

UMA EXPERIÊNCIA DE ENSINO-APRENDIZAGEM UTILIZANDO ANIMAÇÕES GRÁFICAS DO WINPLOT NA ABORDAGEM DE LIMITES

Luciana de Oliveira Souza Mendonça

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE/ Canindé

lucianamendonca@ifce.edu.br

Ana Cláudia Gouveia de Sousa

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE/ Canindé

anaclaudiaifce@gmail.com

Luiz Augusto Almeida Feitoza

Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE/ Canindé

au-gustavo@hotmail.com

Resumo:

Este texto visa relatar e analisar uma experiência metodológica da utilização de animações gráficas geradas com o software *Winplot*, como recurso didático e interativo para o ensino de limites no contexto da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. Essa experiência foi realizada com alunos dos cursos de Engenharia da Universidade de Fortaleza – UNIFOR e com alunos do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE-Campus Canindé. A partir desse relato pretende-se discutir as contribuições e as formas de utilização do *Winplot* como mais uma alternativa metodológica para a melhoria do processo de ensino-aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral nos cursos das ciências exatas.

Palavras-chave: Animações gráficas; *Winplot*; Limites

1. Introdução

Atualmente são numerosos os estudos, em andamento ou já concluídos, que analisam as implicações da inserção das Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) no ensino ou no estudo de temas específicos. Em particular, na área de Matemática, várias pesquisas sobre sua utilização vêm sendo realizadas e é bastante extensa e variada a produção (SILVA, 2011), dentre as quais destacam-se os trabalhos de Allevato (2005, 2007, 2010), Borba; Villarreal (2005) e Jesus (2005).

Há um consenso entre esses autores nos seguintes pontos:

- as ferramentas computacionais, mais precisamente os softwares computacionais aplicados, possibilitam uma inovação no ensino, pois reforçam o papel da linguagem gráfica na construção de conceitos e aplicações relacionados ao ensino de matemática,

constituem um meio educacional auxiliar para apoiar a aprendizagem dos alunos e permitem criar situações de aprendizagem estimulante;

- o uso dessas ferramentas no ensino de matemática pode viabilizar a construção do conhecimento, de maneira mais autônoma e independente, em um novo ambiente, onde os movimentos e as interações são diferentes e obedecem a modelos, uma vez que abrem um novo leque de possibilidades em função das inúmeras simulações que podem ser realizadas e dos questionamentos que podem ser estabelecidos;
- ao usar o computador, principalmente com ferramentas computacionais, é possível certa aproximação dos materiais concretos, ajudando os estudantes na construção de raciocínios formais.

Borba e Villarreal (2005) destacam que a visualização tem ocupado posição de destaque nos estudos referentes à associação do computador ao ensino de Matemática, e ressaltam que as imagens geradas por recursos computacionais podem permitir aos alunos questionar suas concepções e, então, pensar nos conceitos de maneira mais ampla sem deixar de lado o uso da álgebra. Neste sentido, destacam que o uso de softwares educacionais, permite aos estudantes e professores utilizarem recursos destas ferramentas como facilitadores do processo de construção do conhecimento e da formalização de conteúdos matemáticos de forma mais interativa e dinâmica, uma vez que possibilitam a coordenação de representações múltiplas (gráficas, numéricas e algébricas) através da visualização e da construção de animações gráficas utilizando conceitos matemáticos.

Nessa perspectiva, existem vários softwares que, dependendo do seu uso, podem ser facilitadores para o ensino de matemática: dentre eles destacamos o software *Winplot*, uma ferramenta computacional matemática gratuita, que permite a criação de gráficos em duas e em três dimensões (2D) e (3D), respectivamente e animações gráficas, a partir de funções ou equações, de maneira simples e rápida como recurso metodológico.

É um programa para plotagem de gráficos, especialmente simples de ser utilizado, uma vez que dispensa o conhecimento de qualquer linguagem de programação; utiliza pouca memória do computador; dispõe de muitos recursos que o torna um programa atraente, poderoso e apropriado, tanto ao nível médio como superior de ensino, pois está voltado ao estudo de funções de uma ou mais variáveis, equações diferenciais e outros.

