DA GEOMETRIA DE EUCLIDES À GEOMETRIA EUCLIDIANA: A GÊNESE DAS GEOMETRIAS MODERNAS

Autor: Jose Carlos Cifuentes
UFPR
E-mail: jccifa@ufpr.br

Co autor: Alessandra Hendi dos Santos
UFPR
E-mail: ale_hendi@yahoo.com.br

Co autor: Luciane Chyczy
UFPR
E-mail: luciane.chyczy@yahoo.com.br

Resumo
Este minicurso, dirigido para professores de matemática de Ensino Básico em formação inicial ou continuada, visa discutir a evolução das noções da geometria plana desde sua versão axiomática, formulada por Euclides, até sua versão analítica iniciada no século XVII e consolidada no século XIX, analisando seu significado epistemológico e suas condições de visualização. Para tanto, explicitaremos o caráter construtivo-visual da geometria grega como estruturante essencial do método axiomático de Euclides, e sua posterior interpretação, na modernidade, através do conceito de transformação geométrica. Refletiremos também sobre os cinco postulados de Euclides, mais especificadamente o Postulado V, cujo questionamento propiciou longas discussões que fomentaram o aparecimento das geometrias não-euclidianas. A questão do procedimento euclidiano de superposição e suas leis, assim como sua interpretação analítica através do conceito de isometria, será também um dos temas de discussão desse estudo.

Palavras-chave: Geometria de Euclides; Geometria euclidiana; Geometria não-euclidiana.

1. Introdução

Euclides foi um matemático grego que viveu em Alexandria no século III a.C. Sua obra mais ilustre foi ‘Os Elementos’ (EUCLIDES, 2009), constituída por treze livros (capítulos), que sistematizaram conhecimentos de geometria, aritmética e álgebra adquiridos ao longo do tempo, desenvolvendo uma lógica da demonstração e da construção como parte estruturante do método chamado, a partir dele, de ‘axiomático’, que por sua relação peculiar com a verdade matemática é denominado também de ‘material’ ou ‘concreto’.

A versão grega da geometria que chamaremos ‘de Euclides’ é, do ponto de vista material ou concreto, o estudo do espaço “real” ou “natural”, pré-determinado ou *a priori*, em que a verdade dos fatos geométricos é estabelecida, nesse sistema axiomático, mediante: a) o confronto com essa realidade espacial, no caso dos postulados do sistema, o que os torna verdades “evidentes”, e b) no caso dos teoremas, por demonstração lógica e/ou construção geométrica, esta última permitindo uma “visualização/concretização”, nesse espaço, dos fatos que os teoremas expressam.

Os aspectos mais relevantes, em nossa avaliação, para uma compreensão da geometria que estamos chamando de Euclides (nos restringiremos à geometria plana) são os seguintes, todos identificáveis no Livro I d’Os Elementos (CIFUENTES, 2012):

1) A definição material dos objetos da geometria como ponto, reta, círculo, etc., e subsequente apelo a uma “realidade espacial” *a priori* para a geometria onde esses objetos se concretizam.
2) A forma construtiva de apresentação dos postulados e teoremas da geometria, e a legitimidade dos seus procedimentos no espírito de materialidade/concretude de sua axiomática, em consonância com a possibilidade de visualização.
3) O caráter “experimental” dos procedimentos euclidianos, especialmente o procedimento de superposição de figuras para estabelecer a igualdade ou congruência das mesmas.
4) A formulação das correspondentes leis a que devem se submeter as “movimentações” que a superposição exige, leis explicitadas nas chamadas ‘noções comuns’ ou ‘axiomas’. E, não menos importante:
5) A problemática deflagrada, do ponto de vista construtivo, pela aplicabilidade do procedimento euclidiano de prolongamento de retas nos Postulados II e V, este último chamado ‘postulado das paralelas’, que envolve a noção de ‘infinito’, em potência, no primeiro caso, e em ato no segundo, sendo a existência deste infinito em ato questionado pelo pensamento grego.

Por outro lado, a geometria que chamaremos de ‘euclidiana’ e, portanto, diferenciando-a da de Euclides, é a versão que começa a ser desenvolvida na modernidade a partir do advento da geometria analítica no século XVII, criando um espaço artificial, o plano cartesiano, onde os objetos geométricos adquirirão novos significados. Esse enfoque analítico da geometria se consolidará no século XIX com o desenvolvimento da teoria de grupos, especialmente dos grupos de transformações que, através do conceito moderno de 'isometria' permitirá um tratamento "mais rigoroso" e formal do processo de superposição euclidiano (LIMA, 2005). Esse tratamento analítico será tomado como modelo para as novas geometrias "planas" não-euclidianas, fornecendo para elas espaços de concretização, *a posteriori*, de seus objetos e procedimentos. Essas geometrias começaram a aparecer em forma axiomática na primeira metade do século XIX, para dar resposta ao problema das paralelas.

