CONEXÃO ENTRE OS MÉTODOS DA SUBSTITUIÇÃO E ESCALONAMENTO NO ESTUDO DE SISTEMAS LINEARES DE EQUAÇÕES ALGÉBRICAS LINEARES

Lígia Françoise Lemos Pantoja[1]
Universidade Federal do Pará – UFPA/REAMEC/SEDUC
ligiadauepa@yahoo.com.br

RESUMO: O referido artigo é parte de uma pesquisa que trata da conexão entre o Método da Substituição e o Método de Escalonamento no processo de resolução de Sistemas de Equações Algébricas Lineares. O objetivo do trabalho é mostrar a conexão entre os dois métodos através de operações matemáticas que são definidas aplicando o Método da Substituição e que são usadas, também, quando um sistema é resolvido pelo processo de escalonamento. No trabalho, discutimos o uso de conexões no ensino de matemática enfatizando o estudo de sistemas lineares; apresentamos os métodos da substituição e escalonamento e evidenciamos a lógica matemática das operações usadas na resolução de sistemas quando o mesmo é desenvolvido pelo Método do Escalonamento. Os resultados da pesquisa apontam para uma evidente conexão entre os dois métodos demonstrando assim, que é possível se ensinar matemática interligando os saberes.

Palavras-chave: Sistemas Lineares; Conexão; Método da Substituição; Método de Escalonamento.

1 - O USO DE CONEXÕES NO ENSINO DE MATEMÁTICA

O atual ensino de matemática desenvolvido nas escolas, não raro, tem provocado nos alunos aversão quanto ao estudo dos saberes inerentes à ciência matemática. As causas dessa aversão podem estar associadas a não articulação entre os saberes escolares o que acaba por deixar, na maioria das vezes, os alunos sem a devida compreensão dos significados envolvidos no estudo dos objetos matemáticos.

A não conexão entre os saberes escolares pode conduzir os alunos a um aprendizado mecânico e desprovido de reflexão, uma vez que a falta de ligação entre os saberes pode impedir a articulação entre os conhecimentos aprendidos. Na verdade, o estudo isolado de um tema pode não permitir a exploração do caráter indagador que ele possui, daí, em muitos casos, não possibilitar a construção significativa do conhecimento. A esse respeito os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio - PCN's afirmam que:

> [...se os conceitos são apresentados de forma fragmentada, mesmo que de forma completa e profunda, nada garante que o aluno estabeleça alguma significação

[1] Doutoranda em Ensino de Ciências e Matemática do REAMEC/UFMT/UFPA

> para as idéias isoladas e desconectadas umas das outras. Acredita-se que o aluno sozinho seja capaz de construir as múltiplas relações entre os conceitos e formas de raciocínio envolvidas nos diversos conteúdos; no entanto, o fracasso escolar e as dificuldades frente à matemática mostram claramente que isso não é verdade]. (BRASIL, 2000, p.43).

Embora os PCN's recomendem que o ensino de matemática seja desenvolvido através do uso de conexões, não somente da matemática com outras áreas do conhecimento, mas que, também, sejam estabelecidas conexões entre os vários temas que compõe a própria matemática, observamos que as temáticas têm sido trabalhadas de forma isoladas umas das outras; é o que se verifica, por exemplo, diante do ensino de Sistemas de Equações Algébricas Lineares no nível médio quando o assunto é, geralmente, apresentado de forma desconectada do estudado no nível fundamental, como se tudo fosse uma conseqüência natural advinda da teoria de Matrizes e Determinantes.

Pais (2006) em seu livro "*ensinar e aprender matemática*" defende que o ensino de matemática seja desenvolvido através da articulação entre os saberes, uma vez que lançar articulações entre configurações, conceitos, problemas e propriedades é uma das condições necessárias para a expansão dos resultados do ensino e da aprendizagem da matemática. Segundo (PAIS, 2006, p.52), "quanto mais intensas forem a interatividade e a articulação, mais significativa será a aprendizagem", já que é através delas que os alunos constroem conhecimentos e fazem matemática.

O fazer matemático, compreendido por Chevallard (2001) como sendo o ato de identificar esquemas de ação próprios do raciocínio, é marcado por articulações e integração de saberes matemáticos, ora explícitos, ora implícitos e este, sempre que possível, precisa ser trabalhado nesse sentido, não somente para atender o que preconiza os PCN's, mas para possibilitar a construção significativa do conhecimento. A tomada de consciência das articulações e integrações de saberes matemáticos e extras matemáticos, para gerar um novo saber matemático pelo sujeito, parece se impor quando tratamos do ensino de matemática, e é isso que buscamos mostrar nesse trabalho.