Deste modo, pode ser utilizado sem restrições em escolas. Sua versão original (em língua inglesa) foi desenvolvida por Richard Parris, da Phillips Exeter Academy (USA).

Atualmente está disponível uma versão em português, preparada com a assistência do Prof. Adelmo Ribeiro de Jesus.

As animações gráficas desenvolvidas com o *Winplot* estão sendo utilizadas em pesquisas de temáticas relacionadas ao ensino-aprendizagem do Pré-Cálculo e Cálculo Diferencial e Integral. Nessa perspectiva, destacamos os trabalhos de Jesus (2005; 2006) e Jesus, Soares e Mascarenhas (2004) e Allevato (2010).

O trabalho de Allevato (2010) apresenta uma alternativa para o estudo de funções, no âmbito da Educação Matemática, com a utilização do software *Winplot* e do recurso de animações gráficas desse software.

Segundo Allevato (2010, p. 118),

na construção de animações é possível utilizar tanto a forma cartesiana como a forma paramétrica de representação algébrica de uma equação. Por meio delas temos a possibilidade de realizar atividades mais interativas com o computador, mostrando a trajetória de uma curva, ou como foi obtida. Para visualizar dinamicamente o desenho de uma curva que liga dois pontos, inserem-se parâmetros de animação nas equações introduzidas no *Winplot*. Estes parâmetros constituem a principal ferramenta na construção de animações aplicadas às funções de uma variável.

Ainda segundo Allevato (2010, p. 114), a utilização do *Winplot*

permitiu uma compreensão mais ampla do conteúdo em questão. Estes aspectos têm sido destacados como potencialmente favoráveis ao ensino, pois desobrigam os alunos de tarefas essencialmente mecânicas ou operacionais, proporcionando mais tempo a reflexões de natureza interpretativa e conceitual.

Em nossa experiência docente utilizamos o *Winplot* desde 2008, no ensino de Cálculo Diferencial e Integral, e verificamos que esse recurso facilita a construção dos conceitos estudados e a resolução de problemas de aplicação. Além disso, ao utilizar animações e ao propor que os alunos criassem suas próprias animações, constatamos que o processo de ensino-aprendizagem tornou-se mais dinâmico, interativo e cheio de significados e relações, conforme aponta Allevato (2010).

Nessa perspectiva, este trabalho descreve uma intervenção pedagógica no contexto da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, cujos participantes são os alunos dos cursos de engenharia da Universidade de Fortaleza (UNIFOR) e Licenciatura em Matemática do IFCE-Campus Canindé. Para análise dessa experiência, utilizamos como

instrumento de coleta de dados a observação participante com registro diário dos principais pontos discutidos, da reação dos alunos e suas respostas aos problemas propostos.

A metodologia da intervenção se deu pela proposição de problemas e desenvolvimento de animações gráficas com uso do *Winplot*, para a aprendizagem dos conceitos relacionados à interpretação geométrica de limites laterais, infinitos e no infinito. Tudo isto acontecia durante as aulas da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I.

Apresentamos, a seguir, alguns exemplos das animações gráficas que foram utilizadas e/ou propostas aos alunos da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I no processo de ensino-aprendizagem de Limites.

2. O conceito de limites

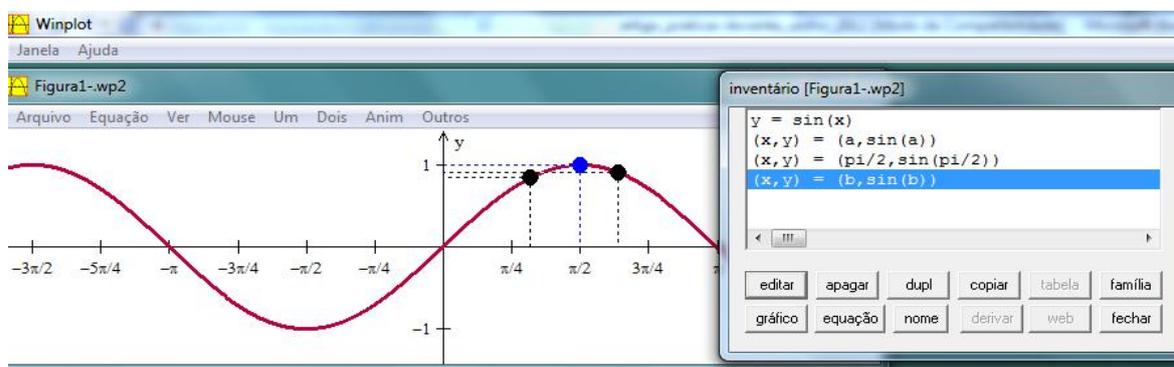


Figura 1 – Análise do comportamento de $f(x)$ quando x tende a 1.0 pelas extremidades esquerda e direita

