Encontro Nacional de Educação Matemática
Educação Matemática: Retrospectivas e Perspectivas
Curitiba, PR - 18 a 21 de julho de 2013

UM ESTUDO TEÓRICO DE PROBLEMAS DA ESTRUTURA ADITIVA DE NÚMEROS RACIONAIS NA REPRESENTAÇÃO FRACIONÁRIA

Marli Schmitt Zanella
Universidade Estadual de Maringá - UEM
marlischmitt@hotmail.com

Rui Marcos de Oliveira Barros
Universidade Estadual de Maringá - UEM
professorrui@gmail.com

Idelmar André Zanella
Secretaria de Estado da Educação – SEED
andrezanel@yahoo.com.br

Resumo: O estudo teórico que apresentamos tem como fundamentação teórica a Teoria dos Campos Conceituais (TCC) de Gérard Vergnaud. Como objetivo, propomo-nos identificar elementos da TCC – Situações, Invariantes e Representações, mediante releitura do artigo *Learning fractions with understanding: building on informal knowledge, de Nancy Mack (1990).* Este trabalho apresentou atividades envolvendo as operações de adição e subtração de números racionais na representação fracionária. Para a estrutura aditiva foram identificadas situações problemas de composição de medidas. O principal teorema em ação mobilizado pelos estudantes na adição foi "somar numerador com numerador e, denominador com denominador". A identificação desses elementos da TCC, no campo conceitual aditivo poderá auxiliar professores na escolha de atividades para a formação e desenvolvimento dos conceitos envolvidos nessas estruturas de racionais na representação fracionária.

Palavras-chave: Teoria dos Campos Conceituais; Estruturas Aditivas; Números Racionais na Representação Fracionária.

1. Introdução

O estudo proposto versa acerca do ensino e da aprendizagem de números racionais em sua representação fracionária. A fundamentação teórica baseou-se nas proposições de

Gerard Vergnaud, inerentes a Teoria dos Campos Conceituais – TCC, a qual afirma que a construção de um conceito matemático ocorre mediante a constituição de uma terna de conjuntos, composta por situações, invariantes e representações.

O tema é relevante, pois a compreensão e a manipulação dos números racionais na representação fracionária, tanto na Matemática escolar como no uso cotidiano, faz-se necessário devido à representação de informações e/ou quantidades por razões, proporções, porcentagens e probabilidades.

No Brasil, o ensino de números racionais em sua representação fracionária ocorre já nos anos iniciais do Ensino Fundamental, em que geralmente é dada maior ênfase à compreensão da relação parte-todo na representação figural. Tal ensino é abordado com mais especificidade nos 6º e 7º anos do Ensino Fundamental, em que são privilegiadas as operações aritméticas dos racionais na representação fracionária.

No que diz respeito à resolução das operações aritméticas dos racionais na representação fracionária, pondera-se que os educandos possam não ter a compreensão do conceito, embora, utilizem termos fracionários corretamente e resolvam alguns exercícios coerentemente (NUNES; BRYANT, 1997).

O Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB, 2001) ressalta que o conceito de número racional na representação fracionária precisa ser explorado em situações problemas para proporcionar significado aos educandos.

Nunes e Bryant (1997) enfatizam que o aprendizado dos educandos poderá ser obtido com maior êxito quando explorados em situações problemas de naturezas distintas. Acreditamos que com as contribuições da TCC seja possível explorar situações problemas diversificadas, e em sucessão de níveis de generalidade para as operações de adição e de subtração de racionais na representação fracionária.

Vergnaud (2009b) e Magina et al. (2009) destacam a importância de se investigar, sob a ótica da TCC, as estruturas aditivas dos números racionais em sua representação fracionária, o que nos levou a proposta deste trabalho.

Nesta pesquisa, objetivamos investigamos por meio da pesquisa bibliográfica a presença de elementos da TCC – Situações, Invariantes e Representações, mediante releitura na pesquisa realizada por Mack (1990), em que realizou atividades com crianças, sobre as estruturas aditivas de números racionais em sua representação fracionária.