São várias as articulações possíveis de serem realizadas diante do estudo dos objetos matemáticos e seria impossível aqui apresentamos todas, daí, termos direcionado nossa discussão ao estudo de Sistemas de Equações Algébricas Lineares buscando privilegiar a conexão entre o tratamento que é dado ao estudo do tema no ensino fundamental com o tratamento que deveria receber no ensino médio.

O tratamento dado ao estudo de Sistemas Lineares no ensino fundamental se constitui como saber prévio segundo o qual emerge um novo saber. Mais precisamente, o método de resolução de sistema através da substituição emerge como o Método de Escalonamento numa conversão de registros, conforme será mostrado a seguir.

Os saberes matemáticos necessitam ser articulados para possibilitar aos alunos a construção de seus próprios conhecimentos diante dos significados empregados aos objetos estudados. Nesse sentido, é importante que se desenvolva o estudo de um tema através de vários tratamentos, uma vez que o emprego de um único registro pode prejudicar o aprendizado, considerando que cada um demonstra apenas uma parte outra de conceitos ainda desconhecidos. Na verdade, a formação do pensamento matemático está associada à conexão estabelecida entre os inúmeros conceitos matemáticos aprendidos, daí a importância de ensinarmos matemática mostrando as múltiplas relações existentes entre os saberes estudados.

2 – A RESOLUÇÃO DE SISTEMAS ATRAVÉS DOS MÉTODOS DA SUBSTITUIÇÃO E ESCALONAMENTO

Resolver um Sistema de Equações Algébricas Lineares significa envidar esforços sistemáticos para encontrar uma solução do sistema. Entre os esforços sistematizados, que denominamos de métodos, destacamos dois, através dos quais estabelecemos conexões buscando a conversões de um em outro. O primeiro método evidenciado, que é objeto do ensino fundamental, foi o Método da Substituição e o segundo, objeto de estudo no ensino médio, foi o Método do Escalonamento. A percepção da conexão existente entre os referidos métodos se constitui parcela importante para a verificação de como o primeiro pode ser convertido no segundo, conforme será mostrado a seguir.

2.1 – O MÉTODO DA SUBSTITUIÇÃO NA RESOLUÇÃO DE SISTEMAS

O Método da Substituição consiste em escolher e escrever uma incógnita em função das outras a partir de uma equação fixada e substituir nas demais equações, com o propósito de eliminá-la nessas equações, obtendo-se, assim, um novo sistema mais simples de resolução que o sistema anterior. Caso a primeira substituição de uma incógnita nas demais equações não tenha sido suficiente para encontrar a solução do sistema, continua-se o processo escolhendo e fixando nova incógnita e equação para substituição, e conseqüente eliminação da incógnita nas demais equações até que a solução seja alcançada.

O procedimento acima descrito pode ser evidenciado no exemplo a seguir:

Considerando o sistema

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 & (1) \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 & (2) \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 4 & (3) \end{cases}$$

Fixando a primeira equação e escrevendo essa equação evidenciando a incógnita x_1 para eliminar nas demais equações, segue que:

$$x_1 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3$$

Substituindo x_1 nas equações 2 e 3 temos:

$$2\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3\right) - 3x_2 + x_3 = 4 \Rightarrow -\frac{13}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3 = \frac{2}{3}$$

e

$$\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3\right) - 4x_2 + 2x_3 = 4 \Rightarrow -\frac{14}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 = \frac{7}{3}$$

Dessa primeira substituição e eliminação da incógnita x_1 no sistema, resulta o novo sistema que é mais simples e equivalente ao sistema original;

Se $x_1 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3$, então

$$-\frac{13}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3 = \frac{2}{3}$$

$$-\frac{14}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 = \frac{7}{3}$$

Observamos nas duas últimas equações do novo sistema que a incógnita x_1 não aparece por ter sido eliminada com o processo de substituição. No entanto, a solução ainda não se mostra evidente, o que exige selecionar e fixar nova incógnita e equação para repetir o processo tomando as novas equações reduzidas encontradas, ou seja, a segunda e terceira equações. Assim, fixando a segunda equação no novo sistema e evidenciando nessa equação a segunda incógnita, encontramos a expressão abaixo.

