

## ESTUDOS SOBRE OS FRACTAIS EM TRÊS PROJETOS PIBIC-JR

Marco Antônio Escher  
UFSJ  
escher@ufs.edu.br

### Resumo:

Felix Klein contribuiu por meio da publicação de seus textos para professores do ensino secundário aproximando temas então contemporâneos de matemática ao currículo secundário. Pesquisadores contemporâneos alertam para o fato de que novos conteúdos necessitam ser incorporados ao currículo da escola básica. Dentre eles citamos o prof. Ubiratan D'Ambrosio que afirma que o atual currículo está obsoleto frente às mudanças sociais presenciadas pelos nossos alunos, e ainda vários outros educadores matemáticos que pesquisam sobre a inserção de temas contemporâneos no currículo do ensino básico. Esta pesquisa trata do assunto Fractais em três projetos distintos, envolvendo três pesquisadores das áreas de Matemática e Educação Matemática e alunos do Ensino Médio no projeto PIBIC Jr, trazendo um breve relato de cada um deles, e dando ênfase nos primeiros resultados obtidos no projeto "Uso dos Fractais em Diferentes Culturas".

**Palavras-chave:** Fractais; Etnomatemática; Informática; Dimensão.

### 1. Introdução

O presente texto retrata resultados de uma pesquisa do *Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica Junior - Fapemig*, conhecido como PIBIC-Jr<sup>1</sup>, desenvolvido no segundo semestre de 2012 e início de 2013.

Trata-se de uma pesquisa em andamento, mas que já contempla boa parte dos resultados objetivados em seu projeto, estando inserida em um projeto que contempla outras duas pesquisas. Para melhor compreensão, iremos detalhá-los.

---

<sup>1</sup> O CNPq/Fapemig através da modalidade "Iniciação Científica Júnior (ICJ)" financia bolsas para possibilitar aos estudantes do ensino fundamental, médio e de educação profissional da Rede Pública, participarem de atividades de pesquisa ou de extensão científica ou tecnológica, orientados por pesquisador qualificado. Seu objetivo é contribuir para a iniciação de estudantes do ensino fundamental, médio e de educação profissional em atividades de pesquisa, através da concessão de cotas de bolsas.

Esclarecemos que embora o programa no qual esteja inserido contemple apenas projetos individuais, um grupo de três professores do DEMAT - Departamento de Matemática e Estatística da Universidade Federal de São João Del Rei – UFSJ - decidiu enviar três projetos individuais, mas com características em comum. Trata-se de um estudo sobre os Fractais e cada um dos projetos envolvidos pretende estudá-lo em uma área específica (Educação Matemática, Tecnologia e Matemática). Serão detalhados os objetivos de cada um dos projetos, mas com ênfase em um deles, o qual parte dos resultados obtidos também serão expostos aqui, assim como algumas questões do desenvolvimento dos projetos.

## **2. Sobre os projetos**

A ideia do projeto foi presenciar como três alunos do Ensino Médio de duas escolas públicas do município de São João del Rei desenvolvem a matemática frente a um conteúdo não estudado nos programas curriculares da escola básica, Fractais, trabalhando coletivamente as partes em comum (definição, características e primeiros conceitos envolvidos), para depois cada um deles centrar esforços em uma área específica, Educação Matemática, Tecnologia e Matemática, como relatado anteriormente.

Os projetos são: A) O uso de Fractais em diferentes culturas, desenvolvido pelo autor deste artigo, B) Simulação Computacional de Fractais, desenvolvido pela profa. Dra. Ivana de Vasconcellos Latosinski - UFSJ e C) Dimensão fractal, desenvolvido pelo prof. Dr. Waliston Luiz Lopes Rodrigues Silva – UFSJ - resumos retirados dos respectivos projetos e reproduzidos aqui:

### *Projeto A: O uso de Fractais em diferentes culturas*

*Problema:* Trataremos do assunto Fractais e relações de como a cultura de vários povos, utilizando do referencial teórico da Etnomatemática (D’Ambrósio, 1996), interpretam ou fazem uso de objetos estudados pela teoria, e de sua utilização na escola básica.

