PENSAMENTO MATEMÁTICO AVANÇADO: UM ESTUDO COM QUESTÕES DE VESTIBULAR

Laís Cristina Viel Gereti
Universidade Estadual de Londrina
laisvielg@hotmail.com

Angela Marta Pereira das Dores Savioli
Universidade Estadual de Londrina
angelamarta@uel.br

Resumo:
O presente trabalho traz resultados parciais de uma pesquisa que tem por objetivo identificar, analisar e discutir que características do Pensamento Matemático Avançado estudantes evidenciam em resoluções de duas questões, escolhidas do vestibular de verão de 2011 da Universidade Estadual de Maringá. Os participantes são sete estudantes de Licenciatura em Matemática de uma universidade estadual paranaense. A coleta de dados ocorreu por meio dos registros escritos de cada estudante. As análises, resultados parciais, evidenciaram que esses estudantes apresentaram processos do pensamento matemático avançado como *representar*, *mudança de representações e tradução entre elas*, *generalização* e *sintetização*.

Palavras-chave: Educação Matemática; Pensamento Matemático Avançado; Processos.

1. Introdução

Uma das preocupações da Educação Matemática é com o ensino e a aprendizagem de estudantes universitários, como também o pensamento matemático desenvolvido por eles, já que, geralmente, alguns professores estão mais interessados em dar conta dos livros das disciplinas ministradas, ao invés de se interessar pelos processos de ensino e de aprendizagem.

Diversos pesquisadores se propuseram a estudar o pensamento matemático desenvolvido por indivíduos, entre eles Tall (1991), Dreyfus (1991), Gray et al. (1999) e Resnick (1987).

Dreyfus (1991) em seus estudos aborda a respeito do tipo de ensino que, ainda hoje, é encontrado nas salas de aulas, em que a matemática é apresentada como produto acabado, polido e incontestável. O autor sugere que para que de fato ocorra a aprendizagem, os estudantes devem construir propriedades de conceitos por meio de deduções a partir da definição e se envolver em atividades que promovam a própria abstração, excluindo um ensino baseado na definição de conceitos abstratos e exemplificações.

Talvez esta seja a saída de um ensino em que não se interessa pela aprendizagem do aluno, assim como pelo pensamento desenvolvido por ele. Dreyfus (1991) com sua teoria nos apresenta uma maneira para compreender o que está acontecendo na mente dos estudantes. Com esta teoria podemos intuir se eles conseguem abstrair os conceitos matemáticos, se passam de um nível de pensamento para outro, e isto está relacionado com o envolvimento e a interação dos processos que estão presentes no Pensamento Matemático Avançado.

Diante disso optamos pelo teórico Dreyfus (1991), para analisar algumas características deste pensamento em registros escritos de alunos que cursam licenciatura em Matemática quando da resolução de questões de vestibular.

Assim, o trabalho tem por objetivo identificar, analisar e discutir que características do Pensamento Matemático Avançado, definidas por Dreyfus (1991), os estudantes evidenciam ao resolver questões de vestibular, mais especificamente, duas questões do vestibular de verão da Universidade Estadual de Maringá.

2. Pensamento Matemático Avançado

Na década de 80 durante o evento *International Group for the Psychology of Mathematics Education* foi constituído o grupo *Advanced Mathematical Thinking Group*, que se propôs estudar questões relativas ao ensino e a aprendizagem da matemática por adultos (PINTO, 2002).

Dentre os pesquisadores que constituíram este grupo, está Tommy Dreyfus (1991). Para ele o pensamento matemático avançado consiste em uma grande serie de processos que interagem entre si, como os processos de representar, visualizar, generalizar, entre outros.

Os principais processos são o de *representação* e o de *abstração*. Segundo o autor estes processos podem ser encontrados tanto no pensamento matemático elementar como no pensamento matemático avançado, não existindo uma diferença nítida entre esses dois pensamentos, pois existem tópicos da matemática básica que podem ser tratados de forma avançada, assim como há pensamento elementar sobre tópicos avançados. A distinção, porém, está na complexidade de como são tratados e gerenciados os processos presentes em cada um deles.