$$x_2 = -\frac{2}{13} + \frac{5}{13}x_3$$

A expressão definida para x_2, ao ser substituída na terceira equação, resulta em:

$$-\frac{14}{3}\left(-\frac{2}{13}+\frac{5}{13}x_3\right)+\frac{7}{3}x_3=\frac{7}{3} \quad\Rightarrow\quad \frac{28}{39}-\frac{70}{39}x_3+\frac{7}{3}x_3=\frac{7}{3} \quad\Rightarrow\quad \frac{21}{39}x_3=\frac{63}{39}$$

Dessa nova substituição se evidencia o novo sistema ainda mais simples a seguir.

Se $x_1=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3$ e

$x_2=-\frac{2}{13}+\frac{5}{13}x_3$, então

$$\frac{21}{39}x_3=\frac{63}{39}$$

Como pode ser observado, a solução do sistema é evidenciada, a começar pela terceira equação que explicita o valor da terceira incógnita $x_3=3$. Substituindo esse valor na segunda equação encontramos o valor da segunda incógnita.

$$x_2=-\frac{2}{13}+\frac{5}{13}x_3 \Rightarrow x_2=-\frac{2}{13}+\frac{5}{13}\times 3 \;\Rightarrow\; x_2=1$$

Com esses valores encontrados, substituímos na primeira equação para encontrar a primeira incógnita.

$$x_1=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3 \Rightarrow x_1=\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\times 1+\frac{1}{3}\times 3 \;\Rightarrow\; x_1=2$$

Com isto, $x_1=2$, $x_2=1$ e $x_3=3$ é a solução procurada, ou seja, esse resultado corresponde a valores que satisfazem as equações do sistema.

As manipulações algébricas empregadas no Método da Substituição para resolver sistemas podem ser usadas para visualizar a lógica das operações matemáticas empregadas no processo de escalonamento de um sistema, conforme mostraremos a seguir.

2.1.1 – O METODO DA SUBSTITUIÇÃO E A LÓGICA DAS OPERAÇÕES ELEMENTARES USADAS NO ESCALONAMENTO DE SISTEMAS

A aplicação do Método da Substituição no estudo de sistemas lineares possibilita estabelecer uma seqüência de operações matemáticas que são usadas quando se resolve sistema através do Método de Escalonamento. Tais operações demonstram a conexão existente entre os dois métodos conforme mostramos no exemplo a seguir.

Considerando o Sistema abaixo e zerando suas respectivas equações, temos:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 - 5 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1 = 0 \\ E_2 = 0 \\ E_3 = 0 \end{cases}$$

Aplicando o Método da Substituição, podemos escrever outros sistemas, equivalentes ao acima apresentado, da seguinte forma:

Evidenciando a primeira incógnita da primeira equação e substituindo nas demais equações, temos:

$$x_1 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3 \Rightarrow x_1 - \frac{1}{3}\left(3x_1 + 2x_2 - x_3 - 5\right) = x_1 \Rightarrow x_1 - \frac{1}{3}E_1 = x_1$$

Substituindo a primeira incógnita na segunda equação.

$$2\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3\right) - 3x_2 + x_3 - 4 = 0 \Rightarrow 2\left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}x_2 + \frac{1}{3}x_3\right) - \frac{6}{3}x_1 + 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4 = 0$$

$$\left(2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4\right) - \frac{2}{3}\left(3x_1 + 2x_2 - x_3 - 5\right) = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{13}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3 = \frac{2}{3} \Rightarrow E_2 - \frac{2}{3}E_1 = 0$$

Substituindo a primeira incógnita na terceira equação.

$$\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3\right)-4x_2+2x_3-4=0 \Rightarrow \left(\frac{5}{3}-\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3\right)-\frac{3}{3}x_1+x_1-4x_2+2x_3-4=0$$
$$\left(x_1-4x_2+2x_3-4\right)-\frac{1}{3}\left(3x_1+2x_2-x_3-5\right)=0$$

$$\Rightarrow\ -\frac{14}{3}x_2+\frac{7}{3}x_3=\frac{7}{3} \Rightarrow E_3-\frac{1}{3}E_1=0$$

