A CONGRUÊNCIA SEMÂNTICA E O ENSINO DOS NÚMEROS NEGATIVOS

Selma Felisbino Hillesheim
Universidade Federal de Santa Catarina
selmafh@yahoo.com.br

Méricles Thadeu Moretti
Universidade Federal de Santa Catarina
mthmoretti@gmail.com

Resumo
O ensino dos números negativos é fortemente impregnado por um ensino baseado no modelo comercial da perda e do ganho em que a perda se relaciona à operação de subtração e o ganho à adição. Esta "espécie de quase codificação" na associação às operações de adição e subtração traz à tona um fenômeno estudado por Raymond Duval, na aprendizagem matemática, denominado de congruência semântica. Nas situações de ensino, as concepções das operações de adição, multiplicação e subtração precisam ser ampliadas dos naturais aos números relativos. O que se pretende, neste artigo, é explorar algumas situações que se apresentam no ensino dos números relativos e analisá-las a luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Palavras-chave: Números Negativos; Registros de Representação Semiótica; Congruência Semântica.

1. Introdução

O ensino dos números relativos no ensino fundamental enfrenta problemas que acabam repercutindo ao longo da vida escolar dos alunos. No Brasil, os números inteiros relativos são apresentados formalmente aos alunos no 7º ano[1] e muitas dificuldades podem ser percebidas no seu processo de ensino e aprendizagem. A não compreensão do conceito de números relativos e sua repercussão ao longo da trajetória estudantil tem sido uma preocupação dos professores de matemática e de pesquisadores (COQUIN-VIENNOT, 1985; PASSONI, 2002; PONTES, 2010; ALVES; MAIA, 2011) que buscam explicações para as dificuldades encontradas no processo de ensino e aprendizagem desses números, bem como, procuram outros modelos de ensino para os números inteiros.

Historicamente, a introdução conceitual dos números relativos foi um processo lento e surpreendente. A origem da regra de sinais é geralmente atribuída a Diofanto de Alexandria que viveu no século III depois de Cristo[2]. Diofanto não faz nenhuma referência aos números

[1] O 7º ano corresponde à antiga 6ª série do Ensino Fundamental de oito anos.
[2] Não se sabe ao certo o período em que Diofanto viveu, mas de acordo com Eves (2004, p. 207), a maioria dos historiadores o situa no 3º século da nossa Era.

relativos, mas, em seu Livro I *Aritmética*, ele menciona: "Menos multiplicado por menos é mais e menos por mais é menos" (2007, p. 22).

No período compreendido entre Diofanto e Hankel, muitos matemáticos se propuseram a construir uma demonstração para a regra de sinais pautada em exemplos práticos. Porém Hankel, em 1867, demonstra que a única das regras possíveis é aquela que preserva a distributividade à esquerda e à direita, isso porque ele aborda a ideia de número relativo numa outra dimensão, que não aquela procurada na natureza. Hankel[3] citado por Glaeser (1981, p. 338), diferentemente de Laplace, que acreditava na existência de uma explicação para a multiplicação dos relativos na natureza, aborda a questão numa outra dimensão, os números não são descobertos, são imaginados e a regra de sinais é pura invenção da mente humana, portanto, uma convenção.

De acordo com Glaeser (1981), o modelo metafórico, usado para facilitar a compreensão das propriedades aditivas, constitui-se como um obstáculo à compreensão da multiplicação desses números. Hoje, do ponto de vista matemático, o teorema de Hankel não causa nenhuma dificuldade ou estranheza. Entretanto, do ponto de vista didático/pedagógico, muitos obstáculos ainda precisam ser ultrapassados. Por meio do modelo metafórico, o aluno é facilmente convencido de que se ele tem cinco reais (+5) e deve três reais (-3), ao pagar a dívida lhe sobram dois reais (+2), contudo, dificilmente será convencido do mesmo em $(-3) \times (-2) = +6$. Como uma dívida multiplicada por outra dívida pode tornar-se um ganho? "Nessas condições, não se está introduzindo um *falso contrato didático* quando se utiliza o modelo concreto para apresentar o conjunto dos números relativos?" (COQUIN-VIENNOT, 1985, p. 183, grifos do autor).

Além dessa questão, podemos analisar o ensino das operações de adição, multiplicação e subtração dos relativos numa outra perspectiva, o da congruência e da não congruência semântica, introduzida por Duval (2012). Nessa perspectiva, este artigo que faz parte de uma dissertação de mestrado, pretende fazer algumas reflexões a respeito dos casos de congruência semântica que se estabelecem nas situações de ensino dos números inteiros relativos.

