INDÍCIOS DE MOBILIZAÇÃO DE PENSAMENTO ALGÉBRICO POR ALUNOS DE UMA TURMA DE 6º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL

Paulo Henrique Rodrigues
Universidade Estadual de Londrina
paulohr_91@yahoo.com.br

Angélica Rodrigues Coutinho Silveira
Universidade Estadual de Londrina
angelycarodrigues@yahoo.com.br

Marcia Cristina Nagy
Universidade Estadual de Londrina
marcianagy@yahoo.com.br

Resumo
No presente artigo identificamos os tipos de pensamento algébrico mobilizados por alguns alunos de uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental, de um colégio estadual de Florestópolis – PR, na resolução de três tarefas matemáticas. Para a categorização das resoluções dessas tarefas utilizamos os tipos de pensamento algébrico apresentados por Blanton e Kaput (2005). Investigamos os tipos de pensamento algébrico mobilizados nas produções escritas e nas declarações desses alunos. Foi possível observar indícios de manifestação de dois tipos de pensamento algébrico: *aritmética generalizada e pensamento funcional*. Entendemos que identificar e analisar os tipos de pensamento algébrico mobilizados por alunos é relevante tanto para professores, pois podem repensar suas ações em sala de aula, quanto para pesquisadores porque permite oferecer elementos aos professores da Educação Básica relacionados a alguns modos de produção de significados para objetos e processos da Álgebra.

Palavras Chave: Educação Matemática; Pensamento Algébrico; Tarefas Matemáticas.

1. Introdução

O Ensino de Álgebra na Educação Básica tradicionalmente está associado a um conjunto de exposição de regras a serem memorizadas pelos alunos, não sendo, muitas vezes, considerada a compreensão de seus significados.

Contudo, de acordo com Ponte, Branco e Matos (2009), a partir da década de 80 do século passado, uma nova visão da Álgebra começou a surgir, e com isso, muitas discussões procuraram delimitar o que deve ser incluído no ensino de Álgebra. Trabalhos que focam no modo como os alunos desenvolvem a sua compreensão de conceitos e procedimentos algébricos e na caracterização dos modos de produzir significados para os objetos e processos da Álgebra têm assumido espaço nas pesquisas atuais (CYRINO; OLIVEIRA, 2011). É possível observarmos um reflexo desta perspectiva em documentos oficiais. Nas Diretrizes Curriculares do Estado do Paraná (PARANÁ, 2008), por exemplo, é indicada uma abordagem pedagógica que possibilite uma atribuição de significados aos processos algébricos.

> O conceito de álgebra é muito abrangente e possui uma linguagem permeada por convenções diversas de modo que o conhecimento algébrico não pode ser concebido pela simples manipulação dos conteúdos abordados isoladamente. Defende-se uma abordagem pedagógica que os articule, na qual os conceitos se complementem e tragam significado aos conteúdos abordados. (PARANÁ, 2008, p.52).

Nesse artigo, apresentamos algumas caracterizações para o pensamento algébrico e a que assumimos. Também apresentamos e analisamos os tipos de pensamento algébrico que foram mobilizados por alunos de uma turma de 6º ano do Ensino Fundamental, de um colégio estadual de Florestópolis – PR, na resolução de três tarefas matemáticas. A abordagem que utilizamos na análise dos indícios de manifestação de tipos de pensamento algébrico vai ao encontro do que vem sendo abordado em pesquisas atuais (BLANTON; KAPUT, 2005; CYRINO; OLIVEIRA, 2011).

2. Pensamento Algébrico

Nesta seção, apresentamos algumas perspectivas a respeito de pensamento ou raciocínio algébrico, denominações entendidas por nós como sinônimos, bem como sua classificação.

Segundo Blanton e Kaput (2005, p. 413, tradução nossa), o pensamento algébrico é entendido como

> [...] um processo no qual os alunos generalizam ideias matemáticas de um conjunto particular de exemplos, estabelecem generalizações por meio do discurso de argumentação, e expressam-nas, cada vez mais, em caminhos formais e apropriados à sua idade.