A partir da primeira substituição realizada, um sistema equivalente ao original foi construído. O novo sistema é mais simples e possui o mesmo conjunto solução do sistema original. A seguir apresentamos o sistema equivalente construído:

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-x_3=5 \\ -\dfrac{13}{3}x_2+\dfrac{5}{3}x_3=\dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{14}{3}x_2+\dfrac{7}{3}x_3=\dfrac{7}{3} \end{cases}$$

Através da aplicação do Método da Substituição, sistemas equivalentes ao original são construídos até que se evidencie a solução, além do que, através do referido método, são definidas operações matemáticas que possibilitam resolver sistemas aplicando o método do escalonamento matricial. As operações definidas com a primeira substituição realizada foram:

$$\begin{cases} x_1-\dfrac{1}{3}E_1=x_1 \\ E_2-\dfrac{2}{3}E_1=0 \\ E_3-\dfrac{1}{3}E_1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E_1=0 \\ E_2^{'}=0 \\ E_3^{'}=0 \end{cases} \quad \text{ou de forma geral} \quad \begin{cases} E_1=0 \\ E_k^{'}=0, E_k^{'}=E_k-a_{k1}1 \end{cases}$$

em que a_{k1} denota a razão entre os coeficiente da primeira incógnita presentes na equação k e na primeira equação, respectivamente.

Assim, se $E_1 = E_2 = E_3 = 0 \Rightarrow E_k^{'} = E_k - a_{k1}E_1 = 0$, ou seja, a solução do sistema anterior é solução do novo sistema e reciprocamente a solução do novo sistema é solução do sistema anterior, pois se $E_1 = 0, E_k^{'} = E_k - a_{k1}E_1 = 0 \Rightarrow E_k = 0, k = 2,3$.

De modo similar, podemos mostrar que o segundo sistema obtido tem a mesma solução do primeiro e, portanto, a mesma solução do sistema original; reciprocamente, a solução do sistema original é solução do primeiro e, portanto, solução do segundo.

Como podemos observar, as operações elementares podem ser vistas claramente como decorrentes da sistematização do Método de Substituição e são elas que usamos quando resolvemos sistemas aplicado o Método do Escalonamento, conforme mostramos a seguir.

2.2 – O MÉTODO DE ESCALONAMENTO NO ESTUDO DE SISTEMAS LINEARES

O Método do Escalonamento é formulado por meio da manipulação dos coeficientes das incógnitas usando as operações elementares das linhas de uma matriz que representa o sistema. As operações elementares usadas para escalonar um sistema são as mesmas evidenciadas no tópico 2.1.1, conforme demonstra a resolução do sistema a seguir:

Consideramos o sistema e a sua representação matricial, temos:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

O método do escalonamento é empregado usando as operações elementares com as linhas, de modo a tornar o numero de zeros das linhas da matriz, tomados da esquerda para a direita e em posições sucessivas nas linhas, maior ou igual ao numero de zeros da linha anterior disposto como descrito. Em outras palavras, tornar a matriz mais triangular possível, como mostramos a seguir.

Diante da representação matricial do sistema e aplicando as operações estabelecidas, temos:

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & -4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} E_2 - \frac{2}{3}E_1 \\ \\ E_3 - \frac{1}{3}E_1 \end{matrix}$$

A primeira linha é fixada e combinada com as demais de acordo com as operações definidas de modo a tornar nulo o primeiro coeficiente das demais linhas, assegurando que cada uma dessas operações, quando executadas isoladamente, levam à mesma matriz que seria obtida pela aplicação consecutiva das operações indicadas e, portanto, preservando a equivalência do sistema original com o novo sistema associado dessa matriz. A matriz resultante após as operações indicadas é mostrada a seguir.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -\frac{13}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{14}{3} & \frac{7}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \quad \text{cujo sistema associado é} \quad \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 0x_1 - \frac{13}{3}x_2 + \frac{5}{3}x_3 = \frac{2}{3} \\ 0x_1 - \frac{14}{3}x_2 + \frac{7}{3}x_3 = \frac{7}{3} \end{cases}$$

Continuando, repetimos o processo a partir da segunda linha e segunda coluna, agindo como se não existisse a primeira linha e a primeira coluna. Assim, em relação à matriz posta a operação $E_3 - \frac{14}{13}E_1$ busca tornar nulo o segundo elemento da linhas abaixo da segunda linha.