*Pergunta de pesquisa:* A proposta é estudar conjuntamente com um aluno selecionado para o projeto, o tema Fractais em sua dimensão mais simples possível relativo aos conhecimentos do aluno, com a perspectiva da Educação Matemática. Paralelo a isso, faremos alguns estudos sobre como diferentes povos se apropriam de tal conhecimento, formalizado ou não. Isso significa que construiremos e calcularemos a dimensão fractal de modelos simples de fractais como o conjunto de Cantor clássico e a curva de Koch. Esses

modelos são matematicamente acessíveis a alunos do ensino médio uma vez que a auto-similaridade exata evita o conhecimento de alguns conceitos avançados de matemática para esses alunos. Perguntas da pesquisa: 1) Como podemos utilizar a teoria dos Fractais em sala de aula? 2) Como diferentes povos e comunidades fazem uso da teoria dos fractais?

*Objetivos:* Colocar o aluno em contato com a teoria dos Fractais e estimulá-lo a pesquisar sobre o assunto. Conhecer os conceitos básicos sobre a teoria de Fractais e sobre a Etnomatemática. Conhecer de algumas aplicações de Fractais na escola básica. Produzir um levantamento de diferentes abordagens sobre os fractais em comunidades culturalmente diferentes.

#### *Projeto B: Simulação Computacional de Fractais*

*Problema:* A proposta é estudar e explorar computacionalmente, conjuntamente com um aluno selecionado para o projeto, o tema fractais em sua dimensão mais simples possível relativo aos conhecimentos do aluno. Isso significa que construiremos modelos de fractais como o conjunto de Cantor clássico, a curva de Koch, a curva de Hilbert e o conjunto de Mandelbrot. A seguir, faremos a modelagem de alguns desses fractais no computador, utilizando para isso o software Superlogo que permite a realização dessa tarefa através de comandos simples. Além disso, existem alguns softwares já prontos que simulam exemplos de fractais. Com isso, o aluno complementaria o estudo, construindo alguns modelos de fractais e interagindo com outros, no computador. Vale mencionar que os softwares propostos são gratuitos e estão disponíveis na internet.

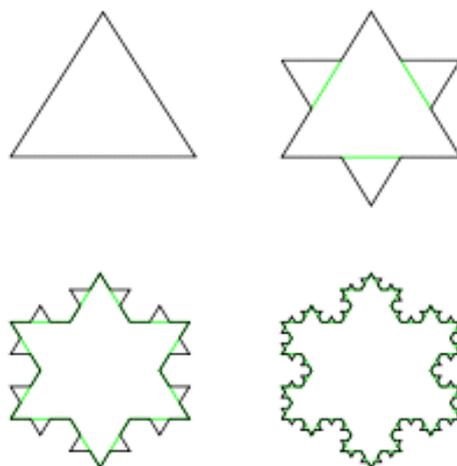
*Perguntas da pesquisa:* 1) O que são fractais? 2) Como os fractais podem ser simulados no computador ?

*Objetivos:* Entrar em contato com fractais e explorar computacionalmente esses objetos.

#### *Projeto C: Dimensão fractal*

*Problema:* A proposta é estudar o tema em sua dimensão mais simples possível na perspectiva matemática. Isso significa que construiremos e calcularemos a dimensão fractal dos modelos mais simples de fractais como o conjunto de Cantor clássico e a curva de Koch. Esses modelos são matematicamente acessíveis a alunos do ensino médio uma vez que são fractais conformes - suas partes menores são exatamente cópias de si mesmo. Essa propriedade evita o conhecimento de alguns conceitos avançados de matemática para

tratar a falta de regularidade de modo que a compreensão da dimensão fractal seja acessível a um aluno do ensino médio. Grande parte do problema de se obter dimensões fractais de conjuntos fractais reside nessa falta de regularidade. Um tipo de conjunto que o aluno irá trabalhar é a curva de Koch que poderia ser encarada como a costa de uma ilha extremamente regular - uma simplificação da costa de uma ilha. Encontra-se abaixo a ilustração da construção de uma curva de Koch.



