

## MOSAICOS, PAVIMENTAÇÕES DO PLANO E O ENSINO DA GEOMETRIA

*Dais Capucho Afini*  
Universidade Federal de Alfenas  
daisafini@gmail.com

*José Carlos de Souza Júnior*  
Universidade Federal de Alfenas  
jose.souza@unifal-mg.edu.br

### **Resumo:**

O presente artigo apresenta uma proposta diferenciada para o ensino de geometria aliado a história da matemática, através do trabalho com projetos, aulas contextualizadas, apelo ao desenvolvimento histórico e utilização de recursos computacionais no processo de ensino/aprendizagem. Tem como finalidade descrever as intervenções pedagógicas realizadas durante o projeto intitulado "Desvendando a Geometria: História e Aplicações", que foi desenvolvido pelo Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) em parceria com uma escola pública que atende alunos dos três anos do ensino médio. As intervenções pedagógicas foram planejadas para explorar a temática pavimentações do plano e construção de mosaicos por meio de textos, materiais manipuláveis e programas computacionais.

**Palavras-chave:** geometria; mosaicos; pavimentações do plano.

### **1. Introdução**

A Matemática atual é fruto de um longo processo evolutivo que acompanhou toda a história da humanidade e cuja origem centra-se nos conceitos de número, grandeza e forma. A busca da história de alguns conceitos proporcionam revelações que poderão facilitar a aprendizagem, pois é uma excelente ferramenta de recuperação dos processos pelos quais os conceitos matemáticos se formam e se desenvolvem. Além de desvendar de forma clara e concisa a vida de grandes mestres, apresentando-os desprovidos do véu da intocabilidade, mostrando seus anseios, suas angústias, fraquezas e descobertas. A atividade intelectual do aluno deve, tanto quanto possível, aproximar-se daquela desenvolvida pelos matemáticos, isto é, partir de um problema, colocar suas hipóteses, testar, corrigir e fazer generalizações.

Entretanto, a história da matemática não é abordada na sala de aula, quando muito se resume a uma página de apresentação no livro didático ou a uma nota de rodapé, muitas vezes a título de curiosidade ou pequenas biografias de matemáticos ilustres. Não há preocupação com a reconstrução do conhecimento, a dedução das fórmulas utilizadas na

resolução de diversos problemas e dificuldades, ou mesmo, as frustrações até a obtenção de métodos, técnicas e demonstrações válidas.

A Geometria se constituiu como a base da matemática e, assim como a história não tem sido abordada adequadamente no ensino básico de forma a desenvolver o pensamento espacial, estimular a intuição, percepção, leitura e representação do mundo e de conceitos matemáticos.

De acordo com Costa e Lima (2010), os professores de matemática não se arriscam a demonstrar determinados conceitos matemáticos em sala de aula devido, principalmente ao pouco conhecimento sobre o assunto ou por não encontrar nos livros didáticos referências sólidas, evitando adentrar em terreno desconhecido.

Dessa forma, o professor concentra sua atenção no ensino de álgebra e aritmética. Visto que, o tempo para cumprir toda a ementa do currículo escolar é curto e devido ao "apego" que os professores possuem ao livro didático a geometria acaba sendo esquecida no fim do livro. Segundo Barbosa (2003, p.18)

[...] a Geometria é a mais eficiente conexão didático-pedagógica que a Matemática possui: ela se interliga com a Aritmética e com a Álgebra porque os objetos e relações dela correspondem aos das outras; assim sendo, conceitos, propriedades e questões aritméticas ou algébricas podem ser clarificados pela Geometria, que realiza uma verdadeira tradução para o aprendiz.

O Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) atua em escolas públicas da cidade desde 2010 e tem como principal objetivo a docência compartilhada. Assim, professores em formação atuam em colaboração com professores do ensino básico. A experiência na escola revelou desmotivação dos estudantes em relação ao aprendizado dos conceitos matemáticos, anseio dos professores de matemática por novas formas de abordagem do conteúdo e despreparo dos mesmos para um ensino mais participativo dos estudantes na construção de conhecimentos geométricos com a utilização da história da matemática.

Por conseguinte, bolsistas de ID juntamente com os professores da escola sob a orientação do professor formador na Universidade, elaboraram o projeto "Desvendando a Geometria: História e Aplicações" para desenvolver atividades de intervenção almejando: estimular a leitura e interpretação de textos; aproximar os estudantes da história e do desenvolvimento de conceitos geométricos; incentivá-los a realizar pesquisas utilizando a rede mundial de computadores e instruí-los a planejar e construir experimentos

matemáticos, proporcionando aprendizagem e avanço no conhecimento de diversos tópicos de geometria.