Neste minicurso, cujo público alvo são professores de Ensino Básico em formação inicial e continuada, busca-se, mais do que o estudo técnico da geometria, entender, através de uma discussão histórica e epistemológica de alguns dos tópicos esboçados acima, como se constrói o conhecimento geométrico numa abordagem moderna, pondo em relevo a gênese e historicidade dos seus objetos e das correspondentes teorias geométricas, assim como seus mecanismos teóricos de visualização.

2. A "euclidianidade" da geometria de Euclides: materialidade, construtibilidade e visualização

Este tópico tem como proposta discutir a "euclidianidade" da forma axiomática de apresentação da geometria por Euclides, isto é, seu caráter material e construtivo, e as técnicas de visualização decorrentes dessa abordagem. Para isso serão analisados alguns dos conceitos metodológicos dessa construção teórica como as definições, os postulados, os axiomas, os teoremas e os procedimentos de demonstração lógica e construtiva utilizados, assim como os instrumentos de construção e sua legitimidade, destacando algumas palavras chave que ilustram o método euclidiano como: 'traçar', 'prolongar', 'superpor', 'construir', entre outras (CIFUENTES, 2005).

A interpretação material de termos como 'ponto', 'reta', etc., é possível desde que se entenda a geometria de Euclides como sendo o estudo de uma "realidade espacial visível" dada *a priori*, onde esses objetos adquirem materialidade, ou substância, na denominação de Bachelard (2003). Mostrar-se-á que as técnicas de desenho com os instrumentos euclidianos régua e compasso, nas construções geométricas, foram indispensáveis para dar visualidade a essa materialidade, constituindo-se num método de raciocínio visual "legítimo" nas demonstrações, não sendo, então, apenas ferramentas de ilustração. Uma amostra desse apelo construtivo pode ser observada na demonstração de diversas proposições do livro I d'Os Elementos (EUCLIDES, 2009).

Atividades: 1) Definição euclidiana de ponto, reta, ângulo reto, retas perpendiculares e retas paralelas; 2) enunciado e discussão dos postulados I-V e seu caráter construtivo.

3. O processo euclidiano de superposição e suas leis: o caráter experimental da geometria de Euclides

Nesta seção discutiremos especialmente o processo euclidiano de superposição de figuras e as leis que o regem para o estabelecimento da ‘igualdade’ ou ‘congruência’. Esse procedimento torna a geometria de Euclides uma ciência “experimental”, pois supõe a possibilidade de movimentação de figuras na realidade espacial, que é seu referente. A palavra ‘igualdade' requer de certos critérios para sua “verificação” e mostraremos que as chamadas ‘noções comuns’ ou ‘axiomas’ (diferentes dos postulados) foram pensados para esse efeito. O processo de superposição, não sendo puramente lógico e sim intuitivo, traz diversos problemas epistemológicos que abordaremos, dentre eles a precedência do conteúdo no binômio conteúdo-forma, a não independência de geometria plana da espacial, a rigidez dos movimentos envolvidos na superposição, dentre outros.

Atividades: 1) Enunciado e interpretação dos axiomas ou noções comuns; 2) discussão da Proposição I-4 sobre o critério LAL de igualdade de triângulos salientando seu caráter experimental.

4. O infinito na geometria de Euclides e o problema das paralelas

O infinito faz seu ingresso na geometria de Euclides através dos postulados II e V, no primeiro caso na sua forma dita ‘em potência’, enquanto que no segundo na sua forma dita ‘em ato’. Essas duas formas de apresentação do infinito já foram discutidas antes por Aristóteles, incorporando-as no pensamento filosófico da época. Porém, sua existência, na discussão matemática, só foi aceita na sua forma em potência e não em ato como mostra a própria demonstração feita por Euclides da infinidade dos números primos.

O infinito em potência da reta geométrica é evidenciado no procedimento euclidiano de prolongamento de segmentos que é admitido no Postulado II. Contudo, analisando o processo de prolongamento no Postulado V, devemos reparar que se exige a sua conclusão ou término ao anunciar a existência do ponto de interseção de certos pares de retas quando “prolongadas suficientemente”.