O processo de seleção do artigo

O material consultado constituiu-se de periódicos, na forma eletrônica e foi submetido ao Método de Leitura Científica, que segundo Cervo e Bervian (1996), obedece a passos sistematizados, a saber:

Visão sincrética – ocorre com a leitura de reconhecimento, que tem como objetivo localizar as fontes, numa aproximação preliminar sobre o tema e, a leitura seletiva, localizando as informações de acordo com os propósitos do estudo.

Visão analítica – que compreende a leitura crítica e reflexiva dos textos selecionados, na busca dos significados e das ideias principais.

Visão sintética – que constituiu a última etapa do Método de Leitura Científica, que é concretizada pela leitura interpretativa.

A abordagem por meio do Método de Leitura Científica possibilitou a construção do presente ensaio teórico que consistiu na exposição lógico-reflexiva, com ênfase na argumentação e interpretação pessoal, sob o embasamento teórico proposto pela TCC.

A pesquisa bibliográfica ocorreu por meio dos periódicos disponibilizados pelo Portal de Periódicos CAPES no período de novembro de 2011 a março de 2013, nos periódicos específicos da área de Avaliação da Educação classificados em nível A1. A escolha do artigo de Nancy Mack, intitulado “Learning fractions with understanding: building on informal knowledge”, publicado em 1990, no Journal for Research in Mathematics Education, volume 21, ocorreu por meio dos seguintes critérios:

- Tema de investigação: Números Racionais na representação fracionária;
- Publico alvo: alunos do Ensino Fundamental ou acadêmicos de Licenciatura em Matemática;
- Tipo de atividades realizadas na pesquisa: aquelas que realizaram atividades com as operações aritméticas (adição, subtração, multiplicação e divisão) de números racionais na representação fracionária.
- Tipo de pesquisa: aquelas que explicitaram o diálogo entre alunos, entre professor/pesquisador e alunos ou que apresentaram as expressões utilizadas durante o processo de resolução de um problema, isto é, a simbologia verbal, escrita, desenhos e diagramas que o aluno usou para representar as situações propostas nas atividades.

2. A Teoria dos Campos Conceituais

A Teoria dos Campos Conceituais – TCC foi proposta pelo psicólogo, pesquisador e professor Gérard Vergnaud. O autor afirma que esta não é uma teoria didática ao destacar que “por fornecer uma estrutura à aprendizagem, ela envolve a didática, embora não seja em si uma teoria didática” (VERGNAUD, 1993, p.1).

Nesse aspecto, podemos ressaltar que a TCC proporciona o estudo das ações dos alunos e as condições de produção, registro e comunicação durante situações de aprendizagem. Proporciona ao professor uma compreensão das ações do estudante, fornecendo subsídios para a organização dos conteúdos em sala de aula, de modo a privilegiar uma diversidade de situações[1] relacionadas ao mesmo conceito.

Para Vergnaud (1993, p.1) a TCC preocupa-se com a formação e o desenvolvimento de conceitos, visto que é “[...] uma teoria psicológica do conceito, ou melhor, da conceitualização do real, que permite situar e estudar as filiações e rupturas entre conhecimentos, do ponto de vista de seu conteúdo conceitual”.

A partir de reflexões sobre o ensino de ciências e matemática, mais especificamente sobre a TCC, Vergnaud (1993) destaca:

> A Teoria dos Campos Conceituais é uma teoria cognitivista, que busca propiciar uma estrutura coerente e alguns princípios básicos ao estudo do desenvolvimento e da aprendizagem das competências complexas, sobretudo as que dependem da ciência e da técnica (Ibid., p.1).

No caso específico da matemática, geralmente, após a percepção de propriedades, estruturas e possíveis padrões de comportamento caracterizam-se os objetos matemáticos mediante o uso de uma definição. No entanto, a apresentação de uma definição “esteriliza” o conceito de quase todas as ligações com os campos de aplicação e com as propriedades e padrões investigados.

Os conhecimentos que a criança adquire devem ser construídos por ela em relação direta com as operações que ela, a criança, é capaz de fazer sobre a realidade, com as relações que é capaz de discernir, de compor e de transformar, com os conceitos que ela progressivamente constrói (VERGNAUD, 2009b, p.15).