O objetivo deste artigo é relatar a experiência do trabalho com projetos no ensino médio que aliou geometria e história da matemática no ensino de pavimentações do plano, usando como referência o conceito de ladrilhamento utilizado na arte dos mosaicos.

## **2. Projeto "Desvendando a Geometria: História e Aplicações" e o trabalho com mosaicos**

O projeto intitulado "Desvendando a Geometria: História e Aplicações" foi uma proposta para atender a carência que os alunos apresentavam em geometria e a demanda dos professores. O projeto teve duração de um semestre letivo, envolveu vinte e quatro turmas dos três anos do ensino médio, contabilizando aproximadamente 850 estudantes.

O projeto foi planejado para ser desenvolvido com doze temas, uma vez que atuam exatamente doze bolsistas na escola, ficando cada um responsável por um tema e por duas turmas. Foram realizados seis encontros em sala de aula destinados ao desenvolvimento de atividades relacionadas ao tema e mais seis encontros extra turno com duração de duas horas, objetivando esclarecer as dúvidas dos estudantes e auxiliá-los na pesquisa, escrita e confecção de materiais para a exposição aberta ao público dos trabalhos desenvolvidos ao longo do semestre.

Os dozes temas abordados no projeto foram os babilônicos e o desenvolvimento da trigonometria; os egípcios e o problema da medida; a construção das grandes pirâmides do Egito; o problema deliano - a duplicação do cubo; Pitagóricos - uma sociedade secreta; Teorema de Pitágoras; Arquimedes e a medida do círculo; Eratóstenes e o tamanho da Terra; o microscópio de Galileu; fractais - a geometria da natureza; geometria - contribuição de outros povos; mosaicos e vitrais árabes.

## **3. Metodologia**

O tema "mosaicos e vitrais árabes" foi desenvolvido em duas turmas do segundo ano do ensino médio com aproximadamente 37 alunos em cada turma. As turmas possuíam perfis e professores de matemática diferentes, sendo os alunos de uma sala mais comprometidos que os da outra.

As intervenções aconteceram uma vez a cada quinze dias com duração de uma hora-aula e foram planejadas para desenvolver os seguintes assuntos:

- 1º encontro: construção de mosaicos;
- 2º encontro: pavimentação regular do plano;
- 3º encontro: pavimentação quase regular do plano;
- 4º encontro: protoladrilhos de Roger Penrose, pavimentação periódica e aperiódica;
- 5º encontro: padrões geométricos de Escher;
- 6º encontro: apresentação por grupo dos trabalhos desenvolvidos durante o projeto.

Na semana em que não ocorria a intervenção, os encontros eram em horário extra turno e tinham como finalidade auxiliar os educandos na elaboração do trabalho escrito, o qual seria entregue ao fim do projeto. Este trabalho deveria conter introdução, desenvolvimento, conclusão e referências sobre o tema de pesquisa de cada grupo da sala. As duas turmas foram divididas em cinco grupos compostos por no máximo sete alunos, de acordo com os temas: construção de mosaicos, reprodução de mosaicos, história dos mosaicos, vitrais e protoladrilhos de Roger Penrose.

Em todos os encontros, os alunos receberam um texto com considerações a respeito da temática abordada durante a aula, a fim de introduzir o assunto a partir de uma leitura compartilhada. Além do texto, os bolsistas de ID também utilizaram programas computacionais como o GeoGebra<sup>1</sup> e o SuperLogo<sup>2</sup> com o intuito de facilitar a compreensão dos conceitos matemáticos por parte dos alunos.

O processo avaliativo dos aprendizes compreendeu uma avaliação inicial realizada no primeiro encontro, sobre os conhecimentos prévios dos educandos referentes a geometria e principalmente a respeito de pavimentações, que seria o foco dos encontros no decorrer do projeto. No segundo e terceiro encontro, foi entregue aos alunos uma ficha de acompanhamento, para o preenchimento no decorrer da aula, versando sobre algumas definições de polígonos, conjunto convexo, pavimentação regular e quase regular do plano

---

<sup>1</sup> O GeoGebra é um programa computacional de matemática dinâmica que disponibiliza ferramentas de geometria, álgebra e cálculo.