Além dos processos de representação e de abstração existem outros processos, como classificar, conjecturar, induzir, analisar e formalizar, mas é por meio dos dois processos principais que se passa de um nível de pensamento para outro. Dreyfus (1991) destaca que é importante o professor conhecer estes professos para compreender as dificuldades que os estudantes apresentam.

O processo de *representação*, segundo Dreyfus (1991), é constituído por outros três processos: *representar*; *mudança de representações e tradução entre elas;* e *modelação*.

O primeiro processo, *representar*, por sua vez é constituído por dois tipos de representações: as simbólicas – que envolvem relações entre signo e significado, com o intuito de fazer com que um conhecimento pessoal implícito seja explicitado em termos de símbolos – e as representações mentais – que se referem a esquemas internos que o indivíduo usa para se comunicar com o mundo externo.

E para complementar o processo de representar, além das representações descritas acima, tem o processo de visualização. É por meio dele que as representações são criadas. Domingos (1994) afirma que a visualização por ser um processo de formação de imagens, nos permite intuir e compreender a descoberta de conceitos matemáticos.

Como as representações são pessoais, cada indivíduo pode ter um tipo de representação para um mesmo conceito, ou pode possuir diversas representações de maneira complementar e integrá-las quando possível. O resultado disso, segundo Dreyfus (1991), será que o indivíduo terá várias representações ligadas, permitindo utilizá-las simultaneamente e alterná-las de forma eficiente. Este processo se refere à *mudança de representações e tradução entre elas*.

Este não é um processo fácil de ensinar, pois sua estrutura é muito complexa. O que pode ser feito, de acordo com Dreyfus (1991), é desde os anos inicias escolares se aplicar o uso dessas várias representações, enfatizando o processo de mudança entre elas. É importante os estudantes terem consciência de que a possibilidade de mudar de uma representação A para uma B deve ser feita sempre que esta for mais eficiente que a primeira.

O processo de *tradução entre as representações* está intimamente ligado ao processo de *mudança de representações* e consiste em passar de uma formulação de um problema matemático ou de uma propriedade para outro.

Outro processo da *representação* é a *modelação*, que é a formulação de uma representação matemática para um objeto não-matemático. Segundo Dreyfus (1991) "significa a construção de uma estrutura matemática ou teoria que incorpora características essenciais do objeto do sistema. Esta estrutura ou teoria, o modelo, pode ser usado para estudar o comportamento do objeto ou processo a ser modelado" (Tradução nossa: DREYFUS, 1991, p.34). Este processo é utilizado para estudar o comportamento de um objeto, mas para pensar a respeito disso o indivíduo precisa de uma representação mental da situação.

Assim, todos esses processos descritos até aqui (*representar*, *mudança de representações e tradução entre elas*, e a *modelação*) constituem o processo de *representação*. O segundo processo descrito por Dreyfus (1991) é *abstração*. Este, por sua vez, é formado pelos processos de *generalização* e *sintetização*, que formam uma base para se abstrair, considerado o processo mais importante no desenvolvimento das habilidades em certos conteúdos matemáticos:

> Se um aluno desenvolve a habilidade de conscientemente fazer abstrações a partir de situações matemáticas, ele alcançou um nível avançado do pensamento matemático. Atingir essa capacidade de abstrair pode muito bem ser o objetivo mais importante da educação matemática avançada. (Tradução nossa: DREYFUS, 1991, p.34)

A *generalização*, segundo Dreyfus (1991), consiste em derivar e induzir de particularidades, identificando semelhanças entre o que se quer generalizar para então expandir os domínios de validade. Tal processo torna-se importante ao passo que a partir de um caso particular, estabelece-se uma grande quantidade de casos. O autor dá um exemplo de equações lineares e sistemas de equações de duas ou três dimensões, em duas ou três variáveis, que possui soluções únicas para cada caso, e a partir disso, poderá generalizar para sistemas de equações lineares de *n* dimensões e *n* variáveis.

E o outro processo que constitui a *abstração* é a *sintetização*. Este se refere à combinação de partes com o propósito de formar um todo. Segundo Brandemberg (2010) este processo caracteriza-se pela construção de um quadro teórico que congrega e interrelaciona fatos, aparentemente isolados. Este é o caso de síntese do Espaço Vetorial, que relaciona os conteúdos de ortogonalização, diagonalização, transformação, entre outros.