2. A congruência semântica

[3] HANKEL, H. Théorie des complexen Zahlsysteme. Leipzig: Leopold Voss, 1867.

Segundo Duval (2012), um dos obstáculos encontrados por muitos alunos nas suas aprendizagens matemáticas está ligado ao fato de que a equivalência referencial destaca-se da congruência semântica. A esse respeito, Duval destaca que:

> Duas expressões podem ser sinônimas ou referencialmente equivalentes (elas podem "querer dizer a mesma coisa", elas podem ser verdadeiras ou falsas ao mesmo tempo) e não serem semanticamente congruentes: neste caso, há um custo cognitivo importante para a compreensão (DUVAL, 2012, p.100).

Geralmente, quando ocorre a passagem de uma representação semiótica a outro sistema de maneira espontânea diz-se que há congruência semântica. Para isso, ela deve atender a três condições, de acordo com Duval (2004, p. 53):

- Correspondência semântica entre as unidades significantes que as constituem.
- Univocidade "semântica" terminal, em que para cada unidade significante elementar de partida, corresponde a uma só unidade significante elementar no registro de chegada.
- A ordem dentro da organização das unidades significativas de partida é mantida na representação de chegada.

Porém, quando não se cumprem um desses critérios, as representações não são congruentes entre si e a passagem de um sistema de representação a outro não acorre de imediato (DUVAL, 2004, p. 17).

Em outras palavras, poderíamos dizer, "a grosso modo", que há congruência semântica quando o aluno reconhece facilmente o objeto matemático, ao passo que, quando esse reconhecimento não ocorre tão facilmente, diz-se que não há congruência semântica. Dessa forma, o problema da congruência ou da não congruência semântica de duas apresentações de um mesmo objeto é a distância cognitiva entre essas duas representações. Quanto maior a distância cognitiva, maior será também o custo de passagem de uma representação semiótica a outra, e, também, maior será o risco do processo matemático não ser efetuado ou entendido pelos alunos.

Vejamos um exemplo que poderá nos ajudar a entender melhor o caso da congruência semântica apresentada por Duval:

Paulo tem 8 carrinhos e ganhou outros 2 de seu pai.

Neste exemplo, podemos destacar a identidade entre a frase e a expressão 8 + 2, onde o verbo "ganhou" pode ser facilmente associado à operação de adição. Percebemos que as ordens da apresentação dos dados numéricos na frase são conservados na mesma ordem da operação. Desta forma, podemos dizer que existe a congruência semântica entre a frase e a expressão. Neste caso também pode ser notada a equivalência referencial entre a frase e a expressão aritmética que conduz ao sucesso da resposta.

Contudo, na seguinte situação: "No início de uma tarde de inverno de uma cidade da Serra Catarinense, os termômetros registram três graus Celsius e, no início da noite, os termômetros registraram dois graus Celsius negativos. Qual a variação da temperatura nesse período?" Esta situação possui congruência semântica com a expressão (+3) + (-2). Entretanto, a situação e a expressão não são referencialmente equivalentes. A situação descrita acima não possui congruência semântica com a expressão (-2) – (+3), porém a situação e a expressão aritmética são referencialmente equivalentes e conduzem a resolução correta do problema:

> Duas expressões diferentes podem ser referencialmente equivalentes sem que sejam semanticamente congruentes. Inversamente, duas expressões podem ser semanticamente congruentes sem que sejam referencialmente equivalentes (DUVAL, 2012, p.100).

Ainda, nesse sentido, Moretti aponta para os reflexos da congruência semântica no ensino:

> Problemas discursivos que são semanticamente congruentes com a expressão matemática, mas que não são referencialmente equivalentes, levam a uma taxa muita baixa de sucesso; da mesma forma acontece com problemas que são referencialmente equivalentes, mas não são semanticamente congruentes. A resolução de problemas que solicitam a passagem de um registro discursivo para um registro aritmético ou algébrico exige a equivalência referencial (MORETTI, 2012, p. 705).

Nessa direção, o professor deve ficar atento ao fato de que nem sempre a congruência semântica conduz a resultados bem sucedidos na resolução de problemas matemáticos, e que, produzindo diferentes formulações para um mesmo problema, poderá, desta forma, contribuir para uma verdadeira compreensão matemática.