<sup>2</sup> O SuperLogo é um programa computacional que utiliza linguagem de programação para o estudo de geometria plana.

e soma de ângulos internos. No quarto encontro, a turma recebeu uma folha com quinze protoladrilhos de Roger Penrose, com o objetivo de construir pavimentações aperiódicas seguindo os arranjos de Roger Penrose. Para a avaliação final, os alunos entregaram um trabalho escrito abrangendo pesquisa e reflexões sobre o desenvolvimento do tema em estudo ao longo do projeto.

#### **4. Atividades desenvolvidas**

A arte dos mosaicos é praticada há muito tempo por civilizações mais antigas e está presente no cotidiano dos alunos em diferentes contextos, seja nas pavimentações de calçadas e pisos, peças de decorações, colmeias, objetos e janelas de algumas igrejas. Um tipo especial de mosaico é o vitral que se originou nos claustros árabes, tendo aparecido na Europa a partir do século VII. Pelo fato dos mosaicos estarem intimamente relacionados com o ensino de geometria, devido aos conceitos matemáticos intrínsecos em sua construção, esta temática foi desenvolvida com ênfase em pavimentações do plano.

No primeiro encontro, a leitura compartilhada do texto gerou discussões sobre alguns conceitos matemáticos como: polígonos regulares, soma de ângulos internos e ladrilhamento.

No segundo e terceiro encontro, os alunos começaram a estudar quais polígonos regulares ladrilhavam o plano. Para tal, foi utilizado o programa GeoGebra. Como o laboratório de informática da escola estava desativado os alunos não puderam manipular o programa, mas puderam observar e acompanhar as manipulações realizadas pelos bolsistas de ID através de um equipamento multimídia. Durante a observação, os alunos preencheram uma ficha de acompanhamento para registrar suas conclusões (figura 1a e 1b), sobre a possibilidade de ladrilhamento do plano por polígonos regulares, partindo do princípio que a medida do ângulo interno de um polígono regular precisa ser divisível por  $360^\circ$ , para que haja a pavimentação do plano como representado na figura 2a.

Segundo D'Ambrosio (2008), a tecnologia cria um ambiente de investigação que alia o lúdico, o visual e o dinâmico. Dessa maneira, os alunos transcendem a motivação extrínseca gerada pela escola e constroem um novo relacionamento com a matemática a partir da motivação pessoal.

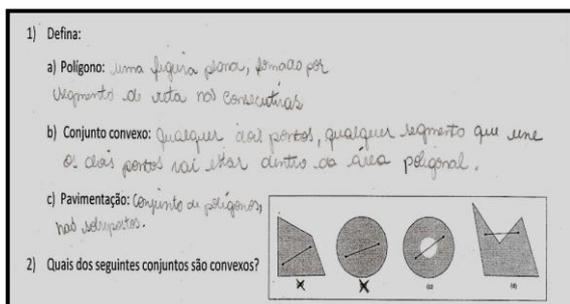


Figura 1a: Registro de um aluno definindo o que é polígono, conjunto convexo e pavimentação em sua ficha de acompanhamento da aula.

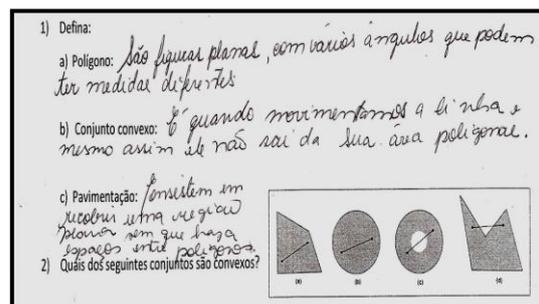


Figura 1b: Registro de um aluno definindo o que é polígono, conjunto convexo e pavimentação em sua ficha de acompanhamento da aula.

A determinação da soma dos ângulos internos de polígonos convexos foi feita a partir do número de diagonais do polígono. Como as diagonais que partem de um dos vértices do polígono o dividem em vários triângulos, conforme ilustrado na figura 2b, a soma dos ângulos internos do polígono pode ser obtida contando-se os triângulos e multiplicando este número pela soma dos ângulos internos de um triângulo. Assim, tem-se:  $Si = (n - 2) \cdot 180^\circ$ .

