tornar possível a generalização e abstração de um conceito matemático.

Para tanto concluímos o quanto a formação continuada do professor é importante, pois contribui para o nosso crescimento profissional e consequentemente refletirá na aprendizagem dos nossos alunos. Como pesquisadora, esperamos que a leitura deste trabalho apresentado possa contribuir para novas pesquisas na Educação Matemática.

6. Referências

ARDENGHI, M. J. *Ensino e aprendizagem do conceito de função: Pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil.* 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica, São Paulo.

ARTIGUE, M; DOUADY, R.; MORENO, L. *Ingeniería didática em Educación Matemática: um esquema para la investigación y la innovación em la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. B*ogotá: Pedro Gómez, 1995.

BIANCHINI, B. L; PUGA, L. Z. Função: Diagnosticando Registros de Representação Semiótica In: *REFREMAT- Revista Eletrônica de Republicação em Educação Matemática:* UFSC, p. 5-16, 2006.

DREYFUS, T. Advanced Mathematical Thinking Processes**.** In: Tall, David. *Advanced Mathematical Thinking*. Kluwer Academic Publishers: Dordrecht – Holanda, 1991, p. 25-41.

SANTOS, A. T. C. *O Ensino da Função Logarítmica por meio de uma sequência didática ao explorar suas representações com o uso do software GeoGebra.* 2011, Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo. 2011.

SÃO PAULO (ESTADO). Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Caderno do Professor de Matemática*. 1º ano Ensino Médio vol. 3, 2009.