Dois fenômenos podem ser observados, no que se refere à natureza cognitiva, nas operações de conversão. Primeiramente, as variações de congruência semânticas, já expostas anteriormente, e a segunda diz respeito à heterogeneidade dos dois sentidos de conversão. “Nem sempre a conversão se efetua quando se invertem os registros de partida e de chegada” (DUVAL, 2005, p. 20).

Segundo Duval (2005), no ensino da matemática, na maioria das vezes, um sentido de conversão é privilegiado, reforçando a falsa ideia de que o treinamento realizado num sentido estaria automaticamente exercitando a conversão no outro sentido. Esta é uma visão muito ingênua que se propaga nas situações de ensino da matemática. Na maioria das vezes, os estudantes não conseguem perceber o mesmo objeto matemático representado em sistemas semióticos diferentes. Por exemplo, a representação do cálculo de uma adição de números relativos e a sua representação através de deslocamentos na reta numérica, dificilmente um aluno, em nível de ensino fundamental e até mesmo médio, consegue estabelecer as relações entre o cálculo e a sua representação geométrica na reta numérica, e vice-versa.

Essa coordenação está longe de ser natural e observa-se, então, o que Duval chama de um “enclausuramento de registros de representação” (DUVAL, 1993, p. 52). O aluno “enxerga” o objeto matemático apenas por um sistema de representação. Essa ausência de coordenação não impede toda a compreensão, mas esta compreensão limitada, que se dá através do mono-registro, conduz um trabalho às cegas onde o aluno não tem um controle do sentido do que é feito. Duval (2012) afirma que mudanças na escrita permitem mostrar propriedades diferentes de um mesmo objeto matemático, porém conservando a mesma referência.

Os diferentes registros de representação se completam, dando-nos uma melhor compreensão do objeto matemático. A aprendizagem de um objeto matemático torna-se significativa quando o aluno, além de realizar os tratamentos em diferentes registros de representação, consegue, também, naturalmente converter um registro de representação em outro. Do ponto de vista cognitivo, de acordo com Duval (2005), a atividade de conversão é essencial na condução à compreensão.

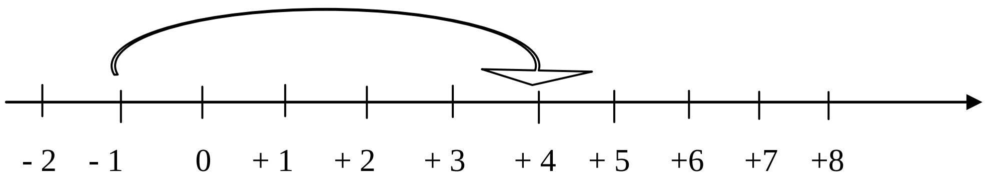
Conseguir registrar as compreensões matemáticas e compreender o significado da escrita dentro da matemática são atividades essenciais no fazer matemático, possibilitando uma aprendizagem mais significativa. Duval (2005) afirma que a originalidade da atividade matemática está na mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação, ou na possibilidade de trocar a todo o momento de registro de representação. Uma vez que o principal papel da representação semiótica é que ela pode ser convertida em representações equivalentes em um outro sistema semiótico, que podem levar a significações diferentes pelo sujeito, de um mesmo objeto matemático.

Contudo, ainda, em conformidade com este autor, esse processo não se estabelece tão facilmente, tendo em vista que os alunos apresentam muita dificuldade no estudo da matemática. Em determinadas situações, o aluno até consegue representar um objeto matemático de maneiras diferentes, mas é incapaz de fazer as conversões necessárias para a apreensão desse objeto.

Ao fazer uma análise do desenvolvimento dos conhecimentos e a dos obstáculos encontrados nas representações do raciocínio, Duval (2004) ressalta que os obstáculos encontrados pelos alunos na compreensão de textos e na aquisição de tratamentos lógicos e matemáticos podem ser compreendidos através dos três fenômenos que estão estreitamente ligados.