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -\frac{13}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & -\frac{14}{3} & \frac{7}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \quad E_3 - \frac{14}{13}E_1$$

que resulta

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 5 \\ 0 & -\frac{13}{3} & \frac{5}{3} & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & \frac{21}{39} & \frac{63}{39} \end{bmatrix}$$

Continuando o processo, agimos como se não existissem as duas primeiras linhas e duas primeiras colunas, ou seja, a partir da terceira linha e terceira coluna. Como não há linhas abaixo da terceira linha, o processo é dado por encerrado e escreve-se o sistema que pode estar associado a essa matriz, a seguir:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 0x_1 - \dfrac{13}{3}x_2 + \dfrac{5}{3}x_3 = \dfrac{2}{3} \\ 0x_1 + 0x_2 + \dfrac{21}{39}x_3 = \dfrac{63}{39} \end{cases}$$

O método acima exposto pode ser sistematizado da seguinte forma:

1- Se o primeiro coeficiente da primeira linha for nulo, então, previamente, a partir da ***primeira linha*** E_1**,** tomada como **linha de referencia,** escolha a linha E_s que tem na ***primeira coluna,*** *tomada como* ***coluna de referência,*** coeficiente diferente de zero e permutamos com a primeira, assumindo que a nova primeira linha é a linha E_s e que a nova linha E_s é a antiga linha E_1.

2- Substituímos cada linha E_k, abaixo da linha E_1, por nova linha $E_k^{'} = E_k - a_{k1}E_1$, em que a_{k1} denota a razão entre o primeiro coeficiente presente na linha k e na primeira linha, respectivamente.

3- Repetimos esse procedimento após cada etapa, eliminando as linhas e colunas já **referenciadas** nas etapas anteriores até que não haja mais linhas abaixo da nova linha de referência.

As operações elementares, conforme observamos, podem ser vistas claramente como decorrentes da sistematização do Método de Substituição como fica evidenciado quando buscamos justificar a equivalência dos sistemas obtidos pelo Método da Substituição e o desenvolvimento do Método do Escalonamento.

A certeza de que tais métodos tratam do mesmo objeto matemático e que estão associados pela sistematização de que um leva ao outro, com tratamentos diferenciados, demonstra a ampla conexão existente entre eles respondendo assim ao nosso propósito diante do trabalho apresentado.

3 – CONSIDERAÇÕES FINAIS

O artigo apresentado tratou do uso de conexões no ensino de matemática enfatizando a articulação entre os métodos da substituição e escalonamento no estudo de Sistemas de Equações Algébricas Lineares.

No trabalho, ficou evidenciada a conexão entre os dois métodos a partir das operações matemáticas que são realizadas aplicando o Método da Substituição e que são usadas, também, quando um sistema é resolvido pelo processo de escalonamento.

Os tratamentos ensinados nas escolas para resolver sistemas são apresentados isoladamente um do outro, todavia, o resultado deste trabalho mostrou que a articulação entre os dois métodos para se resolver sistemas é possível e desejável. Usando a conexão entre os saberes o professor otimiza o tempo de ensino e proporciona o desenvolvimento de um saber com significado para os alunos.

A fragilidade de conexões ou mesmo sua inexistência no estudo dos saberes matemáticos prejudica o aprendizado e não permite uma tomada de consciência quanto à construção do conhecimento.

É desejável que se ensine matemática através da conexão entre os saberes, uma vez que tratar um objeto matemático através de conexões significa dar oportunidade aos alunos de enriquecer seus próprios processos de pensamento. Foi pensando nisso, que discutimos a questão da articulação entre os saberes neste trabalho, acreditando que integrar as idéias e os conceitos significa favorecer a aprendizagem.

4 - REFERÊCIAS

BRASIL, Ministério da Educação. *Parâmetros curriculares nacionais: ensino médio*. Brasília, 2000.

CHEVALARD, Yves et al. *Estudar matemática: o elo perdido entre o ensino e a aprendizagem*. Porto Alegre: Artmed, 2001.

MOREIRA, Marcos A; MASSINI, Elcio S. F.. Salzano. *Aprendizagem significativa: a teoria de David Ausubel*. São Paulo: Moraes, 1982.

MORIN, Edgar. *Educação e complexidade: os sete saberes e outros ensaios*. São Paulo: Cortez, 2002.

PAIS, Luiz Carlos. *Ensinar e aprender matemática*. Belo Horizonte: Autêntica, 2002.