Para discussão e introdução do conceito de limites, foi desenvolvida e apresentada a animação da Figura 1. Ao utilizarmos os parâmetros do inventário a e b e a ferramenta animação podemos fazer a movimentação das bolinhas sobre o gráfico. Ao fazer essa movimentação, a professora orientadora levantou algumas questões para seus educandos:

- O que acontece com $f(x)$ quando x tende a $x=1$?
- O que acontece com $f(x)$ quando x tende a $x=1$, por exemplo, por valores bem próximos de $x=1$, mas menores do que 1? Idem para valores bem próximos de $x=1$ maiores que 1?
- Ao diminuir a distância entre a abscissa das bolinhas bem próximas de $x=1$ da abscissa $x=1$ o que ocorre com as coordenadas das bolinhas em relação à $f(1)$?

Durante a animação, as bolinhas pretas se aproximam da bolinha azul lateralmente, e à medida que elas fazem essa aproximação, observamos o que ocorre com suas ordenadas e abscissas em relação à ordenada e a abscissa da bolinha azul.

Em seguida foi apresentado o conceito intuitivo de limites e a definição formal, associando-os com a animação das bolinhas à direita e à esquerda do ponto $P(\pi/2,1)$ representado pela bolinha de cor azul:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \Leftrightarrow (\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \mid 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

A partir das questões discutidas com os educandos, os mesmos concluíram que ao movimentarmos as bolinhas pretas na direção da bolinha azul, as suas abscissas e ordenadas se aproximam dos valores do ponto fixo representado pela bolinha azul e, portanto, a distância entre elas diminui. Desta forma conseguiram compreender o conceito de limites e associá-lo ao conceito formal.

Em seguida foi apresentado o cálculo algébrico e os teoremas relacionados a Limites e, em sequência, a associação e/ou conferência do resultado calculado com gráficos e animações.

3. Os limites no infinito

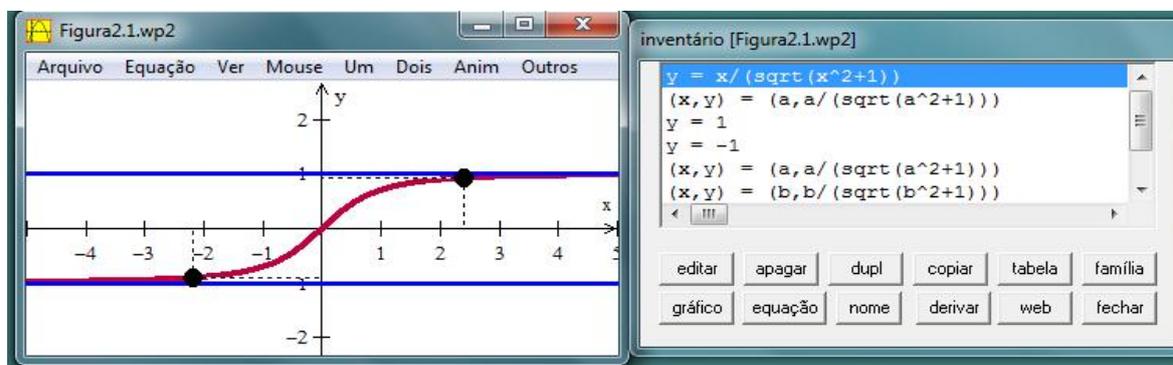


Figura 2 – Análise do comportamento da função $f(x)$ quando x tende a $+\infty$ ou $-\infty$

Para esse conceito apresentamos a função $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ com as assíntotas $y=-1$ e $y=1$. Para a discussão desse conceito, apresentamos a animação da Figura 2 com os parâmetros a e b do inventário. Com o uso da ferramenta animações do menu, movimentou-se as bolinhas pretas sobre a função $f(x)$ e a professora orientadora levantou as seguintes questões para discussão com os alunos:

- a) O que ocorre se movermos a bolinha preta para o extremo direito do gráfico? x tende para onde? E o que ocorre com $f(x)$?
- b) O que ocorre se movermos a bolinha preta para o extremo esquerdo do gráfico? x tende para onde? E o que ocorre com $f(x)$?

