

GEOMETRIA FRACTAL COMO UM TEMA GERADOR

Alexsandra Camara
Colégio Marista Santa Maria
alcamara@marista.org.br

Isabel Cristina Macedo
Colégio Marista Santa Maria
imacedo@marista.org.br

Resumo

Segundo pesquisas realizadas, a utilização de fractais na escola auxilia no estabelecimento de conexões com outras ciências, estimula a curiosidade, auxilia no desenvolvimento da visualização de padrões e da sua representação simbólica; além de oferecer situações que promovem o relacionamento dos campos da álgebra, da aritmética e da geometria. Em função dessas necessidades, elaboramos uma sequência didática para alunos do 8º ano do Ensino Fundamental cujos principais objetivos foram: a construção de figuras geométricas com a utilização de material geométrico e o relacionamento dos pensamentos algébrico e numérico na compreensão dos conceitos envolvidos nos conteúdos de álgebra. As atividades desenvolvidas puderam proporcionar aos alunos um estudo diferenciado do convencional da matemática, tornando o seu ensino mais significativo para o aluno: auxiliando na compreensão de conceitos geométricos e em uma significativa relação entre os pensamentos numérico e algébrico.

Palavras-chave: geometria dos fractais, campo numérico e campo algébrico.

1. Introdução

A Matemática desenvolvida ao longo da história da humanidade está vinculada à interpretação do real e também ao próprio desenvolvimento do espírito humano, é produto das ideias e contribuições de várias pessoas que trabalharam nesta área. Devemos ver a Matemática como uma ciência em constante evolução, e ligada ao real e ao abstrato.

Porém, apesar de seu caráter abstrato, muitos conceitos e resultados da matemática têm origem no mundo real e apresentam aplicações em outras áreas do conhecimento.

Segundo Brasil (2006) o estudo da Geometria, além de outros objetivos, deve possibilitar aos alunos o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas práticos reais e representar as diferentes figuras planas e espaciais, presentes na natureza ou imaginadas. Sendo assim, o papel da Matemática no ensino deve estar relacionado aos objetivos que possam fazer com que o aluno a perceba como um instrumento de compreensão do mundo a sua volta, como um corpo de conhecimentos que desenvolvem o espírito de investigação e a capacidade para resolver problemas. A Geometria ensinada na escola deveria ter como objetivo principal o desenvolvimento da atividade intelectual do aluno. No entanto, o que percebemos é a utilização de regras prontas, acabadas, exigindo do aluno somente a memorização de regras, algoritmos e definições.

Podemos dizer que a Matemática procura apresentar nossa percepção da natureza onde a Geometria Euclidiana nos oferece uma primeira aproximação para análise de seus objetos, segundo Mandelbrot (1989) muitos padrões na natureza exibem irregularidades e complexidades que não podem ser adequadamente descritas com essa geometria. Para essas situações foram criadas outras “geometrias”, em especial a Geometria dos Fractais, que procura analisar objetos de extrema complexidade e é um convite, no mínimo interessante, a olhar a natureza sob outra perspectiva.

A utilização de fractais na escola auxilia no estabelecimento de conexões com outras ciências, mostra deficiências da Geometria Euclidiana, explora o desenvolvimento do senso estético, estimula a curiosidade em função das situações inesperadas que pode proporcionar, além do desenvolvimento da visualização de padrões e sua representação simbólica. A análise de situações deste tipo relaciona os campos da álgebra, da aritmética e da geometria em um processo de interação e dependência intrigante. Segundo Carvalho (2005) e Sallum (2005) a utilização da Geometria Fractal no ensino pode proporcionar aos alunos uma relação mais forte entre os saberes do cotidiano e o escolar, além de proporcionar uma visão dinâmica da Matemática como uma ciência que avança, e não como um corpo de conhecimentos prontos e acabados.

O fato de sermos professoras de Matemática nos ensinamentos fundamental e médio, questionamo-nos, inúmeras vezes, quanto aos conteúdos ensinados. A preocupação de o porquê ensiná-los, como ensiná-los e de como poderiam ser modificados, sempre levou-nos a trabalhar com metodologias e currículos não tradicionais. Esse questionamento

também está relacionado com a forma com que os alunos e a sociedade se relacionam com este conhecimento: os alunos não estabelecem nenhuma relação dos conhecimentos de Matemática com suas vidas devido, possivelmente, entre outros fatores, à descontextualização e à fragmentação, tão presentes no ensino da matemática.