**Figura 1-** construção da Curva de Koch

No primeiro passo, temos um triângulo. No segundo anexamos um triângulo menor a cada lado do triângulo original, obtendo a figura do canto superior direito. No terceiro passo, anexamos triângulos menores a cada lado dos triângulos da figura anterior - do segundo passo - e assim por diante. A figura resultante é um fractal conforme com dimensão fractal estritamente entre 1 e 2 o que significa que a curva de Koch tem comprimento infinito e área zero. Uma curiosidade sobre essa curva é que apesar de seu comprimento ser infinito, ela encerra uma região com área positiva finita.

*Perguntas da pesquisa:* 1) Como calcular a dimensão fractal de fractais conformes?  
2) Qual é a relação entre a dimensão fractal de conjuntos auto-similares com as medidas euclidianas como comprimento e área?

*Objetivos:* Entrar em contato com fractais e calcular as dimensões fractais de conjuntos conformes.

Conforme comentário anterior, iremos descrever as ações e resultados do projeto A, desenvolvido pelo autor deste artigo desenvolvimento juntamente com uma aluna do Ensino Médio.

### 3. Sobre o desenvolvimento dos projetos

Os projetos foram desenvolvidos em duas fases, sempre com encontros semanais. Na primeira fase, os três professores responsáveis revezavam apresentações sobre de conteúdo geral sobre Fractais, objetivando dar uma ideia do assunto aos três alunos do projeto. A segunda fase, ainda com encontros semanais, se desenvolveu em reuniões separadas por projetos.

Uma observação interessante foi a de que, no projeto C, sobre a Dimensão Fractal, o professor responsável adotou como texto base o livro do professor Elon Lages Lima, *Análise Real*, Vol. 1, editado pelo IMPA (Instituto de Matemática Pura e Aplicada), da Coleção Matemática Universitária.

### 4. Metodologia

Neste texto, além dos resultados obtidos no projeto “O uso de Fractais em diferentes culturas”, exporemos como o processo está sendo investigado e também o relato da própria aluna na pesquisa dos dados para a pesquisa. Dentre esses pontos, o “fazer pesquisa” foi considerado um desafio. Essa preocupação está baseada nas constatações de que poderia ser confundido o termo com o uso habitual de pesquisa feito por alguns professores, como nos alerta Ludke e André:

“A professora pede aos alunos “pesquisarem” determinado assunto e o que eles fazem, em geral, é consultar algumas ou apenas uma obra, do tipo enciclopédia, onde coletam as informações para a “pesquisa”. Às vezes são recortados jornais e revistas, em busca de elementos para compor o produto final, a “pesquisa” a ser apresentada ao professor.” (LUDKE & ANDRÉ, 1986)

As autoras ainda afirmam que:

“para se realizar uma pesquisa é preciso promover o confronto entre os dados, as evidências, as informações coletadas sobre determinado assunto e o conhecimento teórico acumulado a respeito dele.” (LUDKE & ANDRÉ, 1986)

No entanto, tínhamos consciência de que não estávamos ali esperando essa compreensão dos alunos logo nas primeiras reuniões de orientação. O aparecimento desta compreensão dependia da atuação dos orientadores e da capacidade dos alunos em ultrapassar a definição culturalmente enraizada, ou seja, aprender a fazer pesquisa.

Segundo Bicudo, pesquisar significa “ter uma interrogação e andar em torno dela, em todos os sentidos, sempre buscando, suas múltiplas dimensões e andar outra vez e outra ainda, buscando mais sentido, mais dimensões, e outra vez mais...” (BICUDO, 2005, p.8).