Os educandos responderam que a ordenada y da bolinha preta, quando movimentada para o extremo direito (x tendendo a $+\infty$), em um certo momento, a ordenada y da bolinha preta tendia para a reta $y=1$ (assíntota horizontal) e quando a bolinha preta movimentava-se para o extremo esquerdo (x tendendo a $-\infty$), em um certo momento, a ordenada y da bolinha preta tendia para a reta $y=-1$ (assíntota horizontal).

Em seguida, foi apresentado o conceito intuitivo de limites no infinito associando à definição formal.

Seja f uma função definida em um intervalo $(a, +\infty)$, o limite de $f(x)$ quando x cresce indefinidamente, é L , escrito como: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se para todo $\varepsilon > 0$, não importa quão pequeno, existir um número $N > 0$ tal que se $x > N$ então $|f(x) - N| < \varepsilon$.

Seja f uma função definida em um intervalo $(-\infty, a)$, o limite de $f(x)$ quando x decresce indefinidamente, é L , escrito como: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ se para todo $\varepsilon > 0$, não importa quão pequeno, existir um número $N > 0$ tal que se $x > N$ então $|f(x) - N| < \varepsilon$.

Em seguida, foram também apresentados os teoremas relacionados a limites no infinito testando-os através da animação gráfica. Depois os alunos aprenderam o cálculo algébrico e foram levados ao laboratório para conferência do resultado calculado, desenvolvendo, com o uso do *Winplot*, os gráficos relacionados às funções dadas e animações.

4. Os limites laterais

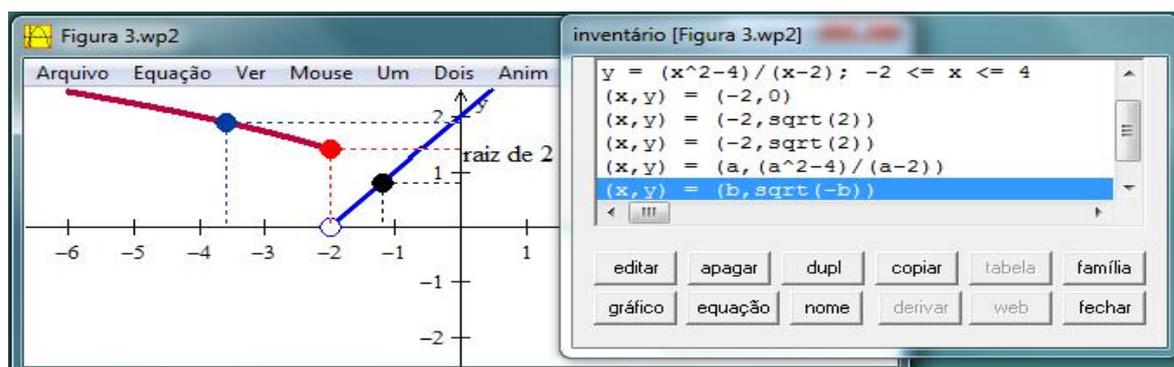


Figura 3 – Análise do comportamento de uma função $f(x)$ descontínua tipo salto

Para discussão e introdução do conceito de limites laterais, foi desenvolvida e apresentada a animação da Figura 3 com uma função por partes dada por $f(x)$. A professora orientadora movimentou as bolinhas azul e preta na direção de $x=-2$, e levantou as seguintes questões:

- O que acontece com $f(x)$ quando x tende a $x=-2$?
- O que acontece com $f(x)$ quando x tende a $x=-2$, por exemplo, por valores bem próximos de $x=-2$, mas menores do que -2 ? E para valores bem próximos de $x=-2$ maiores que -2 ?
- Ao diminuir a distância entre a abscissa das bolinhas bem próxima de $x=-2$ o que ocorre com a coordenada y das bolinhas em relação à $f(-2)$?
- Em um ponto de descontinuidade o que acontece com os limites laterais?