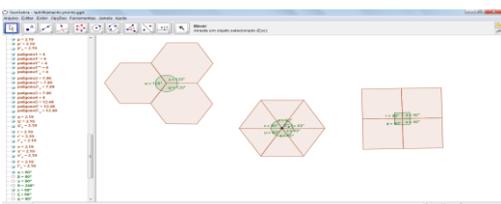


Figura 2a: Ladrilhamento com polígonos regulares de três, quatro e seis lados realizado no programa GeoGebra.

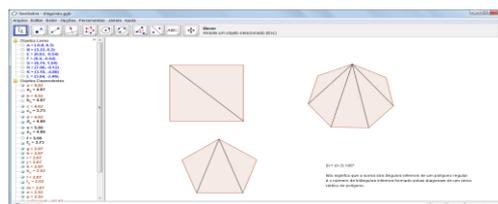


Figura 2b: Diagonais partindo de um único vértice dos polígono regulares com quatro, cinco e sete lados.

Dessa forma, os bolsistas de ID questionaram os alunos se não poderiam ocorrer pavimentações do plano com combinações de polígonos regulares. Alguns alunos responderam que não, porque acreditavam que a pavimentação com outros polígonos regulares deixaria lacunas no plano e outros afirmaram que sim. Segundo Alves (1999), para explicar que a pavimentação quase regular, com diferentes polígonos, é possível partimos da ideia de que para ladrilhar temos um número mínimo de três polígonos e que a soma dos ângulos internos destes deve ser igual a  $360^\circ$ . Assim:

$$\frac{(n_1 - 2) \cdot 180^\circ}{n_1} + \frac{(n_2 - 2) \cdot 180^\circ}{n_2} + \frac{(n_3 - 2) \cdot 180^\circ}{n_3} = 360^\circ$$

ou seja,

$$\left(1 - \frac{2}{n_1}\right) \cdot 180^\circ + \left(1 - \frac{2}{n_2}\right) \cdot 180^\circ + \left(1 - \frac{2}{n_3}\right) \cdot 180^\circ = 360^\circ$$

Fazendo as manipulações algébricas obtemos:

$$\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} = \frac{1}{2}$$

Sendo  $n_1$ ,  $n_2$  e  $n_3$  correspondente ao número de lados dos três polígonos.

Assim, basta utilizar a fórmula acima para saber quais polígonos podem ser combinados em uma pavimentação quase regular como representado na figura 3. Para pavimentações com mais de três polígonos basta somar inicialmente na expressão mais um polígono e realizar as manipulações algébricas de maneira análoga.

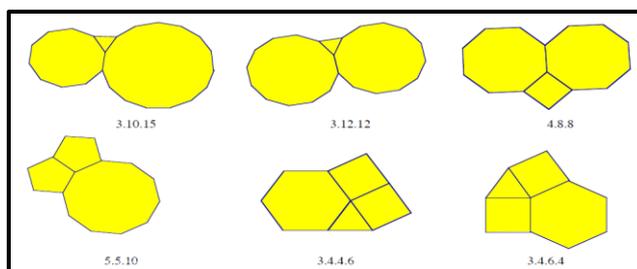


Figura 3: Pavimentações quase regulares com polígonos regulares de três, quatro, cinco, seis, oito, dez e doze lados.

No quarto encontro, foi abordado o conceito de pavimentações periódicas e aperiódicas, por meio dos trabalhos realizados pelo físico matemático Roger Penrose. As pavimentações periódicas ilustradas na figura 4a tem pelo menos duas translações não paralelas, assim é possível repetir um arranjo de peças. Já nas pavimentações aperiódicas, figura 4b, não é possível transladar um padrão da pavimentação sem alterar a pavimentação original. Nas pavimentações aperiódicas não existe repetição de nenhum grupo de peças.

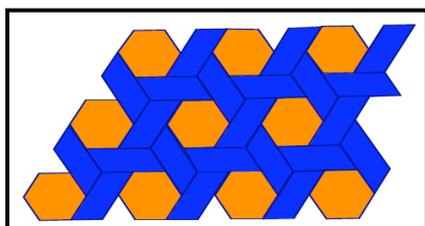


Figura 4a: Pavimentação periódica com a repetição de um arranjo de peças.

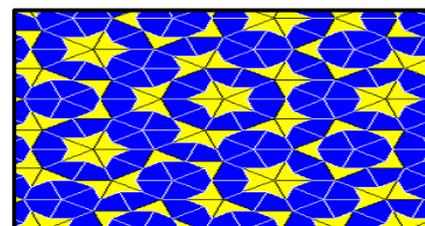


Figura 4b: Pavimentação aperiódica, na qual é impossível repetir um arranjo de peças.