A importância do desenvolvimento do pensamento algébrico na trajetória escolar de alunos da Educação Básica tem sido evidenciada por vários autores. Para Portanova (2005, p. 25)

> [...] o desenvolvimento do pensamento algébrico é um marco fundamental da Educação Matemática do educando. O desenvolvimento desse pensamento, permite-lhe que se realizem abstrações e generalizações em nível mais profundo do que o pensamento aritmético.

Alguns autores (LINS, 1992, 1994; LINS; GIMENEZ, 1997; SCHLIEMANN et al., 1998; LINS; KAPUT, 2004; BLANTON; KAPUT, 2005) indicam que o desenvolvimento do pensamento algébrico pode acontecer desde os anos iniciais do Ensino Fundamental. Apresentamos, na sequência, algumas caracterizações de pensamento algébrico que permitem identificar manifestação de pensamento algébrico em resoluções de tarefas matemáticas.

Segundo Lins (1992, 1994) o pensamento algébrico se situa em pensar aritmeticamente, pensar internamente e pensar analiticamente. Pensar aritmeticamente está relacionado ao trabalho exclusivo com números, operações aritméticas e uma relação de igualdade. Tal abordagem indica que é na linguagem aritmética que os primeiros sinais do pensamento algébrico são manifestados. Pensar internamente diz respeito a considerar os números por meio de suas propriedades, possivelmente envolvendo igualdade e desigualdade. Essa caracterização do pensamento algébrico é pautada na "possibilidade que temos de distinguir soluções internas, isto é, aquelas produzidas dentro das fronteiras dos campos semânticos dos números e das operações aritméticas" (LINS, 1992, p. 14). Pensar analiticamente é caracterizado "como um método de procura das verdades onde o desconhecido é tratado como conhecido" (LINS, 1992, p.16). Nessa caracterização os números genéricos são tratados como números específicos e as "incógnitas" como "dados". (LINS, 1994). Lins e Gimenez (1997, p. 151) também apontam essas três características do pensamento algébrico

> 1) Produzir significados apenas em relação a números e operações aritméticas (chamamos isso de *aritmeticismo*);
> 2) considerar números e operações apenas segundo suas propriedades, e não "modelando" números em outros objetos, por exemplo, objetos "físicos" ou geométricos (chamamos a isso de *internalismo*); e,
> 3) operar sobre números não conhecidos como se fossem conhecidos (chamamos a isso de *analiticidade*).

Lins e Kaput (2004) apresentam duas caracterizações amplas para o pensamento algébrico. A primeira "envolve o ato de generalização deliberada e a expressão de generalidades", e a segunda "envolve, usualmente como um comportamento separado, um raciocínio baseado em formas de generalizações sintaticamente-estruturadas, incluindo ações guiadas sintática e semanticamente" (LINS; KAPUT, 2004, p. 48, tradução nossa). Nas ações guiadas sintaticamente, o foco está no processo de formalização. Já as ações guiadas semanticamente consistem na busca de significados dos termos envolvidos no processo de generalização.

Assumimos no presente artigo a perspectiva de Blanton e Kaput (2005) para a caracterização do pensamento algébrico. Segundo esses autores, o raciocínio algébrico pode ter várias formas, destacando quatro tipos principais:

> a) o uso da aritmética como um domínio para expressar e formalizar generalizações (aritmética generalizada);
> b) a generalização de padrões numéricos para descrever relações funcionais (pensamento funcional);
> c) a modelação como um domínio para expressar e formalizar generalizações;
> d) a generalização sobre sistemas matemáticos abstratos de cálculos e relações. (BLANTON; KAPUT, 2005, p. 413, tradução nossa).

Cyrino e Oliveira (2011), com base em Blanton e Kaput (2005), apontaram especificidades de cada um desses tipos principais de pensamento algébrico. Com relação à aritmética generalizada, explicam que se refere

> [...] ao raciocínio sobre as operações e as propriedades associadas aos números, como por exemplo, generalizações sobre a propriedade comutativa da multiplicação, ou ainda, o reconhecimento da igualdade como uma relação entre quantidades. (CYRINO; OLIVEIRA, 2011, p. 103).