O primeiro diz respeito *aos vários registros de representação semiótica.* No ensino da matemática, dispomos de uma variedade de registros de representação semiótica: a linguagem natural, a linguagem simbólica, as figuras geométricas, os gráficos. Esses registros não podem ser considerados como um mesmo tipo de registro, eles são sistemas de representações muito diferentes que atuam cada um, de maneira específica sobre a aprendizagem. Mais especificamente, no caso dos números relativos, dispomos de uma variedade de registros para representar um mesmo objeto. Por exemplo, a frase "Pela manhã os termômetros registraram – 1º C, com o passar do dia, as temperaturas subiram 5ºC", pode ser representada pela expressão (-1) + (+5) e, também, por meio de uma representação auxiliar realizando os deslocamentos na reta numérica:

Figura 1 - Representação geométrica da adição (-1) + (+5)



O segundo fenômeno, de acordo com Duval (2004), refere-se *à diferenciação entre o representante e o representado*, em outras palavras, a diferença existente entre a forma e o conteúdo de uma representação semiótica. A forma escolhida para representar o objeto matemático influencia no conteúdo da sua representação. Duas expressões podem fazer referência a um mesmo objeto, porém elas não possuem a mesma significação, haja vista que elas não são reveladoras do mesmo domínio de descrição ou do mesmo ponto de vista. As diferentes formas de representar um objeto matemático permitem exibir propriedades diferentes desse objeto mantendo a mesma referência. No exemplo que citamos acima, podemos perceber que apesar dos registros utilizados representarem o mesmo objeto, eles possuem significações diferentes.

Nesse sentido, Duval (1993) ressalta a complementaridade dos registros dizendo que "*toda representação é cognitivamente parcial em relação ao que ela representa* e que de um registro a outro não estão os mesmos aspectos do conteúdo de uma situação que são representados" (DUVAL, 1993, p. 49, grifos do autor). Desse modo, podemos observar que a variedade de registros, utilizados para o ensino de um objeto matemático, poderá contribuir para que o sujeito tenha uma ideia global a respeito desse objeto matemático, permitindo que o aluno não confunda o objeto matemático com a sua representação.

O terceiro fenômeno diz respeito à *coordenação entre os diferentes registros de representação semiótica.* Para efetuar a conversão de um sistema semiótico num outro sistema semiótico, não bastam regras de correspondência, mesmo porque se existisse uma regra não seria conversão. O maior obstáculo que se instala na realização espontânea da coordenação dos diferentes registros de representação semiótica está relacionado ao fenômeno da não congruência semântica. No exemplo que citamos anteriormente, dificilmente um aluno estabelece uma relação direta entre o cálculo e o seu deslocamento na reta numérica, uma vez que não há uma congruência semântica.

Para analisarmos as dificuldades encontradas no processo de ensino e aprendizagem da matemática, precisamos estudar a conversão das representações, os procedimentos cognitivos que levam o aluno a apreensão do objeto matemático. A articulação de diferentes registros, de acordo com Duval (2005), é uma condição necessária para a compreensão em matemática, no entanto, várias abordagens didáticas não levam isto em conta, porque o que chama a atenção nos processos de ensino são os tratamentos e não a conversão.

2.1 A congruência semântica presente nas operações de adição, subtração e multiplicação com os números inteiros relativos

Na atividade matemática, o ato de substituir uma fórmula ou um cálculo por uma outra expressão referencialmente equivalente é essencial. Você já pensou na possibilidade de resolver uma situação problema sem substituí-la por outra forma de registro permanecendo somente na linguagem natural? Neste sentido, a substitutividade de expressões é uma propriedade que está ligada a estrutura de todo registro semiótico, ela é uma conduta muito importante e frequente nos procedimentos matemáticos.

Os procedimentos utilizados na atividade matemática implicam numa substitutividade tanto inter-registro quanto intra-registro, ambos pautados numa mesma referência:

> A substitutividade é uma característica fundamental do funcionamento cognitivo do pensamento matemático e é relativamente a esta substitutividade que os fenômenos de congruência e não congruência semântica são importantes (DUVAL, 2012, p.113).

Para mostrar, por exemplo, que a frase “A temperatura registrada pela manhã era de 3^0 C, com o passar do dia diminuiu 5^0 C” pode ser representada por (+3) + (-5) exigiu uma substituição inter-registro que, neste caso, apresenta congruência semântica e equivalência referencial.

Nas operações com relativos, é que os fenômenos de congruência semântica se destacam. Até a apresentação dos números inteiros os alunos concebiam, nos naturais, que a adição estava rigorosamente atrelada a ideia de juntar. A subtração corresponderia à operação de tirar, e a multiplicação, por sua vez, como uma adição de parcelas iguais.

Contudo, mesmo que estes conceitos sejam ampliados nos relativos, os fenômenos da não congruência semântica insistem em aparecer. Seja a seguinte situação, por exemplo, “Um submarino encontra-se a -250 metros de profundidade. Depois de passados 30 minutos encontra-se a -180 metros. Esse submarino subiu ou desceu? Quantos metros?” Esta expressão é referencialmente equivalente a expressão (-180) – (-250) o que resulta numa subida de 70 metros realizada pelo submarino. No entanto, a expressão possui congruência semântica com a situação seria (-250) – (-180) o que levaria ao resultado – 70, que significa dizer, o submarino desceu 70 metros.