A TCC dedica-se aos estudos da formação do conceito pela criança em diferentes domínios do pensamento racional, o que possibilita ao professor estimular e valorizar esta atividade dos alunos, ainda mais, trata-se de um conhecimento sobre o conteúdo a ser ensinado e das relações desse conteúdo com as atividades que os educandos são capazes de

[1] Para a TCC a palavra situação tem o mesmo significado de atividades, não está relacionada com o termo “situações didáticas” utilizado por Brousseau.

realizar, o que nos possibilita compreender como estes aprendem os conceitos, em especial, os conceitos relacionados à Matemática.

Para Vergnaud (2009b) a formação e o desenvolvimento de um conhecimento conceitual devem emergir a partir de situações problemas que levem em consideração: a representação e o conceito e, os invariantes operatórios (conceitos e teoremas em ação) na situação problema.

Entretanto, o planejamento de situações problemas deve considerar o conhecimento prévio do aluno. De acordo com Magina et al. (2008, p.6) "a aquisição do conhecimento se dá, em geral, por meio de situações e problemas já conhecidos, tendo características locais. Consequentemente, todos os conceitos têm um domínio de validade restrito*"*. Neste caso, a restrição refere-se à experiência e ao desenvolvimento cognitivo do aluno.

3. Os Principais Elementos da TCC: Situação, Invariante e Representação.

Para estudar a formação e o desenvolvimento de um conceito durante a aprendizagem dos educandos. Vergnaud (1993) ressalta a importância de considerarmos o conceito formado por uma terna de conjuntos (*S, I, Y*)[2], a saber:

> *S* conjunto das situações que dão sentido ao conceito (referência). *I* conjunto dos invariantes em que se baseia a operacionalidade dos esquemas (significado). *Y* conjunto das formas de linguagem (ou não) que permitem representar simbolicamente o conceito, suas propriedades, as situações e os procedimentos de tratamento (significante) (Ibid., p.8).

As situações, os invariantes e as representações são conjuntos indissociáveis para a TCC. Para estudar o desenvolvimento e o funcionamento de um conceito durante os processos de ensino e aprendizagem é necessário considerar que estes três conjuntos ocorram simultaneamente nas práticas escolares. Entretanto, não podemos afirmar que há uma bijeção entre tais conjuntos, ou seja, não se pode reduzir o significado ao significante, nem às situações, e vice-versa.

Para a TCC o conjunto das situações está associado aos processos cognitivos e as respostas dos alunos quando confrontados com tais situações, que tem o mesmo sentido de atividades ou de tarefas, diferente da definição dada por Guy Brousseau, em que a

[2] Utilizamos neste trabalho a nomenclatura (S, I, Y) para representar a terna de conjuntos das situações – S, dos invariantes – I, e das representações – R. Ressaltamos que podem ocorrer variações desta representação na literatura, como encontrado em Magina (2008), na qual tem-se (S, I, R). Vergnaud (1996) também utiliza (S, I, s).

dimensão afetiva interfere tanto quanto a dimensão cognitiva. Vergnaud (1993, 1996) descreve duas ideias principais sobre as situações:

A de variedade: existe grande variedade de situações num campo conceitual dado; as variáveis de situação são um meio de construir sistematicamente o conjunto das classes possíveis; a da história: os conhecimentos dos alunos são elaborados por situações que eles enfrentam e dominaram progressivamente, sobretudo para as primeiras situações suscetíveis de dar sentido aos conceitos e procedimentos que se pretende ensinar-lhes (VERGNAUD, 1993, p. 11).

Divide-se em duas as classes de situações, sendo a primeira, aquelas em que o aluno possui competências necessárias ao tratamento das informações na situação dada em determinado momento de seu desenvolvimento cognitivo e, aquelas em que o estudante não dispõe das competências necessárias, e que necessita de tempo para reflexão e maturidade para resolvê-las (Ibid.).

Estas ideias apresentadas por Vergnaud formalizam o estreito laço entre a situação e o conceito, muito utilizado pela TCC, de modo que um conceito não assume o seu significado numa única classe de situações e que uma situação não se analisa por meio de um único conceito (BRUN, 1996).

Para uma classe de situações, o aluno tem várias decisões a tomar, e estas são também objeto de uma organização invariante. Magina et al. (2008) ressalta que o conjunto dos invariantes compreende os objetos, as propriedades e as relações que podem ser reconhecidas e usadas pelo sujeito para analisar e dominar as situações, e que expressam a compreensão do educando sobre o conceito, por isso os invariantes dão significado ao conceito.

