O CÁLCULO NO ENSINO MÉDIO: AS TAXAS DE VARIAÇÃO E O CONCEITO DE DERIVADA

Carolini Cunha Silva
Instituto Federal Fluminense Campus Campos-Centro
carolinicunha@yahoo.com.br

Ana Paula Rangel de Andrade
Instituto Federal Fluminense Campus Campos-Centro
anapaulara@iff.edu.br

Carmem Lúcia Vieira Rodrigues Azevedo
Instituto Federal Fluminense Campus Campos-Centro
carmemlvra@hotmail.com

Resumo
Ao observar a história do desenvolvimento do Cálculo no Brasil, nota-se que esta disciplina já esteve presente em alguns momentos na grade curricular do Ensino Médio. Atualmente, está em boa parte dos livros didáticos, mas não na sala de aula. Com este trabalho, pretende-se abordar o conceito de derivada, por meio da análise das taxas de variação da função, além de mostrar que o estudo do Cálculo quando apresentado de forma apropriada, é adequado aos alunos do Ensino Médio. Para isto, foi realizada uma pesquisa qualitativa com um grupo de alunos da 3ª série deste segmento, utilizando o estudo de caso como método de pesquisa e a Resolução de Problemas como metodologia de ensino. Feitas as análises, foi possível concluir que a atividade proposta contribuiu para que o objetivo fosse alcançado.

Palavras Chave: Cálculo; Taxas de Variação; Derivada; Resolução de Problemas.

1. Introdução

A Matemática, em seu papel formativo, colabora para que os processos de pensamento e atitude sejam utilizados em diversos âmbitos e não somente no seu próprio. Esta pode proporcionar aos alunos mais do que a capacidade de resolver problemas, mas criar hábitos que contribuam para uma visão mais ampla da realidade, gerando, nesses, confiança e desprendimento para enfrentar novas situações e desenvolvendo a criatividade (BRASIL, 2000).

Esta disciplina permite uma interdisciplinaridade com outras áreas de conhecimento, o que vem ao encontro do que está nos Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio de Matemática (PCN+EM) (2002):

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões próprias, tomar decisões, generalizar e para muitas outras ações necessárias à sua formação (BRASIL, 2002, p.111).

Embora se deseje que o aluno ganhe a capacidade de enfrentar situações com bastante confiança ao estudar Matemática, sabe-se que esta não é uma realidade nos dias atuais, principalmente quanto ao estudo do Cálculo. São muitos os relatos de professores que lecionam a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I que apontam a dificuldade apresentada pelos alunos em seu estudo. O número de reprovação e evasão dos alunos é um problema que vem sendo muito discutido e pesquisado por alguns autores.

Acredita-se que os altos índices de reprovação e evasão em Cálculo I possam ser reduzidos ao fazer com que este estudo seja tratado desde o Ensino Médio. Sobre este assunto Ávila (1991, p.1) levanta o seguinte questionamento: “Por que não ensinamos Cálculo na escola de 2º grau[1]? Será que é um assunto muito difícil?”.

As ideias trazidas pelo Cálculo diferem das que, usualmente, são apresentadas aos alunos do Ensino Médio, sendo muito enriquecedoras no estudo de funções e de grande relevância quando utilizadas para auxiliar a Física, além de trazerem uma infinidade de aplicações científicas no mundo moderno e outras relacionadas ao cotidiano dos alunos, preparando-os melhor para a atualidade (ÁVILA, 1991).

Dentre os conteúdos abordados na disciplina Cálculo, o ensino da derivada é de grande importância, pois além de ajudar no tratamento de inúmeras propriedades das funções e de ter aplicações interessantes em problemas de máximo e mínimo, crescimento e decrescimento, dentre outros, integra-se harmoniosamente com a Física em diversos conteúdos, como no estudo do movimento, pressão, densidade, em meio a outras

[1] Atual Ensino Médio

aplicações. A noção de derivada pode tornar o estudo de alguns destes tópicos mais simples e compreensíveis para os alunos do Ensino Médio (ÁVILA, 1991).

Acredita-se que uma maneira simples de se introduzir a noção de derivada é fazê-la por meio da análise das taxas de variação de uma função, conteúdo este que já faz parte do currículo deste segmento. É válido ressaltar que, neste trabalho, não se objetivam incluir tópicos do Cálculo, como limites, regras de derivadas e integrais, mas utilizar das ideias já existentes para iniciar o conceito de derivada.