Vejamos uma outra situação: “A temperatura registrada durante a madrugada, em uma cidade, foi de - 6º C e no decorrer do dia a temperatura aumentou 10ºC. Qual foi a variação da temperatura máxima registrada neste dia?” Esta expressão é referencialmente equivalente a expressão (-6) + (+10) o que indica que a temperatura máxima foi de +4º. Observe que apesar da operação ser de adição foi preciso diminuir os valores absolutos dos números para chegar ao resultado correto. Do ponto de vista da congruência semântica, não seria de se estranhar que um aluno chegasse ao resultado + 16, uma vez que a operação indicada é uma adição.

Contudo, de acordo com Caraça, nos relativos tem-se que:

> $a+(-b)=a+(0-b)=a+0-b=a-b; a-(-b)\ =a-(0-b)=a+b-0=a+b$,isto é, somar um número negativo equivale a subtrair o número positivo com o mesmo módulo; subtrair um número negativo equivale a somar o número positivo com o mesmo módulo. No campo relativo, as duas operações aparecem-nos assim unificadas numa só, que se chama adição algébrica (CARAÇA, 1963, p. 101).

Desse modo, no caso dos relativos, a operação de adição pode representar situações em que há acréscimo ou decréscimo, ou até mesmo somas que dão resultado zero. Assim, "a adição deixa de ser apenas acrescentar (um dos casos) para ter um novo significado, mais genérico, de associação ou composição" (TEIXEIRA, 1993, p. 64). Da mesma forma que a adição, a subtração também precisa ser ampliada. Para Teixeira,

> [...] a construção operatória da subtração supõe a assimilá-la como inversa à adição, de tal forma que em uma dada reunião ou associação de elemento $(a+b=c)$, é possível chegar ao ponto de partida, (a), por exemplo, pela diferença $(c-b)$, ou seja, pela operação inversa (TEIXEIRA, 1993, p. 64).

Na multiplicação dos relativos a congruência semântica pode ser percebida, principalmente, quando estes números estão associados ao modelo comercial[4]. Como uma dívida multiplicada por uma outra dívida pode se transformar num ganho? De acordo com Duval, o fenômeno da congruência semântica exerce um papel importante no interior de um mesmo registro, mais particularmente, no discurso natural:

> Se a formulação da questão é congruente à formulação das informações dadas no enunciado do problema e se essa formulação é também congruente a uma formulação possível da resposta, esta resposta será mais rápida do que no caso da não congruência (DUVAL, 2012, p. 104).

[4] Glaeser (1981) entende como modelo comercial a associação de um número positivo a ideia de um ganho/lucro e o número negativo a ideia de uma perda/prejuízo.

Segundo Duval (2012), a não congruência semântica se constitui como uma fonte de dificuldades, para os alunos, independentemente do conteúdo matemático, uma vez que, a

> [...] atividade matemática pode ser bem sucedida se a sua apresentação e seu desenvolvimento não exigirem alguma transformação entre as expressões de formulações ou de representações congruentes e, a mesma tarefa matemática dada como uma variante que implique uma manipulação de dados não congruentes, pode conduzir ao insucesso (DUVAL, 2012, p. 110).

Desse modo, a passagem da frase “o produto de dois números inteiros é +6” para a expressão “(-2) × (-3)” exige uma manipulação de dados não congruentes e uma substitutividade inter-registro, passando da linguagem natural para a linguagem numérica[5]. Esta passagem exige um custo cognitivo elevado, o que pode contribuir para um insucesso. De acordo com Duval, os problemas ligados à substituição inter-registro constituem um interesse particular para o ensino geral da matemática, pois

> [...] aprender a articular vários registros de representação da informação e aprender a diferenciar diversos tipos de funcionamentos cognitivos poderão ser uma finalidade do ensino de matemática que se mostra interessante e útil aos não matemáticos (DUVAL, 2012, p. 116).

3. Considerações Finais

O fato da congruência semântica se destacar da equivalência referencial leva, muitas vezes, o aluno a um caminho que não conduz a resultados corretos. Neste sentido, alertamos para o fato de que é preciso que o professor tenha um olhar atento a essas questões. A utilização de vários registros de representação semiótica e a atividade de conversão, também, se mostram importantes neste processo, no sentido de conduzir o aluno a apropriação do objeto matemático.