Quanto ao pensamento funcional, as autoras afirmam que "[...] envolve a exploração e a expressão de regularidades numéricas, como por exemplo, a descrição do crescimento de padrões ou generalizações sobre somas de números consecutivos." (CYRINO; OLIVEIRA, 2011, p.103). Explicam ainda que outra forma assumida pelo pensamento algébrico é a modelação, que "[...] envolve a generalização a partir de situações matematizadas ou de fenômenos, como por exemplo, a generalização de regularidades em situações do dia-a-dia onde a regularidade é secundária relativamente ao objetivo mais geral da tarefa." (CYRINO; OLIVEIRA, 2011, p.103). Por último, explicitam que

> [...] a generalização sobre sistemas matemáticos abstratos de cálculos e relações, uma forma de raciocínio algébrico menos comum no currículo do ensino básico, envolve a generalização utilizando objetos abstratos e operações sobre classes de objetos. (CYRINO; OLIVEIRA, 2011, p.103).

De acordo com Blanton e Kaput (2005), as duas primeiras formas de raciocínio algébrico, *aritmética generalizada* e *pensamento funcional*, são as mais comuns de serem manifestadas nos anos iniciais do Ensino Fundamental.

3. Materiais e métodos

Visando aplicar tarefas com potencial para mobilizar pensamento algébrico em uma turma de alunos de 6º ano do Ensino Fundamental, os dois primeiros autores deste artigo elaboraram dez tarefas com base nas apresentadas por Blanton e Kaput (2005)[1] e resolveram-nas.

Posteriormente, de acordo com a abordagem de Blanton e Kaput (2005) para pensamento algébrico, analisaram indícios da manifestação desse pensamento envolvidos na resolução das tarefas. Foram identificadas nessas resoluções a mobilização de dois tipos de pensamento algébrico: *aritmética generalizada* e *pensamento funcional.*

Três das dez tarefas elaboradas foram selecionadas para serem aplicadas em uma turma de alunos de 6º ano do Ensino Fundamental, de um colégio estadual de Florestópolis-Pr, em novembro de 2012. O critério utilizado para essa escolha consistiu em selecionar tarefas que tivessem potencial para mobilizar os dois tipos de pensamento algébrico identificados nas resoluções dos autores. O referido colégio foi escolhido para a aplicação das tarefas porque o segundo autor já fez parte do seu grupo de professores. A aplicação das tarefas foi realizada pelo professor regente da turma e pelos dois primeiros autores deste artigo, tendo duração de 2 horas/aula. O primeiro autor atuou ainda no registro de suas observações.

Com a autorização dos pais dos alunos e do professor regente da turma, a aplicação das tarefas foi gravada em áudio. Além dos registros de observação do segundo autor e da transcrição da aplicação das tarefas, foram utilizados ainda os registros escritos dos alunos nas análises.

4. Informações a respeito da aplicação das tarefas

[1] As tarefas apresentadas por Blanton e Kaput (2005) em seu artigo foram selecionadas do *Massachusetts Comprehensive Assessment System* (MCAS), um exame estadual norte americano obrigatório.

Para a aplicação das três tarefas selecionadas, os alunos foram organizados em grupos de quatro alunos cada. Eles receberam as tarefas fotocopiadas e uma por vez, isto é, somente após a discussão com toda a turma é que recebiam outra tarefa.

Após cada tarefa ser entregue aos alunos, um deles ou um dos aplicadores realizou a leitura de seu enunciado, visando garantir que entendessem a tarefa e esclarecer possíveis dúvidas. Enquanto os alunos resolviam as tarefas, os aplicadores passaram junto aos grupos solicitando que explicassem o que estavam realizando.

Quando os alunos terminavam de resolver as tarefas, era solicitado que expusessem suas resoluções no quadro de giz e explicassem como tinham pensado.

Durante as discussões nos pequenos grupos e no grande grupo, quando os alunos faziam perguntas, os aplicadores geralmente respondiam com outra pergunta. E ao buscarem responder essas perguntas, as suas dúvidas eram sanadas. Tendo em vista o tempo de que dispunham, isto é, 2 horas/aula, os aplicadores optaram somente por realizar tais discussões, não sistematizando, portanto, os conceitos envolvidos em cada tarefa.