Os invariantes, também chamados de invariantes operatórios, dividem-se em: proposição e função proposicional.

Invariantes do tipo proposição

Os invariantes do tipo proposição são aqueles que em um determinado domínio podem ser verdadeiros, mas em outro podem ser falsos. Tomemos por exemplo a seguinte afirmação: No conjunto dos números naturais a operação de multiplicação equivale a soma sucessiva de parcelas iguais, que sempre aumenta.

Esta afirmação que acabamos de apresentar é verdadeira no conjunto dos números naturais, entretanto, quando trabalhamos com outros conjuntos numéricos, por exemplo, o conjunto dos números inteiros ou o conjunto dos números racionais, verifica-se que o produto nem sempre aumenta, logo, a afirmação passa a ser falsa. É o caso de $4 \times \frac{1}{2} = 2$ ou $4 \times (-0{,}5) = -2$. Este exemplo é um invariante operatório, classificado como teorema em ação.

Os teoremas em ação são teoremas implícitos e têm validade local, ou seja, é verdadeiro apenas para um conjunto de situações. De maneira geral, este tipo de invariante é inconsciente, pois os alunos utilizam-no quando enfrentam situações problemas, sem muitas vezes saber falar sobre o que estão usando.

Vergnaud (1993) ressalta que os teoremas em ação são definidos como relações matemáticas consideradas pelos alunos quando escolhem uma operação, ou uma sequência de operações para resolver uma situação problema dada. Por isso estes teoremas podem ser considerados recursos para o professor analisar as estratégias dos alunos ao solucionarem uma situação problema e auxiliá-los na transformação do conhecimento implícito para o explícito.

Invariantes do tipo funções proposicionais

Os invariantes do tipo funções proposicionais são os conceitos em ação. Diferente dos invariantes proposicionais, as funções proposicionais são conceitos implícitos, que se assumem pertinentes na ação.

Considere a seguinte afirmação: “Na Geometria Euclidiana temos que dois pontos distintos determinam uma única reta”. O que acabamos de enunciar é sempre verdadeiro na Geometria Euclidiana. Na sequência temos uma função proposicional falsa. “Todos os meses do ano tem mais do que 29 dias”. Este invariante auxilia a construção das proposições.

Vergnaud (1993) esclarece que existe uma relação abrangente entre o primeiro e o segundo tipo de invariantes: “não há proposição sem funções proposicionais, nem função proposicional sem proposição. Do mesmo modo, conceitos em ação e teorema em ação se constroem em estreita relação” (Ibid., p.6). No entanto, existem diferenças entre os invariantes proposicionais e as funções proposicionais.

Considere uma função proposicional representada por $P(x)$. Entre as funções proposicionais existem funções com um argumento, que são as propriedades. Existem também funções com dois argumentos, que compõem as relações binárias $R_2(x, y)$, que ligam dois elementos entre si, como por exemplo, a relação “sete é maior do que cinco” ou “o caderno está sobre a mesa”.

As funções com três argumentos são as relações ternárias $R_3(a,b,c)$ que ligam três elementos entre si, e leis de composição binária, tais como “Pedro está entre André e Ana” ou “nove é cinco a mais do que quatro”. Considera também a existência de funções com quatro argumentos, que são as relações quaternárias $R_4(p,q,r,s)$ que ligam quatro elementos entre si (como na proporcionalidade), por exemplo, “o Carnaval é para o Brasil o que a Oktoberfest é para a Alemanha” ou “vinte e um está para catorze assim como três está para dois” (Id., 2009b).

Os invariantes operatórios, presentes nos esquemas, não são de um único tipo lógico, por isso devemos observar cada um dos tipos descritos anteriormente. O teorema em ação não é um verdadeiro teorema científico, tão pouco o conceito em ação é um conceito científico. Segundo Vergnaud (1993), pode-se discutir a veracidade ou não destes invariantes se o fizermos cientificamente e de forma explícita, pois podem, progressivamente, tornar-se verdadeiros conceitos e teoremas científicos:

Conceitos e teoremas explícitos constituem apenas a parte visível do *iceberg* da conceitualização: sem a parte escondida, constituída pelos invariantes operatórios, esta parte visível nada seria. Reciprocamente, só podemos falar dos invariantes operatórios integradas nos esquemas com o auxílio das categorias do conhecimento explícito: proposições, funções proposicionais, objectos-argumentos (Ibid., p.7).