Dreyfus (1991) afirma que em sala de aula professores não dão importância ao processo de síntese. Geralmente eles, ao ensinar, fazem resumos e dentre esses algumas sínteses, isentando os alunos de fazerem suas partes. O que deveriam fazer, de fato, é incentivar seus alunos a respeito da importância desse processo para que consigam ultrapassar aquelas resoluções padronizadas, percebendo relações entre diversos tópicos da matemática.

Assim, o processo de *abstração* está intimamente ligado aos processos de *generalização* e de *sintetização*, mas nenhum desses processos oferece ao estudante esforços cognitivos tão fortes como a abstração, em que o estudante é obrigado a se concentrar nas relações existentes dos objetos matemáticos para compreendê-las.

Além disso, de acordo com Dreyfus (1991), a natureza desse processo se difere dos demais, pois ela é essencialmente construtiva, isto é, tal processo se baseia na “construção de estruturas mentais a partir de estruturas matemáticas, ou seja, de propriedades e relações entre objetos matemáticos” (Tradução nossa: DREYFUS, 1991, p.37). A abstração depende do isolamento que o estudante faz de certas propriedades e de relações apropriadas e da atenção que se dá a essas.

Portanto, esses processos, tanto os presentes na *representação* quanto na *abstração*, estão envolvidos no pensamento matemático avançado, e segundo Dreyfus (1991) são complementares, pois geralmente um conceito é abstraído de diversas representações e, outras vezes, as representações vêm de um conceito mais abstrato.

A seguir apresentamos um quadro que construímos para facilitar a visualização das definições dos processos envolvidos no pensamento matemático avançado, conforme Dreyfus (1991):

Quadro 1 - Descrição dos processos envolvidos no pensamento matemático avançado

Processos envolvidos na REPRESENTAÇÃO	
Representar	Representar um conceito significa gerar um exemplo, uma amostra ou a imagem disso. As representações podem ser mentais ou simbólicas.
Mudança de representações e tradução entre elas	Transitar por mais de uma representação de um conceito matemático e passar de uma formulação de um enunciado matemático para outro.
Modelação	Construção de uma estrutura matemática que incorpora características essenciais do objeto a ser modelado.
Processos envolvidos na ABSTRAÇÃO	
Generalização	Derivar ou induzir a partir de particularidades, identificando pontos em comum e expandir o domínio de validade.
Sintetização	Combinar ou compor partes de tal forma que forme um todo.

Fonte: do autor.

Desse modo, utilizaremos esses processos para analisar as resoluções desenvolvidas pelos estudantes.

3. Procedimentos Metodológicos

Este trabalho refere-se a uma pesquisa qualitativa, de cunho interpretativo, em que os sujeitos envolvidos são sete estudantes de um curso de Licenciatura em Matemática de uma universidade estadual paranaense.

Todos esses estudantes nos autorizaram a utilizar e divulgar seus registros escritos conforme o *Termo de Autorização* assinado por eles, para fins de pesquisa científica.

Para identificar os participantes, nomearemos conforme nossa escolha, garantindo-lhes o direito ao anonimato, como G.1, G.2, ..., G.7.

A coleta de dados foi realizada por meio de registros escritos dos estudantes e as questões foram retiradas da prova de vestibular de verão de 2011 da Universidade Estadual de Maringá.

4. Análise das questões e das resoluções

Nesta seção apresentaremos uma descrição de cada questão e uma análise com as possíveis características do pensamento matemático avançado que as questões podem oferecer. Posteriormente a cada questão, apresentaremos algumas análises dos registros escritos dos estudantes.

A primeira questão:

1) Sobre uma circunferência com raio de 6 cm, marcam-se os pontos *A*, *B* e *C*, equidistantes entre si, e um ponto *D* diferente dos anteriores. Sobre essa situação, é **correto** afirmar que:

01) a área do triângulo *ABC* supera metade da área do círculo delimitado pela circunferência na qual ele está inscrito.
02) o triângulo *ABD* possui, necessariamente, área menor do que a do triângulo *ABC*.
04) o triângulo *ABC* é isósceles.
08) se o triângulo *ABD* é isósceles seu maior lado é o lado *AB*.
16) a área da circunferência é menor do que 100 cm².