5. Tipos de pensamento algébrico mobilizado pelos alunos

Nas resoluções das tarefas apresentadas pelos alunos, por meio de suas declarações e de seus registros escritos, foi possível observar a manifestação de dois tipos de pensamento algébrico: *aritmética generalizada* e *pensamento funcional*. Os elementos que permitiram categorizar as resoluções em tais tipos de pensamento algébrico nem sempre foram os mesmos, ainda que se tratasse de um mesmo tipo de pensamento algébrico. Apresentamos, a seguir, as tarefas aplicadas e a análise realizada.

5.1 Tarefa 1

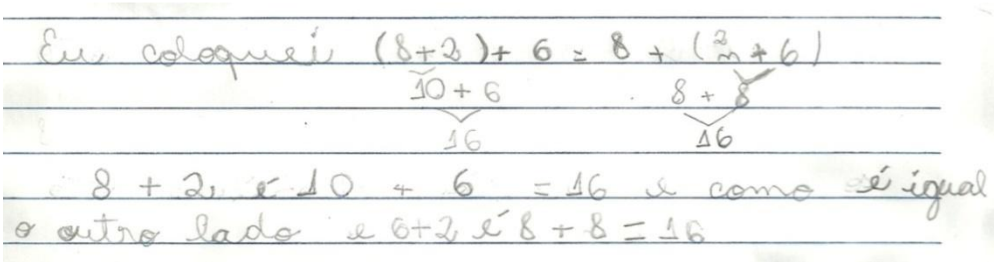
Analisando a expressão abaixo, que número n representa? Explique o que você fez para determiná-lo.

$$(8 + 2) + 6 = 8 + (n + 6)$$

Com relação à Tarefa 1, identificamos na resolução dos alunos indícios de mobilização do seguinte tipo de pensamento algébrico: *aritmética generalizada*.

Muitos alunos exploraram a igualdade como uma relação entre quantidades. Alguns deles, para descobrir o valor de *n* na expressão, realizaram a soma dos termos do primeiro membro da igualdade e, após encontrarem esse valor, calcularam a soma dos termos do segundo membro dessa igualdade. Eles atribuíram para *n* um valor que tornasse a expressão verdadeira, ou seja, atribuíam um valor para *n* de modo que a soma dos termos do segundo membro da igualdade fosse igual a soma dos termos do primeiro membro da igualdade. É possível observar tal estratégia no registro escrito de um dos alunos.

Figura 1: Registro escrito na Tarefa 1, produzido pelo Aluno 1



Fonte: Autores.

No registro escrito do Aluno 1 é possível notar que ele resolveu uma expressão *com um número desconhecido*. Ele não atribuiu um valor arbitrário para *n*, mas realizou o equivalente ao que em Matemática denominamos como resolução de equações de primeiro grau. Este tipo de pensamento algébrico não está, necessariamente, relacionado à constituição de generalizações, mas consiste no trabalho com situações permeadas por características algébricas (neste caso, a atribuição de um valor para uma incógnita).

Também foi possível observar que alguns alunos *exploraram a propriedade associativa da adição* para resolver a Tarefa 1.

Durante o trabalho nos pequenos grupos, alguns alunos explicaram aos aplicadores que haviam notado que dois dos números que estavam antes e depois do sinal de igual eram iguais, isto é, tanto o primeiro membro da igualdade quanto o segundo apresentavam os números 6 e 8. Disseram ainda que, como se tratava de uma igualdade, *n* estava representando o número 2. Na sequência, apresentamos a declaração de uma aluna, ocorrida durante a discussão no grande grupo.

> ALUNA 2: *O n vale pelo 2. O 2 tem aqui ó (referindo-se ao primeiro membro da igualdade), e aqui tem que ter o 2 também (referindo-se a n*

> *no segundo membro da igualdade), o 2 pelo 2. Aqui tem 8 (referindo-se ao primeiro membro da igualdade) e aqui também tem 8 (referindo-se ao segundo membro da igualdade). E pelo 6 (referindo-se ao primeiro membro da igualdade) a gente pode perceber o 6 aqui também (referindo-se ao segundo membro da igualdade). Dá sempre o mesmo resultado: 2 pelo 2, o 8 pelo 8 e o 6 pelo 6.*

Apesar de os dois exemplos citados envolverem o mesmo tipo de pensamento algébrico, ou seja, *aritmética generalizada*, os elementos utilizados para tal classificação foram distintos. No primeiro exemplo vários alunos resolveram uma sentença com um número desconhecido e no segundo, exploraram uma propriedade das operações com números inteiros.