Portanto, a ação operatória de um conceito deve ser analisada por meio de uma variedade de situações. A TCC valoriza os aspectos estruturais dos invariantes operatórios, analisando-os do ponto de vista dos próprios saberes constituídos. De acordo com Brun (1996, p. 23) a TCC procura dar um conteúdo matemático às organizações das condutas observáveis em situação. Com isto, podemos compreender a reciprocidade do processo de transformação das situações e dos conhecimentos em sua relação com os conceitos.

4. Adição e Subtração de Frações: Uma releitura segundo a ótica da TCC

O artigo selecionado é de autoria de Nancy Mack, intitulado “*Learning fractions with understanding: building on informal knowledge”*, publicado em 1990, no *Journal for Research in Mathematics Education*, volume 21.

Neste artigo a autora descreve a pesquisa realizada durante seis semanas com oito alunos que cursavam a 6ª série em uma escola na cidade de Madison, Wisconsin, EUA. O objetivo deste estudo foi examinar o desenvolvimento da compreensão dos alunos sobre os números racionais na representação fracionária a partir de duas perspectivas: (i) desenvolver o conhecimento informal dos estudantes sobre os números racionais na representação fracionária – nomeado simplesmente por frações pela autora e (ii) investigar as formas que os alunos são e não são capazes de construir o conhecimento informal para dar sentido a símbolos da fração e procedimentos. Os alunos trabalharam em grupos. A coleta de dados ocorreu por meio de registros orais transcritos de filmagens e de registros escritos realizados no decorrer do trabalho em sala de aula.

Resultados de pesquisas indicam que o conhecimento informal dos alunos sobre as frações devem ser analisados para auxiliá-los na compreensão do significado deste novo tipo de número, pois os principais tipos de erros cometidos pelos estudantes estão baseados no procedimento incorreto quando realizam operações aritméticas entre frações (BEHR et al., 1983; KERSLAKE, 1986; CARPENTER, 1988).

De acordo com Mack (1990) o conhecimento informal dos alunos refere-se à ação de juntar e separar conjuntos e estimar quantidades envolvendo frações. Além disso, Leinhardt (1988) afirma que os alunos podem realizar com êxito as operações aritméticas envolvendo frações, sempre que os problemas apresentados pertencem ao contexto de situações da vida real destes educandos.

A maioria das situações problemas foi apresentada verbalmente aos estudantes para favorecer a participação e encorajá-los a falar durante a resolução das atividades. Foram utilizados materiais concretos, por exemplo, tiras e círculos de papel.

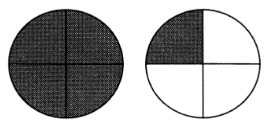
Durante as sessões de ensino a pesquisadora buscou privilegiar as atividades que:

- Representassem situações do mundo real, para aproximar a quantidade representada por materiais concretos;
- Utilizassem as respostas por estimativa para resolver adição e subtração entre frações;

No Quadro 01 elencamos situações, invariantes e representações em problemas da estrutura aditiva de racionais na representação fracionária que foram utilizados por Mack (1990) em sua pesquisa. Destacamos que os invariantes – teoremas e conceitos em ação – foram identificados a partir das respostas apresentadas pelos estudantes investigados por Mack.

Quadro 01 – Elementos da TCC para a Estrutura Aditiva.

Estrutura Aditiva de Números Racionais na Representação Fracionária	
Mack (1990)	**Elementos da TCC**