Nesta questão o estudante poderá apresentar em suas resoluções representações geométricas, como um triângulo inscrito em uma circunferência, caracterizado pelo processo de *representar*, em especial a representação simbólica. Para verificar o item (01) poderá apresentar as fórmulas para cálculo da área do triângulo e para cálculo da área da circunferência. As fórmulas são uma representação algébrica, uma forma de *representar*. Em relação ao item (02) poderá apresentar uma representação geométrica. No item (04) o estudante pode assumir como proposição ou provar que todo triângulo equilátero é isósceles. Quanto ao item (08) terá que provar podendo apresentar uma representação geométrica. E por fim o item (16) com o uso da fórmula da área da circunferência o aluno poderá apresentar uma representação algébrica. Dentre os itens anteriores o aluno ainda poderá apresentar a característica de *mudança de representações e tradução entre elas* quando apresentar várias representações de um objeto matemático de um modo flexível. Além disso, o estudante poderá mobilizar noções a respeito do conceito de triângulo, como altura, área, propriedades relacionadas ao triângulo equilátero, propriedades relacionadas ao triângulo inscrito em uma circunferência, noções a repeito da área da circunferência, a respeito das relações métricas em um triângulo retângulo e a respeito de arcos e ângulos em uma circunferência. Ao utilizar esses diversos conceitos isolados para resolver a questão 01, o estudante poderá apresentar o processo de *sintetização*.

Em relação às resoluções dos estudantes fizemos uma tabela na qual dispomos as características do pensamento matemático avançado, definidas por Dreyfus (1991). Os espaços assinalados significam que aquele estudante apresentou a característica durante sua resolução:

Tabela 1 – Processos evidenciados nas resoluções da questão 01

	Representar	Mudança de representação e tradução entre elas	Modelação	Generalização	Sintetização
G.1	X	X			
G.2	X				
G.3	X				
G.4	X	X			
G.5	X	X			X
G.6	X	X			
G.7	X	X			X

Fonte: do autor.

Com esta tabela podemos observar que todos os estudantes apresentaram a característica de *representar*, todos representaram geometricamente o triângulo inscrito na circunferência. Alguns apresentaram uma representação algébrica na qual escreveram algumas fórmulas como a do Teorema de Pitágoras, a da área da circunferência, a do comprimento do círculo e também a relação trigonométrica do cosseno.

Os processos *modelação* e *generalização* não foram evidenciados nas resoluções dos alunos. Podemos dizer que isto aconteceu, talvez, devido a natureza da questão de não mobilizar tais características nas resoluções.

O estudante G.3 foi um que apenas representou geometricamente e apresentou o cálculo da área da circunferência, mas não progrediu em sua resolução. Podemos dizer que ele apresentou a característica de *representar* por ter feito uma representação algébrica e uma geométrica, como podemos ver na figura 1:

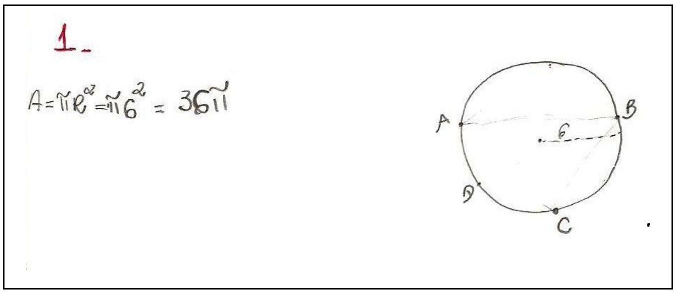


Figura 1 – Resolução da questão 1 do estudante G.3

O mesmo ocorreu com o estudante G.2, que fez a mesma representação geométrica e o mesmo cálculo algébrico da área da circunferência.