5.2 Tarefa 2

Observe o padrão a seguir:

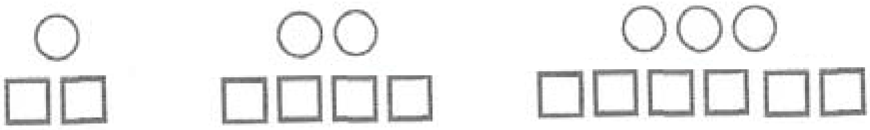


Figura 1 Figura 2 Figura 3

a) Continue o padrão com mais duas figuras.
b) Você sabe dizer, sem desenhar, quantas formas circulares terá a figura 6? Explique.
c) Você sabe dizer, sem desenhar, quantas formas quadradas terá a figura 6? Explique.

Na resolução da Tarefa 2 identificamos indícios de manifestação de outro tipo de pensamento algébrico, nomeadamente *pensamento funcional*.

Vários alunos identificaram regularidades e descreveram características das figuras que compõem a sequência de figuras apresentada na tarefa, como: de uma figura para a seguinte aumenta o número de formas circulares e quadradas; de uma figura para outra aumenta uma forma circular e duas quadradas.

Alguns deles estabeleceram relação entre o número de formas circulares e o de formas quadradas de algumas figuras da sequência. Outros estabeleceram relação entre o número da posição de algumas figuras e total de formas circulares ou quadradas apresentadas nessas figuras. O diálogo a seguir ilustra algumas relações que foram estabelecidas.

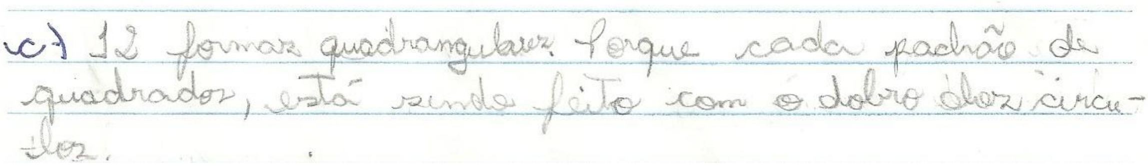
> ALUNO 3 – *Você sabe dizer, sem desenhar, quantas formas circulares terá a figura 6? (lê parte do enunciado da tarefa).*
> PROFESSORA: [...] *Vocês sabem dizer quantas formas circulares terá a Figura 6?*
> ALUNOS: *Seis.*
> PROFESSORA: *Muito bem. E quantas formas quadrangulares?*
> ALUNOS: *Doze.*
> PROFESSORA: *E como vocês descobriram isso?*
> ALUNA 2: *Professora, eu pensei assim: se a (Figura) 5 deu 10 (formas quadrangulares), então a (Figura) 6 teria que dar 6 mais 6... Teria que dar 12 (formas quadrangulares).*
> PROFESSORA: *E por que a Figura 6 tem embaixo 12 (formas quadrangulares)?*
> ALUNO 4: *Quando eu vi as figuras deu para perceber que... Eu vi a (Figura) 1, a (Figura) 2 e a (Figura) 3 e deu para perceber que o número de "quadrados" era o dobro do número de bolinhas em cima. Foi isso que eu percebi. Por exemplo, se fosse 4 o número de bolinhas, eu já percebi que teriam 8 "quadrados" embaixo.*

É possível notar que a Aluna 2 estabelece relação entre o número da posição da figura e total de formas quadrangulares. Para obter a quantidade de formas quadrangulares que uma figura possui, ela parece realizar a soma do número da posição da figura em questão com ele mesmo. Por meio dessa relação que explicitou, inferimos que a Aluna 2 conseguiria determinar a quantidade de formas quadrangulares de qualquer figura da sequência.

O aluno 4 estabelece uma generalização, em linguagem natural, relativa ao número de formas circulares e quadradas de figuras da sequência: "[...] o número de quadrados era o dobro de números de bolinhas em cima". Nesse sentido, inferimos que, assim como a Aluna 2, o Aluno 4 também conseguiria determinar a quantidade de formas quadrangulares de qualquer figura da sequência.