Nossa<sup>2</sup> opção por uma metodologia qualitativa de pesquisa se baseia no fato de que a investigação qualitativa se mostra suficiente e direcionada para analisar os dados coletados, formado pelas leituras das entrevistas, a análise de textos e livros e a pesquisa bibliográfica. A investigação qualitativa “é rica em dados descritivos, é aberta e flexível e foca a realidade de forma complexa e contextualizada” (LÜDKE & ANDRÉ, 1986, p. 18) e que “a fonte direta dos dados é o ambiente natural, constituindo o investigador o instrumento principal” (BOGDAN & BIKLEN, 1998, p. 47).

Além disso, deparamo-nos com a situação de que vários conteúdos não eram de domínio dos alunos, conteúdos estes normalmente estudados no Ensino Médio, como matrizes, logaritmos e algumas noções de geometria plana. Estes conteúdos foram retomados ou explicados para que a compreensão dos conceitos envolvidos pudesse ser plena.

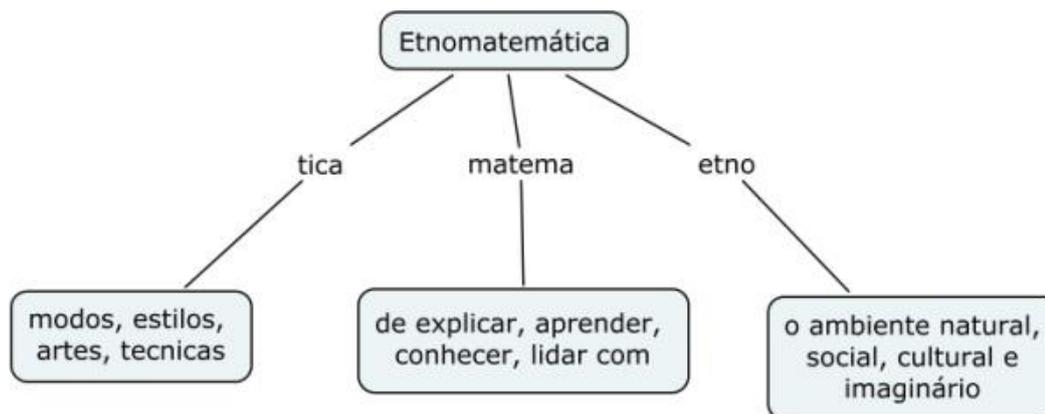
## **5. Sobre o projeto A, primeiros resultados**

O estudo feito pela aluna Ana Flávia de Andrade (aluna do segundo ano do Ensino Médio da escola Iago Pimentel na cidade de São João Del Rei/MG) desenvolveu-se inicialmente no estudo dos conceitos de Etnomatemática e Fractais. Segundo as leituras realizadas pela orientanda na bibliografia indicada, a Etnomatemática surgiu na década de 70 com base em críticas sociais a cerca do ensino tradicional da Matemática, como a análise das práticas matemáticas, em seus diferentes contextos culturais. Ubiratan D’Ambrósio é considerado internacionalmente o “pai da Etnomatemática”, fundador de todo um programa de reflexão sobre e de pesquisa do desenvolvimento de ideias matemáticas nos seus mais diversos contextos históricos, culturais e educacionais.

Segundo Ubiratan, “na verdade diferentemente do que sugere o nome, Etnomatemática não é apenas o estudo de Matemática das diversas etnias” (D’AMBROSIO, 1996). Para compor a palavra etnomatemática ele utilizou as raízes

---

<sup>2</sup> Esclarecemos que a opção pela utilização de Metodologia de Pesquisa Qualitativa foi adotada apenas no projeto A. Nos demais projetos (B e C) desenvolvidos por professores da área de Matemática ela não foi explicitada.



**Figura 2** – Conceito de Etnomatemática (D’Ambrósio, 2001)

Já os Fractais, introduzidos por Mandelbrot, são formas geométricas abstratas de uma beleza incrível, com padrões complexos que se repetem infinitamente, mesmo limitados a uma área finita.

Segundo Barbosa, “um fractal é, por definição, um conjunto para o qual a dimensão Hausdorff-Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica” (BARBOSA, p. 18, 2002).