Ao observarem a animação das bolinhas preta e azul, aproximando-as de $x=-2$ os educandos concluíram que o y da bolinha azul, quando a abscissa da mesma se aproxima de $x=-2$, tende para raiz de 2 e que o y da bolinha preta tende para $y=0$, ou seja, os limites laterais de $f(x)$ eram diferentes em $x=-2$.

Em seguida foi apresentado o conceito intuitivo de limites laterais e a definição formal, conforme abaixo:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \text{ existe e será igual a } L \text{ se, e somente se, } \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

Foi apresentado o cálculo algébrico e os teoremas relacionados a limites laterais e, em sequência, a associação e/ou conferência do resultado calculado com gráficos e animações no laboratório. Os alunos se mostraram muito interessados em plotarem as funções por partes e calcularem o limite algebricamente com a conferência gráfica.

5. Os limites infinitos

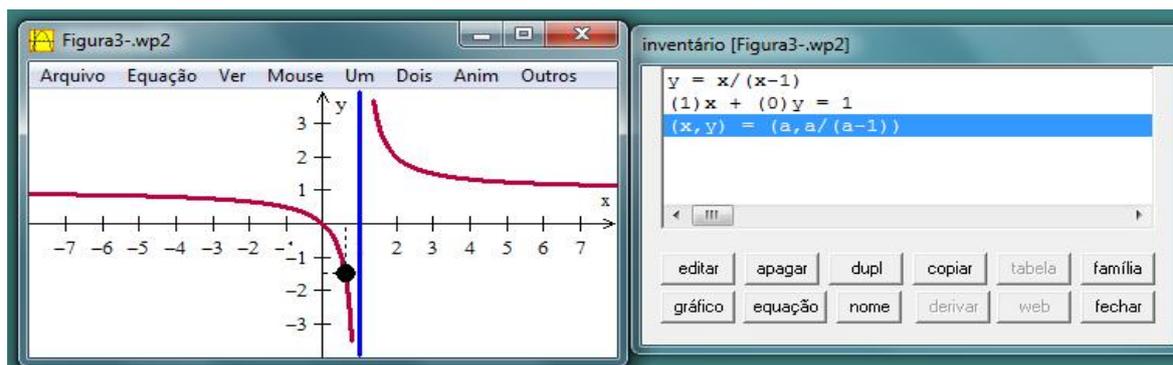


Figura 4 – Análise do comportamento da função $f(x)$ quando x tende a 1

Para esse conceito apresentamos a animação da Figura 4 de duas bolinhas ladeando a assíntota vertical $x=1$. A professora levantou para discussão as seguintes questões:

- O que ocorre com as bolinhas se x se aproximar de $x=1$ pela direita?
- O que ocorre com as bolinhas se x se aproximar de $x=1$ pela esquerda?
- $f(x)$ tende para onde?
- E o que acontece com a bolinha? Por quê?

Como respostas aos questionamentos, os educando afirmaram que à medida que o x da bolinha se aproximava pela esquerda de $x=1$, a bolinha descia infinitamente, assim como, à medida que o x da bolinha se aproximava pela direita de $x=1$, a bolinha subia infinitamente. Logo os limites são infinitos.

Então a professora apresentou o conceito intuitivo e a definição formal de limites infinitos, conforme abaixo, associando com a animação.

Definição Formal:

Seja f uma função definida em todo número de um intervalo aberto I contendo a , exceto possivelmente o próprio a , quando x tende a a , $f(x)$ cresce ou decresce indefinidamente.

A notação é assim:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \text{ (cresce) ou } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \text{ (decresce) se para todo } N > 0, \text{ existir um}$$

$\delta > 0$ tal que tal que se $0 < |f(x) - N| < \delta$ então $f(x) > N$.

Em seguida foi dado o cálculo algébrico, os teoremas relacionados e, em sequência, foi feita a associação e/ou conferência dos resultados calculados com gráficos e animações.