Analisando a história do desenvolvimento do Cálculo no Brasil, foi possível observar que, devido a algumas reformas no ensino, esta disciplina já esteve presente e ausentou-se em diferentes momentos da grade curricular do Ensino Médio. Atualmente, é possível perceber que alguns tópicos do Cálculo se encontram presentes no livro didático, como os de limite e derivada, mas não estão na maior parte das vezes na sala de aula. Ávila (1991) acredita que esta ausência se deve ao fato de os professores se apoiarem na crença de que este é um conteúdo muito difícil para os alunos do Ensino Médio. Neste trabalho, uma das premissas é a certeza de que as ideias trazidas pelo Cálculo são muito pertinentes e que podem ser trabalhadas neste segmento.

Para que a volta do Cálculo seja efetiva e que os alunos consigam de fato aprender o conceito de derivada é necessário que este seja aliado a uma metodologia de ensino que desperte o interesse dos mesmos.

Portanto, optou-se neste trabalho pela metodologia de ensino Resolução de Problemas. As autoras Onuchic e Allevato (2009, p.221) falam sobre a importância em se estudar Matemática por meio desta metodologia afirmando que:

> É importante reconhecer que a Matemática deve ser trabalhada através da Resolução de Problemas, ou seja, que as tarefas envolvendo problemas ou atividades sejam o veículo pelo qual um currículo deva ser desenvolvido. A aprendizagem será uma consequência do processo de Resolução de Problemas.

Diante do exposto, o presente trabalho tem por objetivo compreender o conceito de derivada por meio da análise das taxas de variação da função. Propõe-se, também, mostrar que o estudo do Cálculo é perfeitamente possível e adequado para alunos do Ensino Médio, desde que este seja apresentado de forma apropriada.

Esta pesquisa está articulada com o tema deste Encontro, Educação Matemática: retrospectivas e perspectivas, já que trabalha com as idéias do Cálculo, disciplina que já esteve presente nos programas do atual Ensino Médio e que traz uma proposta bastante significativa para a sala de aula, utilizando conceitos importantes como o de taxa de variação e o de função.

2. Procedimentos Metodológicos

Neste trabalho foi feita uma pesquisa de caráter qualitativo, na qual se realizou um estudo de caso com alunos da 3ª. série do Ensino Médio de uma escola particular de Campos dos Goytacazes-RJ.

Para realizar a coleta de dados, foram utilizadas as seguintes técnicas: observação participante, gravação em áudio das aulas e anotações descritivas e reflexivas.

Desenvolveu-se uma sequência didática com 10 questões e uma Folha Extra com o objetivo de iniciar o estudo de Derivada por meio da análise das taxas de variação de uma função.

Foram realizados alguns encontros com os alunos em que era solicitado resoluções individuais das questões e em seguida discussões das respostas à luz da metodologia de ensino adotada, neste caso a Resolução de Problemas.

3. A Proposta Didática

A sequência didática elaborada neste trabalho, composta por 10 questões e uma Folha Extra, tem como objetivo iniciar o estudo de Derivada por meio da análise das taxas de variação de uma função. Com este estudo, pretende-se promover a compreensão do conceito de Derivada na resolução de questões, sem fazer uso de suas regras.

Este trabalho tem início com uma apresentação em slides sobre taxas de variação com o objetivo de situar o aluno em relação a aplicabilidade do tema proposto.

A primeira questão (Figura 1) trata de uma função afim que relaciona espaço e tempo e tem por objetivo fazer com que o aluno perceba que na função afim variações iguais na variável independente causam variações iguais na variável dependente.

Figura 1 – Questão 1

1) Um corpo movimenta-se sobre uma trajetória retilínea obedecendo a função horária S = 20 + 4t, em que S é o espaço percorrido em quilômetros e t o tempo em horas.

Qual a variação de S, quando t varia de 1h para 2h? E de 2h para 3h? E de 5h para 6h? Esses valores são iguais?

Fonte: elaboração própria

A segunda questão (Figura 2) relaciona duas grandezas, salário final de um segurança e número de plantões noturnos. Os objetivos desta são: identificar uma função afim, sem que os coeficientes sejam fornecidos explicitamente e associar o coeficiente angular da reta à tangente do ângulo de inclinação da mesma.