Segundo Brasil (1997, 2006) a Matemática comporta um amplo campo de relações, regularidades e coerências que despertam a curiosidade e instigam a capacidade de generalizar, projetar, prever e abstrair, favorecendo a estruturação do pensamento e o desenvolvimento do raciocínio lógico. Nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio (2006), com relação ao estudo da geometria, destacam que “ O trabalho de representar as diferentes figuras planas e espaciais, presentes na natureza ou imaginadas, deve ser aprofundado e sistematizado nesta etapa de escolarização. ”

Nas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN +, no desenvolvimento do tema geometria, são apresentadas várias sugestões de práticas educativas com relação ao ensino de geometria, focando em nosso tema de pesquisa, nos diz que:

“...é importante destacar que este tema estruturador pode desenvolver no aluno todas as habilidades relativas a medidas e grandezas, mas pode fazê-lo também avançar na percepção do processo histórico de construção do conhecimento matemático, e é especialmente adequado para mostrar diferentes modelos explicativos do espaço e suas formas numa visão sistematizada da Geometria com linguagens e raciocínios diferentes daqueles aprendidos no ensino fundamental com a geometria clássica euclidiana.”
(BRASIL, 2002, p.125)

Ao analisarmos as Diretrizes Curriculares da Educação Básica Matemática do Estado do Paraná (DCE) verificamos que o tema de Geometria se apresenta nos seguintes grupos: geometria plana, geometria espacial, geometria analítica e noções básicas de geometria não-euclidiana. Com relação aos conteúdos de geometria não-euclidiana, no ensino fundamental, são apresentados os seguintes itens: geometria projetiva (pontos de fuga e linhas do horizonte); geometria topológica (conceitos de interior, exterior, fronteira, vizinhança, conexidade, curvas e conjuntos abertos e fechados) e noções de geometria dos fractais. No Ensino Médio, as DCE destacam que:

“... aprofundam-se os estudos das noções de geometrias não-euclidianas ao abordar a geometria dos fractais, geometria projetiva, geometria hiperbólica e elíptica. Na geometria dos fractais, pode-se explorar: o floco de neve e a curva de Koch; triângulo e tapete de Sierpinski, conduzindo o aluno a refletir e observar o senso estético presente nessas entidades geométricas, estendendo para as suas propriedades, através da “regularidade harmoniosa nas suas próprias irregularidades”” (PARANÀ, 2008, p.57)

Verificamos, na análise das DCE, que há uma sugestão explícita sobre a introdução da geometria dos fractais nos ensinamentos fundamental e médio. O aluno deve ter um conhecimento amplo da geometria, não se limitando apenas a Geometria Euclidiana, mas também, aos conhecimentos da Geometria Não- Euclidiana. Com base nas pesquisas realizadas elaboramos de uma sequência didática para alunos do 8º ano do Ensino Fundamental cujos principais objetivos foram:

- construir figuras geométricas com a utilização de material geométrico;
- relacionar os pensamentos algébrico e numérico na compreensão dos conteúdos algébricos do 8ª ano.

A seguir apresentamos, resumidamente, algumas das atividades realizadas.

2 - Descrição das atividades

Neste item iremos apresentar algumas ideias que foram trabalhadas em nossa sequência de ensino. A sequência foi dividida em três etapas. Na primeira oferecemos um vídeo e atividades de pesquisa com o objetivo de fazer com que os alunos se familiarizassem com o tema e que também se sentissem motivados ao seu estudo. Na segunda parte foram trabalhadas situações de construções de alguns fractais geométricos. Nas últimas atividades trabalhamos com situações de análise numérica relacionadas com uma análise algébrica, devido as características de situações ilimitadas que as figuras apresentam.

2.1 Pesquisa

Para que uma aprendizagem significativa possa acontecer, é necessário investir em ações que potencializem a disponibilidade do aluno para a aprendizagem, o que se traduz, por exemplo, no empenho em estabelecer relações entre seus conhecimentos prévios sobre um assunto e o que está aprendendo sobre ele. (PCN, 1998). Nesse sentido trabalhamos com duas situações: a primeira foi a apresentação de um vídeo sobre algumas ideias do que

seria um fractal com posterior discussão em sala de aula e, a segunda foi a realização de uma pesquisa em que os alunos tinham que escrever sobre um fractal geométrico e um exemplo na natureza.



Realização da atividade de pesquisa bibliográfica

2.2 Construção Geométrica

Segundo proposta do (PCN, 1998) o trabalho com noções geométricas contribui para a aprendizagem de números e medidas, pois estimula o aluno a observar, perceber semelhanças e diferenças e identificar regularidades. O trabalho com espaço e forma pressupõe que o professor de Matemática explore situações em que sejam necessárias algumas construções geométricas com régua e compasso, como visualização e aplicação de propriedades das figuras, além das construções de outras relações.