Semelhante ao realizado pelo Aluno 4, outros alunos também estabeleceram relação entre o número de formas circulares e quadradas de cada figura da sequência: o número de formas quadradas é igual ao dobro do número de formas circulares, o que pode ser evidenciado, por exemplo, no registro escrito do Aluno 5.

Figura 2: Registro escrito na Tarefa 2, produzido pelo Aluno 5

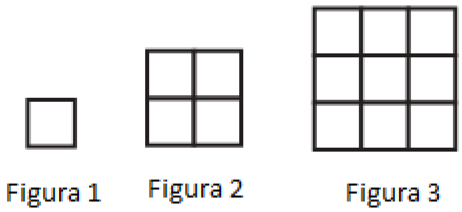

c) 12 formas quadrangulares porque cada padrão de quadrados, está sendo feito com o dobro dos circu-
los.

Fonte: Autores.

Nesse sentido, tanto nas declarações da Aluna 2 e do Aluno 4, apresentadas anteriormente no diálogo, quanto no registro escrito do Aluno 5 são apresentados indícios de manifestação do tipo de pensamento algébrico denominado *pensamento funcional*, que são expressos pelo estabelecimento de uma relação funcional determinada após a observação de padrões.

5.3 Tarefa 3

Observe o padrão a seguir:



a) Se continuarmos esse padrão, qual será a Figura 4? Desenhe-a.
b) É possível obter, sem desenhar, a quantidade de quadrados menores que a Figura 6 terá? E a Figura 20? Quantos quadrados menores cada uma dessas figuras terá?

Com relação à Tarefa 3 também observamos indícios de manifestação de pensamento algébrico do tipo *pensamento funcional*.

Notamos que a maioria dos alunos identificou regularidades e descreveu características das figuras que compõem a sequência de figuras apresentada na tarefa, tal como: de uma figura para a seguinte aumenta o número de quadrados menores; o número de quadrados menores da base de cada figura é igual ao número da posição da figura; o número de quadrados menores de uma figura é igual ao número de quadrados menores existentes em sua base multiplicado por ele mesmo.

Eles organizaram um modo de calcular o total de quadrados menores de algumas figuras da sequência, como pode ser observado na interação a seguir:

> PROFESSORA: *A Figura 4 tem quantos "quadrados" menores?*
> ALUNOS: *16.*
> PROFESSORA: *É possível obter, sem desenhar, a quantidade de "quadrados" menores que a Figura 6 terá? Quem fez?*
> ALUNOS: *Eu, eu...*
> ALUNA 6: *36.*
> PROFESSORA: *Por que serão 36?*
> ALUNA 6: *Porque é 6 vezes 6 (referindo-se ao número de quadrados menores da base da figura).*
> PROFESSORA: *Você (falando para o Aluno 5) pensou igual a ela? Ou pensou diferente?*
> ALUNO 7: *E como ela pensou?*
> PROFESSORA: *Ela pensou que é 36 porque é 6 vezes 6.*
> ALUNO 7: *(Para saber o número total de quadrados menores da Figura 6) É só multiplicar o número* (*de quadrados menores da base da figura*) *por ele mesmo.*

Como se pode observar no diálogo, para obter o total de quadrados menores da Figura 6, a Aluna 6 multiplicou o número de quadrados menores existentes na base da figura por ele mesmo. O Aluno 7, apresentou indícios de ter concordado com a justificativa apresentada pela Aluna 6, pois também afirmou que para calcular o total de quadrados menores da figura bastava multiplicar o número de quadrados menores de sua base por ele mesmo.

Inferimos que a Aluna 6 e o Aluno 7 conseguiriam calcular o número de quadrados menores de qualquer figura da sequência dada na Tarefa 3 que fosse apresentada a eles, já que, segundo nossas observações, como as referentes a declarações relacionadas a Figura 20, estabeleceram uma relação multiplicativa entre o número de quadrados menores existentes na base do quadrado maior e ele mesmo para obter o total de quadrados menores de qualquer figura.