Atividade	Situação	Invariante	Representação
1A	**1ª categoria: Composição de medidas** Suponha que você tenha duas tortas de limão e você come 1/5 de uma das tortas, quanto da torta de limão sobrou?	**Conceito em ação** O aluno identifica que a pizza foi dividida em 5 partes iguais, $\frac{5}{5}-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$. Assim, tem $1+\frac{4}{5}$ de torta.	Linguagem escrita Representação $\frac{a}{b}$
2A	Suponha que você tenha duas pizzas do mesmo tamanho, e você deseja cortar uma das pizzas em seis pedaços iguais. A outra pizza você deseja cortar em oito pedaços iguais. Se você receber um pedaço de cada pizza, qual destes pedaços será maior?	**Conceito em ação** Quanto maior o número de divisões de uma pizza, menor será a área de cada uma de suas partes.	Linguagem escrita
		Teorema em ação $\frac{1}{8} > \frac{1}{6}$, pois $8 > 6$. Enumeração de naturais.	Linguagem escrita Representação $\frac{a}{b}$
3A	**1ª categoria: Composição de medidas**  Figure 1: Julie's picture to identify Quanto é a parte hachurada?	**Conceito em ação** Identifica a unidade dividida em 4 partes. Logo, representa 1 pizza inteira e $\frac{1}{4}$.	Representação pictórica Relacionou a figura à pizzas (linguagem do cotidiano).
		Teorema em ação Na adição entre frações somar numeradores e, somar denominadores. Compreende a unidade dividida em 8 partes.	Representação pictórica
4A	$4-\frac{7}{8}=?$	**Conceito em ação** $1=\frac{4}{4}=\frac{8}{8}$, desta forma: $\frac{8}{8}-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}$, mais 3 unidades inteiras: $3+\frac{1}{8}$	Linguagem escrita Representação $\frac{a}{b}$
		Teorema em ação $4-\frac{7}{8}=\frac{8}{8}-\frac{7}{8}=\frac{1}{8}$, Erro cometido: $4=\frac{4}{4}=\frac{8}{8}$	Linguagem escrita Representação $\frac{a}{b}$
5A	$4\frac{1}{8}-1\frac{5}{8}=?$	**Conceito em ação** Subtraiu os inteiros: $4-1=3$, e então, $\left(2\frac{8}{8}-\frac{5}{8}\right)+\left(\frac{1}{8}\right)=2\frac{4}{8}$.	Linguagem escrita Representação $\frac{a}{b}$
6A	$\frac{7}{8}+\frac{5}{6}=?$	**Teorema em ação** Somar numeradores e, somar denominadores (proveniente da adição de naturais).	Linguagem escrita Representação $\frac{a}{b}$
7A	**1ª categoria: Composição de medidas** Se você tivesse 3/8 de uma pizza e eu te desse mais 2/8 de uma pizza, quanto de pizza você teria?	**Conceito em ação** Interpretação parte-todo: unir as parcelas (numeradores) de um mesmo todo, indica que o estudante compreende a unidade dividida partes iguais.	Linguagem escrita Representação $\frac{a}{b}$

Fonte: Zanella (2013).

5. Considerações

A estrutura aditiva de números fracionários com mesmo denominador, normalmente, não apresenta complicadores para a compreensão dos alunos. A questão está em fazê-los entender que quando os denominadores são diferentes, as partes consideradas têm nomes diferentes, tais como meios, terços, quartos, dentre outras e, nesse caso, é necessário representar as frações em questão, em outras, equivalentes, ou seja, que apresentem o mesmo denominador. O próprio termo mostra sua função: o denominador denomina, dá nome às partes em que o inteiro foi dividido. (SILVA e ALMOULOUD, 2008).

Com relação aos invariantes operatórios detectados nas respostas dos alunos investigados por Mack (1990) é notório o principal teorema em ação mobilizado: “somar numerador com numerador e, denominador com denominador”. Kline comenta essa questão do seguinte modo:

> Quando usamos a adição de frações em situações reais, para somar $\frac{1}{2}$ com $\frac{1}{3}$, por exemplo, nós reduzimos ambas a sextos e então somamos $\frac{3}{6}$ com $\frac{2}{6}$ para obter $\frac{5}{6}$. Entretanto, quando multiplicamos frações, multiplicamos os numeradores e os denominadores de modo que $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Poderíamos somar frações somando os numeradores e os denominadores para obter $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{2}{5}$. Por que não usamos esse método? É mais simples, mas não se adapta às situações empíricas. Como outro exemplo, poderíamos considerar o produto de matrizes. O uso que se faz das matrizes requer que a multiplicação seja não comutativa, embora fosse possível definir uma multiplicação comutativa de matrizes. Uma vez que a multiplicação deve ser não comutativa, os fundamentos lógicos da teoria se ajustam a esse fato. Portanto, a lógica não dita o conteúdo da Matemática; o uso é que determina a estrutura lógica (KLINE, 1974, p.51).