Como o tempo era escasso, os estudantes não tiveram a oportunidade de desenhar os protoladrilhos de Roger Penrose com régua e compasso. Por isso, os alunos receberam uma folha com quinze protoladrilhos para pintura, recorte, colagem e construção das pavimentações aperiódicas como representado na figura 5.

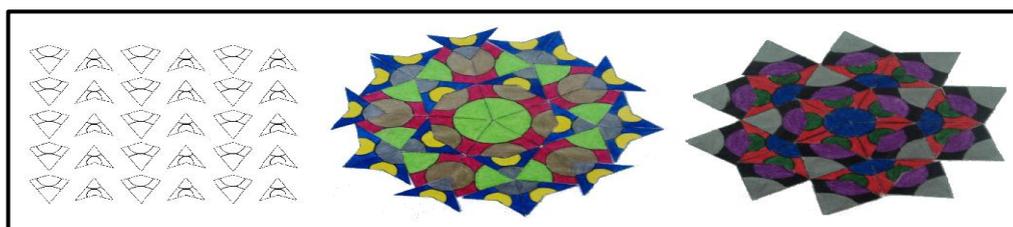
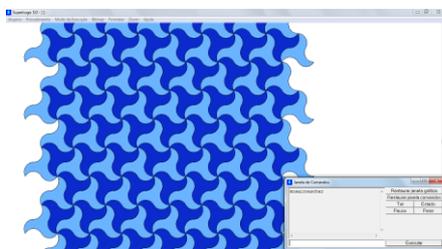


Figura 5: Folha entregue aos alunos com quinze protoladrilhos de Roger Penrose e pavimentações aperiódicas construídas pelos estudantes.

No quinto encontro, o tema da aula versava sobre os padrões geométricos para pavimentação do plano de Escher, baseado nos movimentos de translação, rotação, reflexão. Após a leitura compartilhada do texto os bolsistas de ID começaram a discutir o conceito de isometria a partir de uma apresentação multimídia, na qual os movimentos de translação, rotação, reflexão estavam definidos e representados através de imagens. Em seguida, foram apresentadas várias obras de Escher e discutidos os padrões geométricos presentes nas mesmas.

Como não foi possível a reprodução manual dos padrões geométricos de Escher, os bolsistas de ID programaram um algoritmo no programa SuperLogo para reproduzir uma pavimentação, ilustrada na figura 6, que também estava presente no texto entregue aos alunos.



*Figura 6: Pavimentação do plano realizada no programa computacional SuperLogo mostrando que é possível a partir de um triângulo criado por Escher pavimentar o plano sem deixar lacunas.*

No sexto e último encontro do projeto, os estudantes fariam uma apresentação dos trabalhos realizados ao longo do projeto, ou seja, cada grupo teria dez minutos para apresentar ao professor, bolsistas de ID e colegas de classe as pesquisas realizadas sobre o tema de estudo. Porém, isto não ocorreu, pois os alunos prolongaram, por conta própria, o recesso de um feriado e não compareceram às aulas.

## **5. Reflexões de uma professora em formação**

Durante os seis meses de projeto, os bolsistas de ID tiveram a oportunidade de planejar e ministrar aulas quinzenais que envolviam conhecimentos matemáticos de maneira descontraída e diferente da aula expositiva com giz e lousa, pois o tema mosaicos e vitrais árabes tem um leque enorme de possibilidades que podem ser exploradas junto aos alunos. Por conseguinte, cada aula era uma arte nova, uma beleza diferente conforme o artista estudado.

O tema mosaicos e vitrais árabes foi desenvolvido em duas turmas, com professores diferentes. O professor da sala mais comprometida, era supervisor do PIBID, já o da outra sala, não demonstrava tanto interesse pelo projeto, o que de certa forma interferia no desenvolvimento das aplicações. Devido a esta situação, os alunos desta turma eram pouco

frequentes nos dias de aplicações do projeto e raramente compareciam nos plantões. É importante neste momento, fazer um adendo sobre a pouca frequência dos alunos, pois devido as faltas os educandos perdiam a linha de raciocínio das aulas anteriores, o que dificultava o andamento das atividades.