Na axiomática de Euclides, a reta infinita em ato, envolvida no Postulado V, não é considerada por ser, a sua concepção, problemática do ponto de vista construtivo, pois sua "concretização" poderia envolver um número infinito de passos de prolongamento. A existência do limite do processo de prolongamento só existiria se o infinito de um tal processo for um infinito em ato, desta forma o postulado das paralelas pode ser qualificado como não evidente por ser não construtivo (CIFUENTES, 2005).

As dificuldades epistemológicas por trás do Postulado V abrem a possibilidade, então, de seu questionamento como uma verdade "evidente", o que dá início a um processo de discussão teórica que durou séculos até se concluir, no século XIX, com o advento das geometrias não-euclidianas que adotam algum tipo de negação desse postulado.

Atividades: 1) Prova da infinidade potencial dos números primos; 2) discussão dos postulados II e V e suas implicações epistemológicas; 3) apresentação de diversos equivalentes históricos do Postulado V; 4) discussão da Proposição I-31 que prova a existência de pelo menos uma paralela por um ponto fora de uma reta dada usando os postulados I-IV, e sobre a unicidade da mesma a partir do Postulado V.

5. A forma analítica da geometria euclidiana: o plano cartesiano

Antes do século XVII a ciência da geometria era a de Euclides, com seu enfoque axiomático baseado em demonstrações e construções. Na modernidade, a partir do século XVII, a geometria segue dois caminhos paralelos, ainda o axiomático, incorporando novos conceitos, por exemplo, os de perspectiva que já os artistas vinham utilizando, e o analítico, desenvolvido primeiro por Descartes (1596-1650) e Fermat (1601-1665) que incorporam o uso de coordenadas, transformando assim a intuição geométrica do espaço físico numa intuição numérica de um espaço matemático "artificial": o plano cartesiano.

O que a intuição geométrica, entendida como forma de acesso ao espaço físico da geometria de Euclides, permitia, agora é deixado aos números reais, isto é, qualquer propriedade geométrica deve decorrer das propriedades dos números reais, ou da intuição sobre eles, e não mais da intuição espacial. Associar números a segmentos de reta como sendo sua medida é muito antigo, e isso permitiu a Descartes, no séc. XVII, definir o que se chama a 'reta numérica', que é a base do sistema de coordenadas da geometria analítica.

Hoje o plano cartesiano é definido pelo conjunto : $\mathbb{R}^2 = \{(x, y)/x, y \in \mathbb{R}\}$. Na geometria analítica, substitui-se, então, o plano "real" da geometria de Euclides pelo plano cartesiano.

GEOMETRIA DE EUCLIDES	GEOMETRIA ANALÍTICA
Plano euclidiano	Plano cartesiano
Ponto geométrico	Par ordenado
Reta geométrica	Equação da reta
Outros objetos geométricos	Novos significados

Atividades: 1) Definição cartesiana de ponto, reta e círculo e sua justificativa; 2) verificação dos postulados euclidianos no plano cartesiano.

6. As isometrias euclidianas e os grupos de transformações

Os enfoques axiomático e analítico da geometria atingem seu ápice no século XIX com o advento das geometrias não-euclidianas, no primeiro caso, e com o desenvolvimento da teoria de grupos e da álgebra linear, no segundo.

Na primeira metade do século XIX, o método axiomático é reformulado tornando-se mais formal, menos material, sendo que esta reformulação já aparece na constituição das geometrias não-euclidianas e de outras versões modernas da mesma geometria euclidiana, como a realizada por Hilbert nos seus "Fundamentos da Geometria" de 1899 (HILBERT, 2003).

Consolida-se, também, a separação teórica entre conteúdo e forma promovida pelo racionalismo cartesiano. No caso das novas geometrias, a forma precede o conteúdo e o espaço de interpretação dessas geometrias será dado, ou melhor, construído, *a posteriori* e de forma analítica.

A grande contribuição da teoria de grupos para a geometria euclidiana (e também para as outras) é através do conceito de 'transformação geométrica' (como uma função bijetiva do plano no plano) e de 'grupo de transformações'. Nesse contexto é de destaque o grupo das 'isometrias' do plano, que traduz em forma analítica, os movimentos do plano envolvidos no processo de superposição, eliminando assim o caráter experimental da geometria de Euclides. Esse grupo estuda, em forma "mais precisa", os movimentos tradicionais de translação, rotação e reflexão, chamados de 'movimentos rígidos' (LIMA, 2005).

Cabe destacar que o conceito de ‘isometria’ depende explicitamente, no caso euclidiano, da distância ou métrica pitagórica, baseada no teorema de Pitágoras que é demonstrado no final do livro I d’Os Elementos como consequência do Postulado V.