Nussenzweig define fractal como sendo

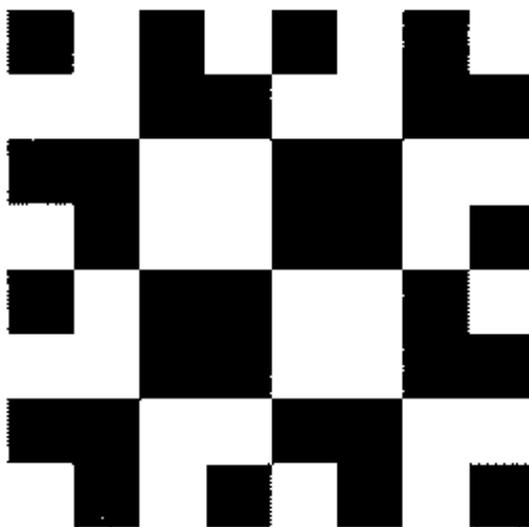
“conjuntos cuja forma é extremamente irregular ou fragmentada e que têm essencialmente a mesma estrutura em todas as escalas. A origem do termo fractal, introduzida por Mandelbrot está no radical *fractus*, proveniente do verbo latim *frangere*, que quer dizer quebrar, produzir pedaços irregulares; vem da mesma raiz a palavra fragmentar, em português. (NUSSENZWEIG, p. 55, 1999).

Suas principais propriedades são a auto-similaridade, extrema irregularidade e uma dimensão não inteira.

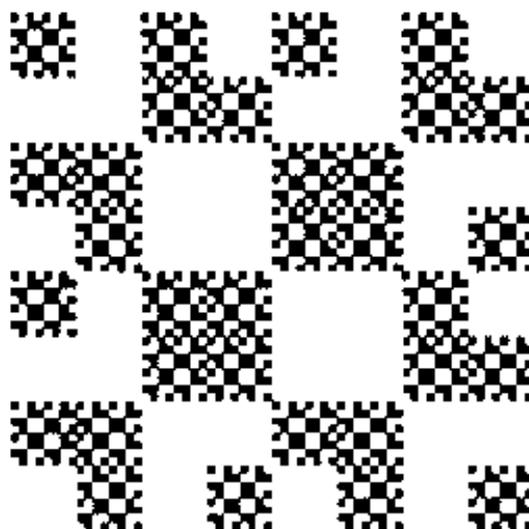
Foram estudados como exemplos os seguintes fractais e calculado suas respectivas dimensões: Conjunto de Cantor (~ 0,63), Curva de Koch (~1,262), Triângulo de Sierpinski (~ 1,585). Foi utilizada para isso a fórmula da dimensão:  $n = \text{número de peças}$ ,  $m = \text{fator de aumento}$  ou  $D = \frac{\log n}{\log m}$ . Nesse ponto houve a necessidade do estudo de logaritmos.

O primeiro contato com Fractais africanos foi com a leitura de uma das obras do professor Paulus Gerdes, da Universidade Eduardo Mondlane e da Universidade Pedagógica de Moçambique, é um pesquisador em Etnomatemática, e em um dos seus artigos, chamado “Sobre a produção de conhecimentos matemáticos da África central e austral”, onde apresenta evidências de aspectos matemáticos do cotidiano, como, por

exemplo, sistemas de contagem e de numeração, jogos de cálculos e algoritmos algébricos presentes no sul da África. Em seu livro “Da Etnomatemática a arte-design e matrizes cíclicas”, Gerdes afirma que “é possível construir fractais planos a partir de Lunda-designs pelo método de remoção” (GERDES, p. 83, 2010).



**Figura 3:** Fractal obtido de um Lunda-designs (gerador) (GERDES, p. 85, 2010)



**Figura 4:** Fractal obtido de um Lunda-designs (nível 1) (GERDES, p. 85, 2010)

Em contato feito com o professor Ubiratan (por email), este recomendou os seguintes trabalhos: Ron Eglash: African Fractals: Modern computing and indigenous design, Ruthers University Press, New York, 1999, e a Dissertação de Mestrado de Clécio

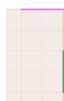
Rodrigues Soxa, que trabalhou sobre fractais em diferentes culturas, e manteve correspondência pessoal com Ron Eglash.