Quanto aos alunos que não se manifestaram durante as discussões, não encontramos em seus registros escritos elementos que nos permitissem afirmar se calcularam o total de quadrados menores de cada figura solicitada por meio do número de sua posição ou se, assim como os Alunos 6 e 7, calcularam esse total utilizando o número de quadrados menores existentes na base das figuras. Apesar disso, entendemos que para calcular o número total de quadrados menores das figuras solicitadas, esses alunos estabeleceram relações funcionais, não comprometendo, portanto, a identificação de indícios de manifestação de pensamento algébrico do tipo *pensamento funcional*.

6. Considerações finais

Consideramos que trabalhos como o que realizamos, no sentido de identificar e analisar os tipos de pensamento algébrico mobilizados por alunos, são relevantes tanto a professores quanto a pesquisadores.

Observar se os alunos manifestam algum tipo de pensamento algébrico durante a resolução de tarefas possibilita ao professor repensar suas ações em sala de aula e buscar elaborar novas estratégias de ação, pois por meio dessa observação ele pode perceber se os alunos estão produzindo, ou não, significados para situações algébricas. Nesse artigo, por exemplo, foi possível notar que os alunos mobilizaram dois tipos de pensamento algébrico, ainda que não tenham apresentado uma linguagem simbólica para representá-los em suas resoluções. Caso fôssemos reorganizar nossas ações como professores na turma de alunos participante desse artigo, buscaríamos elaborar e propor outras tarefas que oportunizassem a mobilização de outros tipos de pensamento algébrico, bem como propor outras formas de representar as situações em questão, tal como por meio de linguagem algébrica formal. Neste sentido, os alunos poderiam expressar situações algébricas de diferentes modos, produzindo significados para tais situações.

No que se refere ao pesquisador, que investiga a formação do professor, observar se alunos manifestam algum tipo de pensamento algébrico permite oferecer elementos a professores da Educação Básica relacionados a modos de produção de significados para objetos e processos da Álgebra, independentemente do tipo de registro escrito utilizado. Além disso, possibilita que outros pesquisadores também conheçam a perspectiva de desenvolvimento do pensamento algébrico que utilizamos e investiguem estratégias de ação que favoreçam o desenvolvimento e a manifestação de diferentes tipos de pensamento algébrico, tanto no contexto da Educação Básica quanto no contexto de Formação de Professores.

7. Referências

BLANTON, Maria. L.; KAPUT, James J. Characterizing a classroom practice that promotes algebraic reasoning. **Journal for Research in Mathematics Education**, Washington, v. 36, n. 5, p. 412-446, nov. 2005.

CYRINO, M. C. de C. T.; OLIVEIRA, H. M. **Pensamento Algébrico ao longo do Ensino Básico em Portugal**. Boletim de Educação Matemática (BOLEMA). UNESP. Rio Claro. v. 24, p. 97-126, 2011.

LINS, R. C. **A framework for understanding what algebraic thinking is**. 1992. 330 f. Tese (Doctor of Philosophy) – School of Education, University of Nothingam, Nothingam, UK: 1992.

LINS, R. C. O **Modelo teórico dos campos semânticos: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico**. Dynamis, Blumenau, v. 7, n. 1, p. 29 – 39. 1994.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. **Perspectivas em aritmética a álgebra parao século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

LINS, R. C.; KAPUT, J. **The early development of algebraic thinking**. In: STACEY, K.; CHICK, H. (Orgs.). The future of the teaching and learning of algebra. Dordrecht: Kluwer, 2004, p. 47 – 70.

PARANÁ. **Diretrizes Curriculares para o Estado do Paraná - Matemática.** Curitiba: SEED, 2008.

PONTE, J. P.; BRANCO, N.; MATOS, A. (2009). **Álgebra no ensino básico**. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

PORTANOVA, Ruth (Org.). **Um currículo de Matemática em Movimento**. Porto Alegre: EDUPURS, 2005

SCHLIEMANN, A.D.; CARRAHER, D.W.; PENDEXTER, W.; BRIZUELA, B. **Solving Algebra Problems before Algebra Instruction.**Paper presented at the Second Early Algebra Meeting, Tufts University/UMass-Dartmouth, 1998. In: <http://www.earlyalgebra.terc.edu/our_papers/2000/Schliemann_et_all_1998.pdf>