Atividades: 1) Definição dos movimentos rígidos como transformações isométricas do plano; 2) definição da congruência de figuras usando o conceito de isometria.

7. Uma introdução às geometrias não-euclidianas

Diante as tentativas de provar o Postulado V a partir dos primeiros quatro postulados, considerados mais evidentes, uma nova geometria surge com a negação desse postulado e sua aceitação como “verdade” dessa nova geometria, por Lobachevsky (1792-1856), Gauss (1777-1855) e Bolyai (1802-1860) na primeira metade do século XIX dando origem a uma das chamadas ‘geometrias não-euclidianas’, a que posteriormente foi denominada de ‘geometria hiperbólica’ por Felix Klein (ZIEGLER, 2008; BARBOSA, 2011).

Por sinal, Euclides já tinha provado a existência de uma paralela por um ponto fora de uma reta dada a partir dos primeiros quatro postulados; garantir a unicidade é que requer do Postulado V. Negar essa unicidade exige considerar a existência de mais de uma paralela, que é a origem da geometria hiperbólica. Essa geometria não pode ser representada num “espaço real”, como no caso euclidiano, resultando na necessidade de se criar um “espaço artificial” para a constatação de suas verdades. Nesse espaço artificial também podem ser definidas as transformações geométricas correspondentes, além de uma adequada noção de ‘isometria’ para o estudo dos movimentos permitidos.

Assim como o plano cartesiano é um modelo analítico da geometria euclidiana plana, os “planos” de Beltrami, de Klein, e de Poincaré entre outros, são os modelos analíticos para a geometria hiperbólica. Esses modelos têm como função justamente propiciar a visualização das verdades dessa geometria e, mais do que isso, dar suporte epistemológico ao próprio conceito de ‘verdade’ das suas proposições.

Atividades: 1) Visualização dos postulados da geometria hiperbólica nos seus modelos; 2) discussão do critério AAA de congruência de triângulos na geometria hiperbólica.

8. Considerações Finais

Este minicurso visa salientar, tomando como exemplo a geometria euclidiana, dois aspectos da gênese da matemática moderna: a historicidade dos conceitos e teorias matemáticos, e o permanente recurso à visualização desses conceitos renovando o papel da intuição matemática.

A historicidade e a visualização deslumbram a geometria euclidiana no percurso de sua evolução, estimulando a reflexão em torno de novos problemas e novas descobertas que possibilitaram a modernização das velhas geometrias e o aparecimento das novas. Um exemplo de destaque, apresentado neste minicurso, é o desenvolvimento moderno das transformações geométricas e das isometrias (euclidianas e não-euclidianas) em cuja historicidade está o procedimento euclidiano de superposição e suas leis.

9. Referências

BACHELARD, G. **A Formação do Espírito Científico**. Rio de Janeiro: Contraponto, 2003.

CAMERLENGO de BARBOSA, L.N.S. **Uma Reconstrução Histórico-Filosófica do Surgimento das Geometrias Não Euclidianas**. 68 fs. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática) UEL, 2011. Site: www.uel.br/pos/mecem/arquivos/resumo_abstract/2011/dissertacoes/dissertacao_linlya.pdf.

CIFUENTES, J.C. *Uma Via Estética de Aceso ao Conhecimento Matemático*. Boletim do GEPEM, vol. 46, p. 55-72. Rio de Janeiro: USU, 2005.

CIFUENTES, J.C. *Pressupostos Filosóficos da Matemática Moderna*. In: 2ª Semana Acadêmica da Licenciatura em Matemática. Curitiba: UTFPR, 2012. Site: www.utfpr.edu.br/curitiba/estrutura-universitaria/diretorias/dirgrad/departamentos/matematica/licenciatura/eventos/cifuentes.pdf.

EUCLIDES. **Os Elementos**. Trad. Irineu Bicudo. São Paulo: Ed. UNESP, 2009.

LIMA, E. **Coordenadas no Plano**. 5ª Edic. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

HILBERT, D. **Fundamentos da Geometria**. Cood. A. J. Franco de Oliveira. Lisboa: Gradiva, 2003.

PIAGET, J; GARCIA, R. **Psicogênese e História das Ciências**. Petrópolis: Ed. Vozes, 2011.

ZIEGLER, J.R. **Geometria Euclidiana Plana e Geometria Hiperbólica**: Comparação de Conceitos e Propriedades. 42 fs. Monografia (Licenciatura em Matemática) UNIFRA, 2008. Site: www.unifra.br/cursos/matematica/downloads/Janaina%20de%20Ramos%20Ziegler.pdf.pdf.