Pela discussão gerada no primeiro encontro referente aos conceitos matemáticos de soma de ângulos internos, polígonos regulares e ladrilhamento, percebeu-se que a maioria dos alunos não dominavam estes conteúdos que deveriam estar consolidados no segundo ano do ensino médio.

Algo parecido também aconteceu no terceiro encontro, no qual os bolsistas de ID propuseram aos alunos o desafio de encontrarem uma combinação que satisfizesse a fórmula para ladrilhar com três polígonos diferentes. Infelizmente, nenhum aluno das duas turmas conseguiu solucionar o problema. Uma hipótese para tal insucesso, é o fato dos encontros ocorrerem a cada quinze dias, em uma aplicação de uma hora-aula, assim o conceito de ladrilhamento poderia ter sido esquecido.

No quarto encontro, os alunos ficaram muito interessados nas pavimentações de Roger Penrose e no processo de construção das pavimentações aperiódicas, perguntando se era possível recriar ou construir uma pavimentação aperiódica usando papel ou outro tipo de material manipulável. Alguns até pensaram na hipótese de que as imagens eram criadas com algoritmos computacionais.

No quinto encontro, os alunos foram apresentados ao programa SuperLogo e através de um equipamento multimídia puderam observar a construção de um mosaico de Escher. O trabalho com programas computacionais enriquecem a aula e prendem a atenção dos alunos, deixando-os mais motivados e interessados nos conceitos matemáticos implícitos nas atividades desenvolvidas.

Os plantões não atingiram o resultado esperado por ser em horário contraturno, pois os estudantes não compareciam para esclarecer eventuais dúvidas que poderiam surgir na elaboração dos trabalhos escritos. Estes trabalhos tinham como principal objetivo estimular a escrita de autoria e a utilização da internet como recurso de pesquisa para a leitura de artigos científicos. Os trabalhos escritos não alcançaram o objetivo proposto, pelo fato de serem cópias fiéis da internet. Dessa forma, percebemos que os professores da escola não exploravam em suas aulas a escrita de autoria e a pesquisa de referências bibliográficas para fundamentação teórica dos trabalhos escolares. Esta prática pedagógica de facilitação da vida escolar do aluno pode ocasionar prejuízos no desenvolvimento de

competências e habilidades de leitura e escrita que deveriam ser consolidadas ao longo da trajetória escolar do aluno.

Contudo, as intervenções em sala foram altamente significativas. Não tem nenhum valor que pague um aluno dizer na última aula do projeto: "Nossa mas já acabou, eu estava gostando tanto". Portanto, foi uma experiência única tanto para os bolsistas de ID quanto para os alunos.

O conhecimento de geometria contextualizado com o ensino de pavimentações do plano não se aprende do nada. É necessário se envolver com ele, se misturar nessa ciranda de cores, formas e estilos. E isso, os bolsistas de ID conseguiram levar para a sala de aula e também encontraram a motivação na maioria dos alunos para o aprender matemática. Na exposição final dos trabalhos, durante as apresentações dos alunos ao público presente, todos sabiam como construir um mosaico.

A exposição dos trabalhos contou com a participação dos alunos, professores, tanto de matemática quanto de outras disciplinas, pais e bolsistas do PIBID. Apesar de todos os percalços, os trabalhos foram bem elaborados, alguns continham demonstrações e muitos apresentavam objetos manipuláveis confeccionados com materiais acessíveis, de baixo custo e não prejudiciais ao meio ambiente.

## 6. Referências

BARBOSA, Paula Marcia. O estudo da geometria. *Revista Benjamin Constant*. Rio de Janeiro, n. 25, p. 14-22, 2003.

COSTA, Maria Aparecida; LIMA, Sônia Regina dos Reis. *Ensino de Prismas: uma análise a partir do livro didático*. 2010. 73f. Universidade Federal de Alfenas. Alfenas, 2010.

DALCIN, Mário; ALVES, Sérgio. Mosaicos no plano. *Revista do Professor de Matemática*. São Paulo: SBM, n. 40, p. 03-12, 1999.

D'AMBROSIO, Beatriz S. A Evolução da Resolução de Problemas no Currículo Matemático. In: *Anais Seminário Em Resolução De Problemas, I.*, (I SERP), 2008, Rio Claro. Rio Claro- SP: UNESP, 2008.

## 7. Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio financeiro da Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de Minas Gerais (FAPEMIG) e do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID), da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), Brasil.