O estudante G.4 apesar de ter errado a resolução e o resultado do item (01), apresentou uma representação geométrica (*representar*), ao esboçar um triângulo inscrito em uma circunferência destacando alguns ângulos, e uma pequena prova ao iniciar uma demonstração para provar que a área do triângulo é maior que metade da área do círculo, como mostra a figura 2:

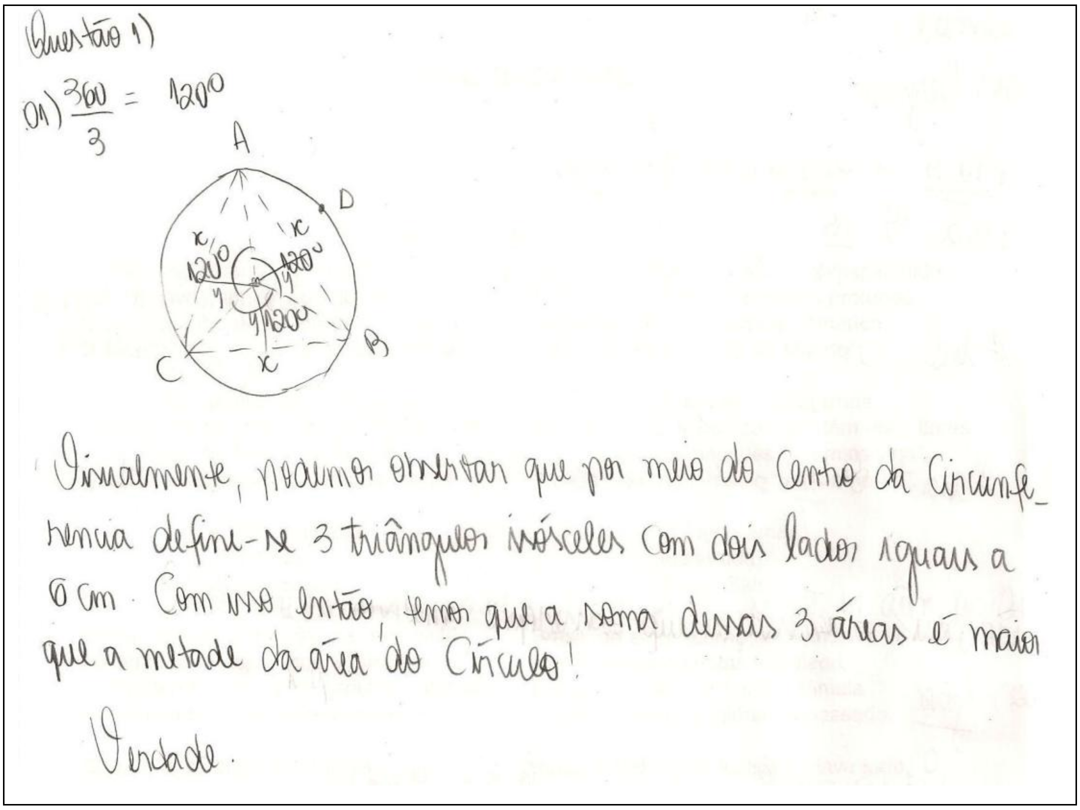
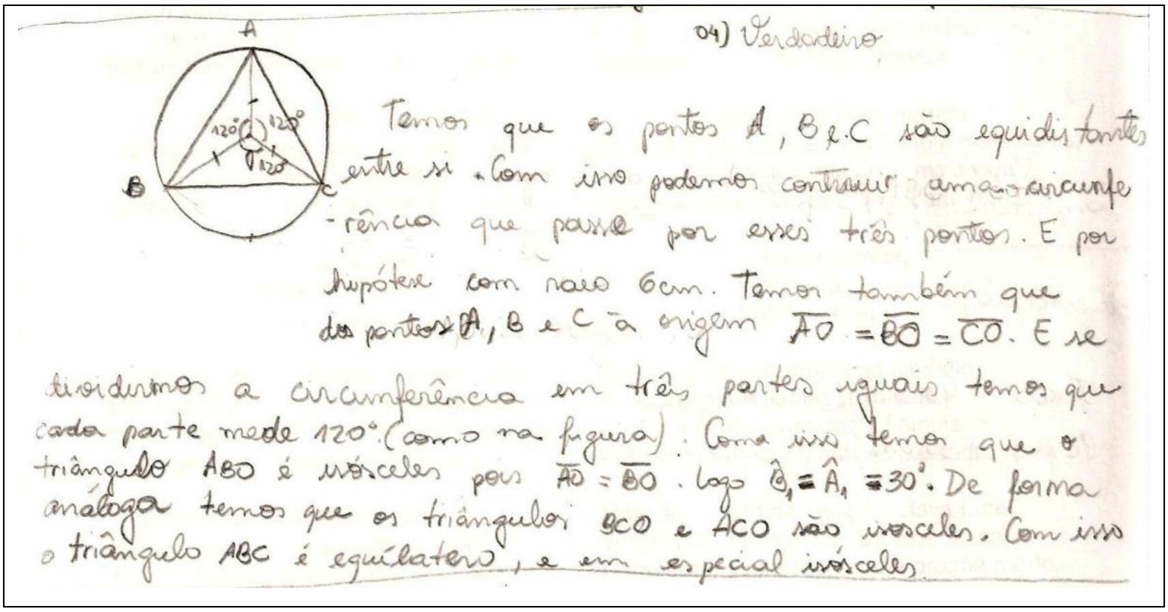