Nesta fase da sequência didática solicitamos que os alunos construíssem algumas etapas dos fractais Triângulos de Sierpinsky e Tapete de Sierpinsky.



Realização da atividade de construção geométrica

Os alunos receberam uma folha de atividade que continha instruções do trabalho que deveriam realizar, porém as professoras explicaram os passos para que todos pudessem acompanhar da melhor maneira possível.

Um dos objetivos dessa atividade era de, ao fazerem a construção seguindo os passos das instruções, os alunos pudessem entender o processo inicial da construção de um fractal. Conforme foram construindo as figuras, alguns alunos perceberam as propriedades

de auto-semelhança e da complexidade infinita. Outro objetivo foi o desenvolvimento de situações que pudessem promover discussões sobre vários conceitos geométricos como paralelismo, perpendicularismo e ponto médio.

1.3 Atividade de Álgebra

Observamos, no ensino atual que, muitas vezes, o ensino de álgebra se resume em estudo de técnicas, tendo como base num método tradicionalista e não situações de investigação e de reflexão em sala de aula. Segundo Lins e Gimenes (1997) esta prática é muito comum, porque os professores não estão preparados para lidar com este assunto e simplesmente seguem os livros que lhe oferecem, não conhecendo alternativas para tratar do ensino da álgebra.

Os PCNs (1998), afirmam que o ensino da álgebra é um espaço bastante significativo para que o aluno desenvolva e exercite sua capacidade de abstração e generalização, além de possibilitar a aquisição de uma poderosa ferramenta para resolver problemas. Também ressaltam que, para garantir o desenvolvimento do pensamento algébrico, o aluno deve estar necessariamente, engajado em atividades que relacionem as diferentes concepções da Álgebra e, além disso, o enfoque a partir da observação, da regularidade de ocorrência dos fenômenos e de generalização.

Atualmente aritmética e álgebra, no ensino fundamental, são ensinadas separadamente. Nas séries iniciais é ensinada somente a aritmética e apesar de saber que para o desenvolvimento do pensamento aritmético se trabalha intuitivamente noções de álgebra, o ensino dessa última, em geral, é efetivado somente nas séries finais do ensino fundamental.

Para Lins e Gimenez, na comunidade da Educação Matemática, há poucas noções tão enraizadas como a de que aprender aritmética deve vir antes do aprendizado da álgebra. Para esses autores, é impossível não concordar que a ideia de ensinar primeiro a aritmética e depois a álgebra seja infundada e prejudicial para a aprendizagem do aluno. Porém, não se pode cometer o equívoco de pensar que a álgebra deve vir antes da aritmética. As crianças já chegam à escola com um conjunto de experiências aritméticas, cabe ao professor buscar a coexistência entre a formação do pensamento aritmético com o algébrico, trabalhando a partir da premissa que um implica o desenvolvimento do outro.

A álgebra, quando desenvolvida pelo modo tradicional, põe em questão técnicas de cálculo; deixa-se de lado o desenvolvimento do sentido numérico. Dessa forma a álgebra perde sua importância como ferramenta útil para a resolução de problemas, as crianças perdem a oportunidade de refletir sobre fatos genéricos apresentados em situações onde também a lógica das operações é desenvolvida.

“A educação aritmética tem sido, até aqui, insuficiente em termos de seu alcance, ao passo que a educação algébrica tem sido insuficiente em termos de objetivos. Enquanto a educação aritmética precisa ampliar o conjunto de habilidades e atividades que considera – com vistas sempre no desenvolvimento do sentido numérico como nós o descrevemos –, a educação algébrica precisa passar a considerar também o fato de que qualquer aspecto técnico só pode se desenvolver se, ao modo de produção de significado que o sustenta – e, portanto, à lógica das operações subjacente –, o aluno confere legitimidade. Em ambos os casos, o da aritmética e o da álgebra, a mudança de perspectiva mais importante refere-se a passarmos a pensar em termos de significados sendo produzidos no interior de atividades, e não, como até aqui, pensarmos em termos de técnicas ou conteúdos” (Lins e Gimenez, 1997, p. 160).

Fica claro que não se deve centrar as discussões em decidir se precisam e quando devem ser vistos determinados algoritmos; é no momento da atividade que se observará sua importância e os significados que eles desenvolvem como ferramenta ou objeto. Fica então a proposta dos autores de se desenvolver o senso numérico e a produção de significados algébricos e não aprendizagem de álgebra. O ensino deve ser capaz de desenvolver habilidades e competências de resolver e interpretar problemas, investigando e explorando situações, produzindo diferentes modos de pensar.