Figura 2 – Questão 2

2) (Iezzi et al., 2004, p.71. Adaptada)[1] O salário fixo mensal de um segurança é de R$ 540,00. Para aumentar sua renda, faz plantões noturnos em uma boate e recebe R$ 60,00 por noite de trabalho.

a) Quanto o segurança deverá receber ao final do mês se ele fizer um plantão noturno? E se fizer dois?

b) Existe uma relação entre o salário final mensal **S** do segurança e a renda por número **p** de plantões noturnos na boate. Determine a lei que expressa matematicamente essa relação.

c) A representação gráfica desta relação é:

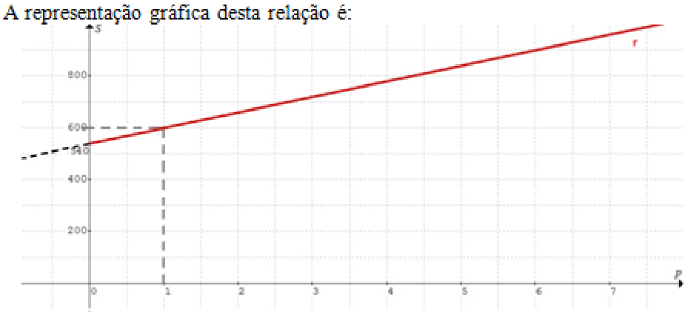


Gráfico 1

Assinale no plano cartesiano acima o ângulo de inclinação da reta r e determine a tangente deste.

d) Qual a relação entre esse ângulo e o valor 60, que o segurança recebe por plantão noturno?

Fonte: Iezzi et al., 2004, p.71. Adaptada pela Autora

O objetivo da terceira (Figura 3) questão é relacionar a velocidade média com o coeficiente angular da reta. Nesta é possível observar algumas das relações descritas anteriormente por meio de um gráfico que traz a distância pelo tempo.

Figura 3 – Questão 3

3) A família Souza, que vive em Campos dos Goytacazes, pretende viajar nas férias para uma cidade do estado do Rio de Janeiro que fica a 400 km de distância de Campos. O gráfico a seguir representa a distância em relação ao tempo de viagem.

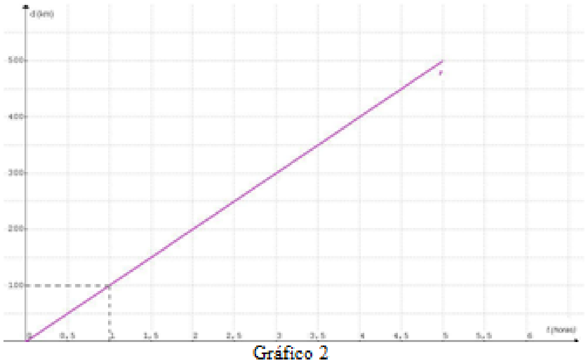


Gráfico 2

a) Quantos quilômetros a família percorre em 1 hora?
b) A que velocidade média a família viaja?
c) Determine o coeficiente angular da reta r.
d) Qual a relação entre a velocidade média e o coeficiente angular da reta *r* ?

Fonte: elaboração própria

A quarta questão (Figura 4) trata do movimento de uma partícula sobre uma curva e descreve por meio de uma função quadrática a relação entre o tempo e o espaço percorrido. Os objetivos desta são fazer com que o aluno perceba que: (i) em uma função quadrática a taxa de variação varia de ponto para ponto, diferentemente do que ocorre em uma função afim; (ii) a variação do espaço em relação ao tempo é uma progressão aritmética e (iii) a variação desta variação é constante.

Figura 4 – Questão 4

4) Uma partícula move-se sobre uma curva de forma que, após t segundos, ela está a $S = 2t^2+3$ metros de sua posição inicial.

Complete a tabela a seguir com os valores das variações nos instantes indicados:

Variação dos Instantes	Variação de S em relação a t	Variação da variação de S em relação a t
Entre t=0 e t=1		
Entre t=1 e t=2		
Entre t=2 e t=3		
Entre t=3 e t=4		
Entre t=4 e t=5		

A partir dos dados encontrados na tabela anterior, responda:

a) A sequência obtida na segunda coluna representa uma progressão. De que tipo?
b) O que você observa quanto a variação da variação de S em relação a t?