Não há porque fugir de problemas sem congruência semântica, são eles, em geral oriundos de operações conversões, que estão na base da ideia de aprendizagem de Duval:

[5] Esta frase pode ser substituída por outros produtos de dois inteiros, mas em todos os casos exigirá uma mudança inter-registro.

> Para não confundir um objeto e sua representação, quando a intuição direta do objeto mesmo não é possível, é necessário dispor de várias representações semioticamente heterogêneas deste objeto e coordená-las (DUVAL, 2004, p. 69).

Portanto, propor diferentes formulações coordenadas para um mesmo tipo de problema é o caminho que ajuda a diminuir as dificuldades encontradas pelos alunos quando não há congruência semântica entre a sua formulação e as operações ou expressões utilizadas na sua solução. Assim, a variedade de registros utilizados para o ensino das operações de adição, subtração e multiplicação com números relativos, poderá contribuir para que o aluno tenha uma ideia global a respeito do objeto matemático, permitindo, desse modo, que o aluno não confunda o objeto matemático com a sua representação.

Referências bibliográficas

ALVES, E. L.; MAIA, L. S. L. Multiplicação e Divisão de Números Inteiros: ensino-aprendizagem na EJA. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Anais...** 1 CD-ROM.

CARAÇA, Bento J. **Conceitos fundamentais da matemática**. Lisboa: Bertrand, 1963.

CID, E. Obstáculos epistemológicos em la ensenãnza de los números negativos. In: JORNADAS DEL SEMINÁRIO INTERUNIVERSITARIO DE INVESTIGACIÓN EM DIDÁTICA DE LÃS MATEMÁTICAS, 15., 2000. **Anais eletrônico...** Disponível em: http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/cangas/Negativos.pdf
Acesso em: 15 set. 2012.

COQUIN-VIENNOT, Danièle. Complexité mathématique et ordre d'aquisition : une hierarchie de conceptions à propos des relatifs. **RDM**. v. 6, n. 2.3, 1985.

DIOFANTO DE ALEXANDRIA. **La aritmética y el libro sobre los números poligonales.** Tres canto: Nivola Libros Ediciones, 2007.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif da la pensée. **Annales de didactique et de sciences cognitives**, v. 5, p. 37-65, 1993.

DUVAL, R. **Los problemas fundamentales en el aprendizaje de las matemáticas y las formas superiores del desarrollo cognitivo**. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática, 1999.

DUVAL, R. **Semiosis y pensamiento humano**: Registros semióticas y aprendizajes intelectuales**.** Colombia: Peter Lang, 2004.

DUVAL, R. Registros de representação semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. A. **Aprendizagem em matemática.** 2. ed. São Paulo: Papirus, 2005. p. 11-33.

DUVAL, R. Diferenças semânticas e coerência matemática: introdução aos problemas de congruência. **Revemat,** Florianópolis, v. 7, n. 1, p. 97-117, 2012. Disponível em: http://www.periodicos.ufsc.br/index.php/revemat. Acesso em : 14 set. 2012

EVES, H. **Introdução à história da matemática**. Campinas, SP : Ed. UNICAMP, 2004.

GLAESER, George. Epistemologie des nombres relatifs. **RDM,** v.2., n.3, 1981.

MORETTI, M. T. A regra dos sinais para a multiplicação: ponto de encontro com a noção de congruência semântica e o princípio de extensão em matemática. **Bolema**, Rio Claro (SP), v. 26, n. 42B, p. 691-714, abr. 2012. Disponível em: http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/01/CC36384011468.pdf.
Acesso em: 10 mai. 2012.

PASSONI, J. C. (Pré-) **Álgebra:** introduzindo os números inteiros. Dissertação de Mestrado (Programa de Pós-Graduação em Educação matemática). PUC/SP, 2002. Disponível em: http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/joao_passoni.pdf. Acesso em: 14 jun. 2011.

PONTES, M. O. **Obstáculos superados pelos matemáticos no passado e vivenciados pelos alunos na atualidade**: a polêmica multiplicação de números inteiros. Tese de Doutorado (Programa de Pós-Graduação em Educação) - Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2010.

TEIXEIRA, L. R. M. Aprendizagem operatória de números inteiros: obstáculos e dificuldades. **Pró-Posição**, v. 4, n. 1, março, 1993. Disponível em
http://mail.fae.unicamp.br/~proposicoes/edicoes/home67.html. Acesso em: 10 set. 2011.