6. Considerações Finais

Para avaliar a metodologia aplicada neste trabalho, foi utilizado o laboratório de informática. Os alunos foram provocados a efetuarem cálculos utilizando os conceitos de limites. Para calcular os limites, foi exigido que os mesmos atentassem para os conceitos de limites laterais, limites no infinito e limites infinitos, utilizando os teoremas e a álgebra. Inicialmente os alunos resolviam os problemas algebricamente, em seguida utilizavam o *Winplot* para a plotagem de animações, relacionando a interpretação geométrica do resultado de seus cálculos com a figura plotada.

Após a aplicação do questionário sobre a avaliação do uso do *Winplot*, para o ensino de Limites, na perspectiva dos educandos que vivenciaram essa metodologia, podemos afirmar que todos os educandos acreditam que o uso do *Winplot* foi extremamente importante para a aprendizagem dos conceitos abordados, pois permitiu a visualização do significado gráfico do conceito de Limites, assim como a conferência dos resultados algébricos, possibilitando atribuição de significado ao valor calculado pelas regras e teoremas algébricos.

Acreditamos que a interação com o programa, pode auxiliar o educador a desenvolver, junto com os discentes, melhores formas de compreender os conceitos de Limites. Acreditamos que cursos de capacitações com profissionais que já utilizam esse recurso em aulas de Cálculo, seriam importantes para que os professores desta disciplina conhecessem a ferramenta e pudessem utilizá-la em sala de aula.

Através do *Winplot* os professores poderão desenvolver apresentações, exercícios e propor atividades em que os alunos utilizem esse recurso durante a resolução de problemas.

Desta forma, o processo de ensino-aprendizagem pode tornar-se mais relacional, dinâmico, interativo, criativo e significativo, aumentando assim o interesse dos educandos pelos conteúdos abordados e, conseqüentemente, melhorando o aproveitamento dos mesmos nos estudos realizados.

Esperamos, com esse relato, motivar mais educandos e educadores a utilizarem o *Winplot* como recurso metodológico no processo de ensino-aprendizagem de Matemática.

7. Agradecimento

Agradecemos aos alunos participantes dessa intervenção pedagógica da Universidade de Fortaleza e do IFCE-Campus Canindé, pelas trocas de experiências e por

serem a principal motivação para a busca permanente de desenvolvimento profissional comprometida com a aprendizagem de qualidade. À Universidade de Fortaleza pela capacitação oferecida para que pudéssemos melhorar a prática pedagógica com o uso do WINPLOT e ao IFCE – Campus Canindé pelo incentivo e liberação para que pudéssemos apresentar esse trabalho.

8. Referências

ALLEVATO, N. S. G. Aspectos emergentes da utilização do computador na Educação Matemática. In: FRANZONI, M.; ALLEVATO, N. S. G. (Org.). **Reflexões sobre a formação de professores e o ensino de Ciências e Matemática**. Campinas: Editora Alínea, 2007. p. 75-96.

ALLEVATO, N. S. G. **Associando o computador à resolução de problemas fechados: Análise de uma experiência**. 2005. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista. UNESP: Rio Claro/SP, 2005.

ALLEVATO, N. S. G. Utilizando animação computacional no estudo de funções. **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, v. 1, n. 2, p. 111-125, 2010. Disponível em <http://revistapos.cruzeirosul.edu.br/index.php/rencima/article/viewFile/13/15>. Acessado em 21/05/2012.

BORBA, M. C.; VILLARREAL, M. E. **Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking**. EUA: Springer, 2005, 226p.

JESUS, A. R. Gráficos animados no Winplot. **Revista do Professor de Matemática**. Rio de Janeiro: SBM, n. 56, p. 34-44, 2005.

JESUS, A. R.; SOARES, E. P.; MASCARENHAS, M. F. **Animação de curvas e superfícies utilizando software livre**. In: Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática. 2., 2004, Salvador. Apostila de Minicurso. Disponível em: <http://www.bienasbm.ufba.br/C12.pdf>. Acessado em 07 abr. 2012.

SILVA, R. G. **Explorando o Terreno das Pesquisas: Panorama das pesquisas brasileiras desenvolvidas na Educação Básica com a abordagem em geometria mediada pelas tecnologias digitais**. Dissertação (Mestrado). Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2011.