Fonte: elaboração própria

Na quinta questão (Figura 5), é dado um gráfico que descreve a velocidade escalar de um avião bem como a lei da função que relaciona velocidade e tempo. Os objetivos desta são: (i) levar os alunos a relacionar a taxa de variação média, calculada em intervalos desta função, com o coeficiente angular das retas que passam pelos extremos destes mesmos intervalos e (ii) fazê-los perceber que a diferença entre os extremos destes intervalos se aproxima de zero, fato necessário para a compreensão do conceito de taxa de variação instantânea.

Figura 5 – Questão 5

5) A velocidade escalar de um avião é dada segundo o gráfico abaixo:

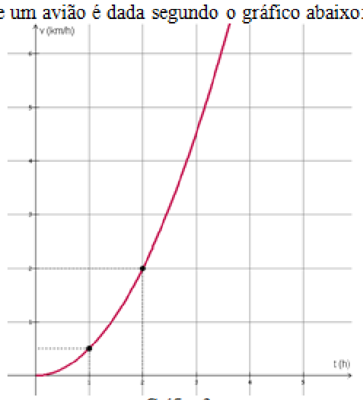


Gráfico 3

Vamos analisar o trecho em que $0 \le t \le 3$, sabendo que os pontos (0;0), (1;0,5) e (2;2) pertencem ao gráfico acima e que a lei da função $v = f(t)$ é $v = \frac{1}{2}t^2$.

a) Considere uma função f(x) qualquer e x_A e x_B dois elementos do seu domínio. O quociente:

$$\boxed{T_{VM} = \frac{f(x_B) - f(x_A)}{x_B - x_A} = \frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

é chamado de **taxa de variação média** entre x_A e x_B da função f(x) em relação a x.

Determine a taxa de variação média da função v=f(t) nos seguintes intervalos: $[1,3]$, $[1,2]$, $\left[1,\frac{3}{2}\right]$ e $\left[1,\frac{9}{8}\right]$.

b) Trace no Gráfico 3 as retas que passam pelos extremos dos intervalos do item a e nomeie a reta que passa por:
- $[1,3]$ de reta r
- $[1,2]$ de reta s
- $\left[1,\frac{3}{2}\right]$ de reta q
- $\left[1,\frac{9}{8}\right]$ de reta u

c) Determine o coeficiente angular das retas r, s, q e u.
d) Compare os resultados obtidos nos itens a e c. O que você conclui?
e) A diferença entre os extremos dos intervalos do item a se aproxima de que valor?

Fonte: elaboração própria

A sexta questão (Figura 6) trata do armazenamento de água em um determinado reservatório e traz uma função quadrática relacionando volume e altura. O objetivo desta é definir derivada de uma função em um ponto como a taxa de variação instantânea desta função neste ponto. Propõe-se para tal o cálculo da variação do volume pela variação da altura para intervalos cada vez menores, fazendo o aluno perceber que estas variações tendem a um único valor.

Figura 6 – Questão 6

6) Um reservatório de formato irregular armazena água. O volume de água armazenado varia em função da altura do nível da água segundo a função $V = 3h^2+5$, na qual h é a altura em metros e V é o volume em 10^3m^3.

a) Preencha a tabela a seguir com os volumes referentes aos valores da altura próximos a 10.

h	9,9	9,99	9,999	10	10,001	10,01	10,1
V				305			

b) Complete a tabela abaixo, considerando a variação do volume num dado intervalo e a taxa de variação média do volume neste mesmo intervalo.

Intervalos	ΔV	$\frac{\Delta V}{\Delta h}$
[9,9;10]		
[9,99;10]		
[9,999;10]		
[10;10,1]		
[10;10,01]		
[10;10,001]		

c) A partir dos dados encontrados na tabela acima, podemos afirmar que quando a altura se aproxima de 10, a taxa de variação média da função se aproxima de que valor?

O valor encontrado no item c é chamado de **taxa de variação instantânea** quando h=10.

Definimos **derivada** de uma função no ponto x=c, como taxa de variação instantânea desta função neste ponto.

Fonte: elaboração própria

A sétima questão (Figura 7) traz uma função que relaciona a temperatura de um chuveiro elétrico de acordo com o tempo e tem por objetivo avaliar se o aluno consegue calcular a derivada da função em um ponto.