À medida que se ampliam os campos numéricos e se estendem as operações para os novos conjuntos, os significados das operações aritméticas ganham sentido mais amplo e talvez, possamos dizer, mais algébrico.

Algumas noções associadas às operações com números naturais permanecem, enquanto outras, como por exemplo, a identificação da ideia de multiplicação com a de uma soma iterada, podem ser, progressivamente, superadas.

O ensaio teórico que fizemos nos indica que as questões que se colocam para o professor na sala de aula, como por exemplo, desenvolver as diferentes etapas do processo de expansão dos campos numéricos com os educandos, não se referem apenas às definições que apresentam os resultados das operações com a permanência de algumas propriedades ao novo campo numérico.

Ao contrário, referem-se, a uma compreensão das razões pelas quais as operações, com os novos números, devem ser efetuadas de certo modo e por que algumas propriedades permanecem válidas e outras não (MOREIRA e DAVID, 2004).

Na escola, as operações com os números racionais na representação fracionária e seus significados se constroem a partir da análise de uma diversidade de situações concretas (Vergnaud, 2009b). Desta forma, se torna necessário reconhecer, comparar com o caso dos naturais e estabelecer certas relações entre os números, retirando-se, como consequência dos significados e do uso, a validade das propriedades. Pois não é o significado dado a determinada situação que se ajusta às propriedades, mas o contrário, as propriedades se ajustam aos significados das operações.

As situações problemas identificadas no trabalho de Mack (1990) para a estrutura aditiva de números racionais na representação fracionária pertencem à 1ª categoria – composição de medidas. Isto nos mostra que as situações problemas, quando são trabalhadas com os alunos, favorecem apenas um tipo de raciocínio da estrutura aditiva, o de composição de medidas.

As situações que envolvem raciocínios da estrutura aditiva são trabalhadas, pelos indivíduos, desde os primeiros anos de escolarização, no entanto existe uma diversidade de contextos, dentro de uma mesma situação, que interferem no grau de complexidade do cálculo relacional envolvido, e isto não é utilizado na pesquisa de Mack (1990).

Por isso, faltam situações que contemplem o conjunto de situações que contemplam os diversos raciocínios envolvidos na estrutura aditiva, formado por composição: de medidas, de transformações e de relações, transformação: de medidas e de relações, e, comparação de relações.

Identificamos no trabalho de Mack (1990) que as principais representações utilizadas na forma fracionária são por meio de desenhos (representação pictórica – formato circular ou de pizza), em linguagem natural escrita e a representação $\frac{a}{b}$. Destacamos que quando os estudantes investigados por Mack (1990) foram confrontados com situações problemas que representaram ações da vida cotidiana, estes obtiveram êxito e conseguiram resolver adequadamente as atividades.

Com relação aos elementos da TCC que identificamos no trabalho de Mack (1990), destacamos que as situações, na perspectiva adotada por Vergnaud (1993), devem ser propostas em variedade e em diferentes níveis de generalidade, pois as operações de adição e subtração devem ser usadas com uma variedade de atividades modeladas de tal modo que os estudantes possam compreender a natureza do processo em que se relacionam aspectos do mundo real e as estruturas matemáticas.

> Na solução dos problemas da aritmética dita elementar, as crianças enfrentam muitas dificuldades conceituais. É, pois, em termos de esquemas que se deve analisar a escolha das boas operações e dos bons dados para resolver um problema em que existam várias possibilidades de opção. A tomada de informação na leitura do enunciado, a tomada de informações físicas (medidas, por exemplo), a busca de informações em documentos (livro escolar, quadros estatísticos, etc.), a combinação adequada destas informações para as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão, em geral obedecem a esquemas, sobretudo entre alunos que dominam tais situações (VERGNAUD, 1993, p.5).

A concepção moderna de ensino de Matemática não se afasta do "cálculo" a não ser para a ele melhor retornar, sob a forma do "cálculo relacional", o qual também está no centro da inteligência e do conhecimento (VERGNAUD, 2009b). Por trás de "3+5" há complexidades de raciocínios envolvidos e, com os racionais este trabalho também é importante, pois as situações dão sentido ao conceito.