Diante deste quadro, procuramos desenvolver atividades que relacionassem a aritmética com a álgebra, procurando desenvolver o senso numérico e algumas ideias algébricas em atividades de aplicações sobre a geometria de fractais.

Após a realização da construção geométrica do triângulo de Sierpinski foi realizada a atividade sobre este fractal com o objetivo de relacionarmos os conteúdos algébrico e numérico, conforme apresentamos no protocolo a seguir.

O conjunto conhecido por Triângulo de Sierpinski foi criado pelo matemático polonês Wacław Sierpinski em 1916 e possui, além de características e propriedades fractais, relação com o triângulo aritmético de Pascal. A atividade anterior, em que foram desenhados o triângulo e o tapete, mostra o conjunto obtido pelo processo iterativo.



Vamos analisar algebricamente, esse triângulo, com a atividade a seguir. Complete as tabelas:

Nível	0	1	2	3	4	5	...n
Número de triângulos	1	3	9	27	81	243	
Número de triângulos (potência)	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^n

Protocolo 1

Percebemos que o aluno verificou que a cada iteração o número de triângulos (escuros) é multiplicado por 3. Muitos alunos utilizaram o expoente com uma representação algébrica, mesmo não sendo ainda comum este tipo de representação para eles.

Para completar a tabela abaixo vamos considerar o triângulo desenhado, cujo comprimento inicial do lado é 20 cm.

Nível	0	1	2	3	4	5	...n
Comprimento de cada lado do triângulo	20	10	5	2,5	1,25	0,625	$\frac{l}{2^n}$
Comprimento de cada lado (l) do triângulo (generalização)	l	$\frac{l}{2}$	$\frac{l}{4}$	$\frac{l}{8}$	$\frac{l}{16}$	$\frac{l}{32}$	$\frac{l}{2^n}$

Protocolo 2

Para a resolução da questão da tabela anterior tínhamos como objetivo fazer com que o aluno percebesse que o comprimento do lado de cada triângulo é dividido por 2 a cada iteração. Podemos verificar, com a resolução deste aluno, que, na segunda linha, conseguiu apresentar uma generalização para o cálculo do comprimento de cada lado do triângulo para n iterações.

2. Considerações Finais

As atividades desenvolvidas puderam proporcionar aos alunos um estudo diferenciado do convencional da matemática, onde puderam perceber que a matemática não é estudada somente com a resolução de algoritmos e fórmulas e que pode ser estudada de uma forma lúdica e interessante, tornando o seu ensino mais significativo para o aluno. O estudo de tópicos da matemática tendo como contextualização a geometria fractal demonstra de forma inequívoca, que poderá tornar o aprendizado de alguns temas da Matemática curricular muito mais proveitosos.

Verificamos também que o uso de atividades que envolvam o tema da geometria fractal, permite ao professor promover as capacidades de investigação matemática do aluno, abordando conceitos de uma forma mais ou menos complexa, de acordo com o nível de escolaridade e de desenvolvimento deste.

As atividades realizadas auxiliaram na ajuda da compreensão dos conceitos de perímetro, área e volume e promoveram a pesquisa de padrões e regularidades formulando em seguida generalizações em situações diversas; auxiliando no desenvolvimento de conhecimentos algébricos e geométricos.

A exploração da geometria fractal, em contexto de sala de aula, proporciona o desenvolvimento das atitudes, dos valores e das competências dos alunos, na medida em que promove a curiosidade e o gosto de aprender, de pesquisar e de investigar; impulsiona a utilização da matemática na interpretação do real, reconhecendo formas e processos que envolvem conceitos matemáticos.

3. Referências

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros curriculares nacionais: Matemática / Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília : MEC/SEF, 1997.

_____. Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN +. Secretaria de Educação Básica. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2002.

_____. Orientações Curriculares para o ensino Médio. Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias / Secretaria de Educação Básica. – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006.

CARVALHO, Hamilton Cunha. Geometria Fractal: Perspectivas e possibilidades para o ensino de Matemática. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática)- Universidade Federal do Pará. Pará, 2005.

LINS, Rômulo; GIMENEZ, Joaquim. Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI. Campinas: Papyrus, 1997. (Coleção Perspectivas em Educação Matemática).

MANDELBROT, B. P. Objectos Fractais. Lisboa: Gradiva, 1989.

PARANÁ. Diretrizes Curriculares da Educação Básica. Matemática. Governo do Paraná. Secretaria de Estado da Educação do Paraná. Departamento de Educação Básica, 2008.

SALLUM, E. M. Fractais no ensino médio. Revista do Professor de Matemática, SBM, São Paulo, n.º 57, p. 1-8. 2005.