Também no artigo da Revista Scientific American, edição especial sobre Etnomatemática, a aluna pode ter contato com algumas descrições de observações de situações onde configurações fractais foram descobertas em povos de origem africana, identificações feitas pelo prof. Ron Eglash, como se observa a seguir. Na revista podemos observar a seguinte foto:



**Figura 5** - Foto encontrada no Museu de L'HOMME, Paris, de um palácio de um rei em Logone Birni - África

Depois de observado as explicações, utilizamos o software Geogebra para reproduzir os retângulos descritos.



**Figura 6** – Fase 1, 2 e 3 construção Fractal

Segundo o autor,

“É possível explicar a organização do palácio real por meio de um motivo fractal construído pela repetição de uma operação geométrica elementar: sobre uma fração de lados de um retângulo inicial, constrói-se um retângulo de proporções idênticas. Em seguida, novamente sobre os quatro retângulos, 16 outros são formados. O resultado é uma “grade” composta pelos lados de 20 retângulos, sobre a qual se pode sobrepor à planta do palácio real.” (Eglash, 2005)

Já na observação do vídeo o professor Ron Eglash apresenta-se no TED<sup>3</sup> e faz um resumo sobre os fractais Africanos, dando exemplos com fotografias, e experiências vividas por ele próprio em vilas e cidades da África. Exemplos: Sul da Zâmbia, montanhas de Madra e aldeia Nankami no Mali, etc. Relata seu contato com habitantes de cada cidade e naturalmente teve a curiosidade de perguntar o porquê quando se tira uma fotografia aérea de uma vila africana, sempre veem fractais. Visitou em Angola o povo Chokwe, que desenhavam linhas na areia, e descobriu que em cada iteração do algoritmo feito, era possível aprender as iterações dos mitos daquele povo. Também viu um jogo muito interessante e complicado de tabuleiro chamado Mancala. E por fim, aponta a ideia de auto-organização dos robustos algoritmos feitos pelos Africanos.

No livro de Ruy Madsen Barbosa, que retrata sobre uma introdução do tema fractal, abordando a parte geométrica, cálculo de dimensão, atividades para a sala de aula e ainda apresentando a utilização de recursos computacionais, nós estudamos detalhadamente o que são os fractais, vimos um pouco do seu iniciador Benoit Mandelbrot, aprendemos famosos fractais percussores: Conjunto de Cantor, Curva de Koch e Curva de Peano. Aprendemos as etapas de construção e como calcular as dimensões de cada um, na qual foi preciso estudar algoritmo.

Na dissertação de mestrado defendida em 2008 por Clécio Rodrigues de Souza, intitulada como “Programa Etnomatemática e cultura digital”, encontramos no capítulo 3 “Com Ron Eglash” uma entrevista feita com três pesquisadores (Ron Eglash, Arthur Powell e Marcelo de Carvalho Borba) “por estarem direta ou indiretamente envolvidos com etnomatemática e a tecnologia” (SOUZA, p. 82, 2008). Havia duas questões, e cada

---

<sup>3</sup> TED é uma organização sem fins lucrativos dedicada ao Ideas Worth Spreading. Começou em 1984 como uma conferência reunindo pessoas de três áreas: Tecnologia, Entretenimento e Design. Desde então, seu âmbito tem se tornado cada vez mais amplo. Junto com duas conferências anuais - a Conferência TED em Long Beach e Palm Springs a cada primavera, e a conferência TEDGlobal, em Edimburgo Reino Unido a cada verão - TED inclui o premiado TED Talks site de vídeos, o Projeto de Tradução Aberta e conversas TED, TED Fellows e programas TEDx, e o anual TED Prize. Site: [http://www.ted.com/talks/ron\\_eglash\\_on\\_african\\_fractals.html](http://www.ted.com/talks/ron_eglash_on_african_fractals.html), acesso em novembro/2012.

pesquisador respondeu com seu ponto de vista, relacionado-as com etnomatemática e tecnologia: “Primeira questão: Seus temas de pesquisa tratam de etnomatemática e tecnologia. Como esta conexão se desenvolveu nos seus trabalhos? Segunda questão: Você acredita que a etnomatemática e as novas tecnologias tendem-se a distanciar ou se aproximar? Por favor, justifique a sua resposta” (SOUZA, p. 82, 2008).