Os teoremas em ação que identificamos nas respostas dos alunos investigados por Mack (1990) para a estrutura aditiva de racionais na representação fracionária são um caminho para analisarmos as estratégias intuitivas dos alunos e ajudá-los na transformação do conhecimento intuitivo para o conhecimento explícito.

Estes teoremas também nos encaminham para diagnosticar o conhecimento dos estudantes, o que sabem e o que ainda não sabem, de modo que possamos oferecer-lhes situações para a compreensão de determinados conceitos matemáticos.

6. Referências

BEHR, MERLYN.; LESH, RICHARD; POST, THOMAS R.; SILVER E. Rational Number Concepts. In: LESH, RICHARD; LANDAU, MARSHA (Eds). **Acquisition of Mathematics Concepts and Processes,** (p. 91- 125). New York: Academic Press, 1983.

BRUN, JEAN. **Didáctica das Matemáticas.** Tradução: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget – Horizontes Pedagógicos, 1996, p. 155-191.

CARPENTER, T. P. Teaching as problem solving. In: CHARLES, R. I.; SILVER, E. A. (Eds.). **The teaching and assessing of mathematical problem solving**. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, 1988. pp.187-202.

CERVO, AMADO LUIZ. BERVIAN, PEDRO ALCINO. **Metodologia científica.** São Paulo: Makron Books, 1996.

KERSLAKE, D. **Fractions: Children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project.** Windsor, Berkshire, England: NFER-NELSON, 1986.

KLINE, MORRIS. **Why Johnny can´t add: the failure of the new math**. New York: Random House, 1974.

LEINHARDT, G. **Getting to know: Tracing student's mathematical knowledge from intuition to competence.** Educational Psychologist, 23 (2). 1988. pp. 119-144.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. M. M.; GATIRANA, V.; NUNES, T.. **Repensando Adição e Subtração: Contribuições da Teoria dos Campos Conceituais.** 3ª edição. São Paulo: PROEM, 2008.

MAGINA, S.; CAMPOS, T. M. M.; NUNES,T., BRYANT, P. **Educação Matemática 1: Números e Operações Numéricas.** 2ª edição. São Paulo: Cortez, 2009.

MACK, NANCY K. Learning fractions with understanding: building on informal knowledge. **Journal for Research in Mathematics Education, v. 21**, n. 2, p. 16-32, 1990.

MOREIRA, PLÍNIO CAVALCANTE; DAVID, MANUELA M.S. **Números Racionais: Conhecimentos da Formação Inicial e Prática Docente na Escola Básica**. Boletim de Educação Matemática, Rio Claro, n. 21, p.1-19. 2004.

NUNES, TEREZINHA; BRYANT, PETER. **Crianças fazendo Matemática,** Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PAIS, LUIZ CARLOS. **Didática da Matemática: Uma Análise da Influência Francesa.** 2ª ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2008.

SAEB (2001) Relatório SAEB 2001 – Matemática. Sistema de Avaliação do Ensino Básico. Brasília INEP, MEC.

SILVA, MARIA JOSÉ FERREIRA. ALMOULOUD, SADDO AG. As Operações com Números Racionais e seus Significados a partir da Concepção Parte-todo**. In: Bolema**, v. 21, n. 31. Rio Claro – SP, dez. 2008.

VERGNAUD, GERARD. Teoria dos Campos Conceituais. In: **Anais do 1º Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro, 1993, UFRJ**. Rio de Janeiro: Projeto Fundão – Instituto de Matemática – UFRJ, 1993, p. 1-26.

VERGNAUD, GERARD. A Teoria dos Campos Conceptuais. In: BRUN, JEAN. **Didáctica das Matemáticas.** Tradução: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget – Horizontes Pedagógicos, 1996, p. 155-191.

VERGNAUD, GERARD. **A Criança, a Matemática e a Realidade: Problemas do Ensino da Matemática na Escolar Elementar**. Tradução de Maria Lucia Faria Moro; Revisão técnica Maria Tereza Carneiro Soares. Curitiba: Editora da UFPR, 2009b.

ZANELLA, MARLI SCHMITT. **Um estudo teórico sobre as estruturas aditivas e multiplicativas de números racionais em sua representação fracionária.** 2013. Dissertação. (Mestrado em Educação para a Ciência e a Matemática). Universidade Estadual de Maringá.