Figura 7 – Questão 7

7) A temperatura de um chuveiro elétrico varia com o tempo t de acordo com a expressão:
$\theta = t^3+2t+25$ (θ em °C, t em segundos)
Determine a taxa de variação instantânea de θ, dada em °C/seg quando t=2s.

Fonte: elaboração própria

A oitava questão (Figura 8) apresenta um gráfico que descreve a trajetória de uma pedra lançada após uma explosão. É pedido que os alunos tracem quatro retas, sendo dadas as abscissas de dois pontos de cada reta, de tal modo que em todas as retas um ponto possua a mesma abscissa, com o objetivo de indicar o ponto de tangência. Além disso, são apresentadas quatro alternativas em que uma indica a posição relativa da reta à qual as outras quatro estão tendendo. Assim, pretende-se que os alunos observem que quando a diferença das abscissas tende a zero a reta secante tende a reta tangente a uma curva em um determinado ponto.

Figura 8 – Questão 8

8) Durante as escavações dos túneis de um metrô uma carga de explosivos lançou uma pedra para cima, como descreve o gráfico abaixo:

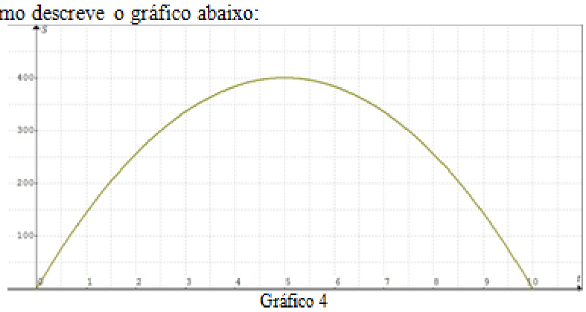


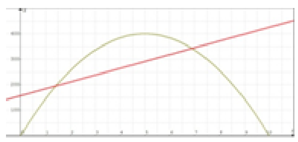
Gráfico 4

Sabendo que *S* é o deslocamento da pedra dado em metros, t segundos após o lançamento, trace neste mesmo gráfico as retas que passam pelos pontos de deslocamento da pedra nos instantes:

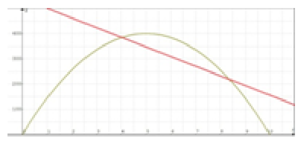
- t=6s e t=8s (reta *p*)
- t=6s e t=7s (reta *q*)
- t=6s e t=6,5s (reta *r*)
- t=6s e t=6,1s (reta *s*)

As retas *p, q, r* e *s* que você traçou, observadas nesta ordem, "tendem" a uma reta *t*. Dentre as alternativas abaixo determine a que melhor se aproxima da reta *t:*

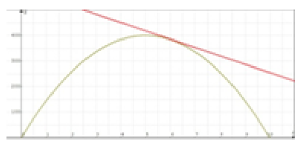
a)



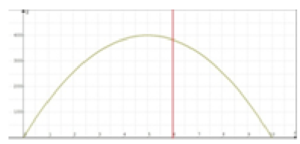
b)



c)



d)



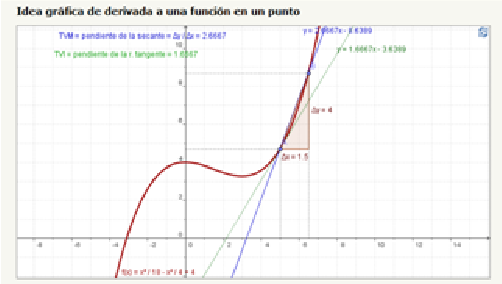
A reta que você encontrou é chamada **reta tangente** à curva S(t) no ponto t=6.

Fonte: elaboração própria

O objetivo da questão nove (Figura 9) é fazer com que os alunos percebam, por meio de um *applet*, algumas relações. Primeiramente, quando pelos pontos A e B passa uma reta, denominada reta secante e, movendo o ponto B em direção a A, a reta secante irá girar em direção a uma posição limite. A reta nessa posição limite é o que se considera reta tangente em A. Consequentemente, observa-se que o coeficiente angular da reta secante se aproxima do coeficiente angular da reta tangente. Depois, pretende-se que os alunos observem que a taxa de variação média se aproxima da taxa de variação instantânea, podendo assim concluir que a derivada da função em um ponto é igual ao coeficiente angular da reta tangente à curva neste ponto.