## **6. Resultados da pesquisa**

O presente projeto incluía, dentre outras questões, responder as seguintes perguntas da pesquisa: 1) Como podemos utilizar a teoria dos Fractais em sala de aula? 2) Como diferentes povos e comunidades fazem uso da teoria dos fractais?

No que concerne a pergunta 1, as atividades ainda estão em desenvolvimento, com a produção de algumas atividades a serem desenvolvidas em sala de aula, com o tema Fractais, bem como a produção de um texto baseado em artigos do professor D`Ambrósio e da professora Domite, ilustrando situações pedagógicas que os levam, enquanto professores,

“a refletir e legitimar saberes de alunos e alunas nascidos de experiências construídas em seus próprios meios, como servem para aprender parte de uma realidade escolar que pode funcionar como exemplo esclarecedor sobre os princípios da etnomatemática.” (DOMITE, p. 81, 2005)

Já em relação à pergunta dois, vários exemplos de fractais foram estudados, sendo que muitos deles foram descobertos em diferentes povos situados em locais em que a cultura ocidental normalmente não usa como referência em citações científicas formais. Os fractais encontrados são parte das práticas relacionadas a povos africanos.

Um outro ponto a se destacar foi o trabalho conjunto com outras áreas (Matemática e Informática) pela presença concomitante dos outros professores nos projetos irmãos. Uma observação a ser feita se refere a observações do comportamento do aluno no projeto C, frente as leituras da bibliografia escolhida, considerada formal para nível de amadurecimento matemático do aluno.

Consideramos que o processo investigativo desenvolvido pela aluna do Ensino Médio no projeto A foi plenamente alcançado, assim como os primeiros resultados sobre Fractais, seu aprendizado e discussões sobre o tema Etnomatemática.

## 7. Referências

BARBOSA, R. M., Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula. Belo Horizonte: Autêntica 2002.

BICUDO, M.A.V., Pesquisa Qualitativa: Significados e a Razão que a Sustenta. IN: Revista pesquisa qualitativa/publicação da Sociedade de Estudos e Pesquisa Qualitativos. - Ano 1, n.1 (2005) – São Paulo: SE&PQ, 2005.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. Qualitative Research for Education: an Introduction for Theory and Methods. 3. ed. Boston: Allyn and Bacon, 1998.

D'AMBRÓSIO, U., Educação Matemática: da teoria a prática, Campinas, SP: Papirus, 1996.

D'AMBRÓSIO, U., Etnomatemática Elo Entre as Tradições e a Modernidade. Autentica: Belo Horizonte, 2001.

DOMITE, M. C. S., Etnomatemática em ação, in in Revista Scientific American Brasil, Edição Especial nº11, Editora Abril, p. 80, 2005.

EGLASH, R. Fractais Africanos, in Revista Scientific American Brasil, Edição Especial nº11, Editora Abril, p. 66, 2005.

GERDES, P. Da Etnomatemática a Arte-design e Matrizes Cíclicas. Belo Horizonte: Autêntica, 2010.

LUDKE, H. A. & ANDRÉ, M. E. D., A. Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas, São Paulo: Ed. Pedagógica e Universitária, 1986.

NUSSENZVEIG, H. M, Complexidade e Caos, Rio de Janeiro: Editora da UFRJ, 1999.

SOUZA, C. R., Programa Etnomatemática e a Cultura Digital, Dissertação de Mestrado, Pontifícia Universidade Católica de São Paulo: São Paulo, 2008.