Figura 9 – Questão 9

9) Iremos desenvolver os itens desta questão utilizando o *applet* que se encontra disponível em: http://docentes.educacion.navarra.es/~msadaall/geogebra/figuras/d1derivada1p.html[2]



Movendo os pontos A e B podemos fazer algumas observações quando a distância entre os mesmos se aproxima de zero.

a) Quando aproximamos o ponto B do ponto A, a taxa de variação média entre esses pontos se aproxima de que taxa?
b) Qual é a taxa de variação instantânea em x=5?
c) Qual a relação entre a taxa de variação instantânea em x = 5 e a reta tangente à curva nesse mesmo ponto?
d) Baseada na resposta do item c e na definição de derivada apresentada na questão 6,o que você conclui?

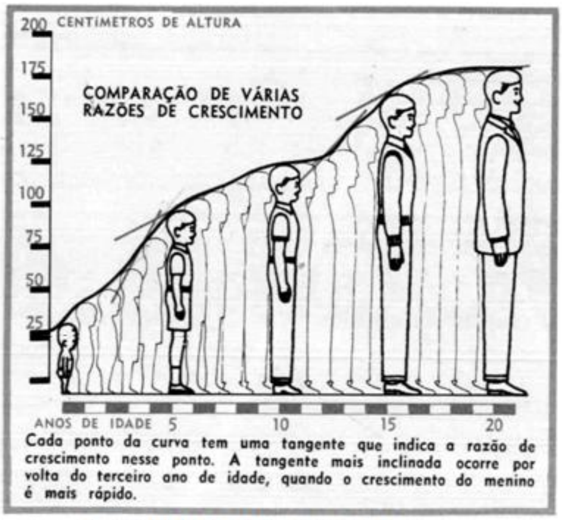
Fonte: elaboração própria

Após a nona questão, tem-se a Folha Extra (Figura 10) que traz o conceito de velocidade do crescimento relacionando-o com a inclinação da reta tangente. Esse conceito pode ser observado por meio de um gráfico em que é possível verificar as alturas de um menino ao passar dos anos. O objetivo desta é que o aluno perceba que quanto maior a inclinação da reta tangente à curva em um ponto, mais rápida é a velocidade do crescimento da função neste ponto. Se a tangente for horizontal, então não haverá crescimento no ponto analisado.

Figura 10 – Folha Extra

FOLHA EXTRA[4]

Observe a figura abaixo, em que tomamos as medidas anuais do crescimento de uma pessoa até seus 21 anos.



Fonte: BERGAMINI, 1965, p.121.

Quando traçamos este gráfico conseguimos obter algumas informações com relação ao crescimento do menino por meio desta curva. A razão de crescimento pode ser observada em qualquer ponto se traçarmos sua tangente. A inclinação da tangente mede a razão exata do crescimento no ponto em que toca. Se a inclinação da tangente é grande, sabemos que o crescimento é rápido, se a tangente é horizontal, não ocorre crescimento no ponto considerado. Se quisermos analisar a velocidade do crescimento é necessário que essa análise seja feita em um espaço de tempo cada vez menor, uma vez que quando calculamos a média essa informação se perde.

[4]Texto baseado na enciclopédia:
BERGAMINI, David. As Matemáticas. In: BIBLIOTECA CIENTÍFICA LIFE. Rio de Janeiro: Livraria José Olympo Editora, 1965.p.114-123

Fonte: elaboração própria

O objetivo da décima questão (Figura 11) é que o aluno utilize o conceito visto na Folha Extra em uma nova situação. São apresentados três reservatórios de mesma capacidade e altura e seus respectivos gráficos, que mostram o comportamento do nível da água no decorrer do tempo. O aluno terá que observar em quais dos três reservatórios se tem a velocidade do crescimento mais rápida no início do processo e, depois no fim do processo. Para isso, deverá ser feita uma análise das inclinações das retas tangente nos gráficos correspondentes a cada reservatório.

Figura 11 – Questão 10

10) Na Figura 1 são apresentados três tipos reservatórios com mesma capacidade e mesma altura[3]:

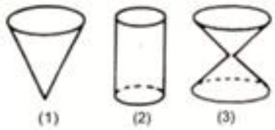


Figura 1

Colocamos torneiras enchendo cada um desses reservatórios e vamos admitir que a vazão da água seja a mesma para todos eles. A Figura 2 mostra o comportamento do nível da água no decorrer do tempo.

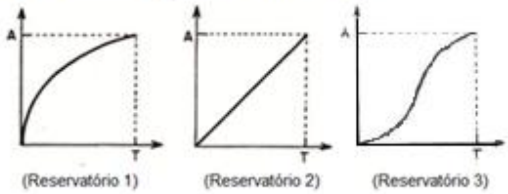


Figura 2

a) Em qual dos três reservatórios podemos afirmar que a velocidade do crescimento do nível da água é maior no início do processo? E em qual é maior no final do processo?
b) O que você observa em relação a velocidade do crescimento do nível da água no reservatório 2?
c) Que relação existe entre a velocidade do crescimento do nível da água nos reservatórios e as inclinações das retas tangentes nos diversos pontos de

[3] Esta questão foi baseada no artigo referenciado a seguir:
GRAVINA, Maria Alice. Um estudo de funções. In: *Revista do Professor de Matemática*, n. 20, Rio de Janeiro, Sociedade Brasileira de Matemática (SBM), 1992, p.33-38.

Fonte: Gravina, 1992, p.33-38. Adaptada pela autora

4. Relato de Experiência

O trabalho foi desenvolvido em três encontros de duas horas cada. Os alunos participantes já haviam estudado funções, assim era esperado que estivessem familiarizados com temas como: crescimento e decrescimento, taxa de variação dentre outros.

Algumas dificuldades surgiram no decorrer deste processo como: (i) interpretação errônea do enunciado de algumas questões como na 1ª, na 5ª e na 6ª c. Sobre esta dificuldade, Polya (2006) afirma que o aluno deve começar "... de novo pelo enunciado do problema, quando este estiver tão claro e tão bem gravado em sua mente que poderá até perdê-lo de vista por um momento sem temor de perdê-lo por completo" (POLYA, 2006, p.29); (ii) falta de conhecimento de alguns conceitos como: ângulo de inclinação da reta, taxa de variação, intervalo e par ordenado. No caso da taxa de variação foi feita uma tentativa de fazê-los associar à Física, assim como sugere Polya quando recomenda que o professor aconselhe o aluno a pensar em um problema correlato, mas não foi obtido sucesso.

Essas dificuldades foram contornadas durante o processo da aplicação. Foi possível perceber que os alunos se mostraram interessados em desenvolver o trabalho proposto e que, ao final da aplicação demonstraram satisfação em aprender novos conceitos.

É válido ressaltar que a utilização do *applet* foi de grande relevância, pois facilitou a conjectura e generalização dos conceitos vistos durante a realização das questões da sequência didática.

5. Resultados da Pesquisa

Diante dos resultados obtidos é possível afirmar que a proposta pedagógica sugerida mostra que é possível compreender o conceito de derivada por meio da análise das taxas de variação da função.

Espera-se que o trabalho aqui desenvolvido sinalize a importância de se incluir o estudo das ideias do Cálculo Diferencial na sala de aula do Ensino Médio, para que estas novas abordagens facilitem a aquisição de conceitos não só da Matemática, mas também da Física.

Acredita-se, ainda, que este trabalho poderá antecipar determinados tópicos do estudo de Cálculo presentes em alguns cursos de graduação.

6. Referências

ÁVILA, G. O ensino do Cálculo no Segundo Grau. **Revista do Professor de Matemática**, Rio de Janeiro, n.18, p.1-9, 1991.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN)**: Matemática. Brasília: MEC/SEF, 2000.

BRASIL. Secretaria de Educação Ensino Médio. **Parâmetros Curriculares Nacionais + Ensino Médio**: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC/SEF, 2002

ONUCHIC,L.R.; ALLEVATO,N.S.G. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de Matemática através da Resolução de Problemas. In: BICUDO,M.A.V.;

BORBA,M.C.(Org.). **Educação Matemática***:* pesquisa em movimento. 3. ed. São Paulo: Cortez, 2009, p. 213-231.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Tradução de Heitor Lisboa de Araújo. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.