Figura 2 – Resolução do item 01 da questão 1 do estudante G.4

O estudante G.7, em relação ao item (04), nos apresentou uma representação geométrica do triângulo inscrito na circunferência (*representar*) assim como uma demonstração para provar que o triângulo ABC é isósceles. Além disso, ao utilizar conceitos como pontos equidistantes em uma circunferência, triângulo inscrito em uma circunferência, noções de ângulo em um triângulo, o estudante evidenciou o processo de *sintetização*, como nos mostra a figura a seguir:



04) Verdadeiro

Temos que os pontos A, B e C são equidistantes entre si. Com isso podemos construir uma circunfe-rência que passe por esses três pontos. E por hipótese com raio 6cm. Temos também que dos pontos A, B e C à origem $\overline{AO} = \overline{BO} = \overline{CO}$. E se dividirmos a circunferência em três partes iguais temos que cada parte mede 120° (como na figura). Com isso temos que o triângulo ABO é isósceles pois $\overline{AO} = \overline{BO}$. Logo $\hat{B}_1 = \hat{A}_1 = 30°$. De forma análoga temos que os triângulos BCO e ACO são isósceles. Com isso o triângulo ABC é equilátero, e em especial isósceles

Figura 3 – Resolução do item 04 da questão 1 do estudante G.7

Após as análises da questão 1, apresentaremos agora as análises da questão 2. Eis o enunciado da questão:

2) João e Pedro decidiram treinar para competir na Corrida de São Silvestre, mas cada um está fazendo um treinamento diferente: João está correndo 40 minutos por dia e consegue percorrer uma distância de 6 km em cada dia; já Pedro está correndo 30 minutos por dia, do seguinte modo: no primeiro dia, ele percorreu uma distância de 3 km, no segundo dia percorreu 3,5 km, no terceiro dia percorreu 4 km, assim sucessivamente até o décimo quinto dia, e reinicia o processo percorrendo, novamente 3 km. Com essas informações, assinale o que for **correto.**

01) A sequência numérica formada pelas velocidades médias de Pedro, nos quinze primeiros dias de treinamento, forma uma progressão geométrica.
02) No quarto dia, a velocidade média que Pedro correu foi igual à velocidade média que João correu.
04) No décimo dia, Pedro percorreu a distância de 7,5 km.
08) A distância total percorrida por Pedro, desde o primeiro até o décimo terceiro dia, foi a mesma percorrida por João no mesmo período.
16) A diferença entre as distâncias totais percorridas por Pedro e João, nos quinze primeiros dias de treinamento, é maior que 10 km.

Quanto a questão 2, o estudante poderá utilizar uma representação simbólica (*representar*) para compreender o que está acontecendo na situação dada, como uma representação tabular dispondo os dias e os quilômetros andados. No item (01) poderá apresentar uma característica da abstração que é *generalização* ao observar o que acontece com “Pedro” encontrando uma fórmula para aquela situação. Em relação ao item (02) o estudante pode apresentar a fórmula do termo geral de uma Progressão Aritmética (PA), que é uma representação algébrica, assim também como poderá apresentar a fórmula da Velocidade Média. Nos itens (04) e (08) poderá utilizar a fórmula do termo geral de uma PA, que é uma representação simbólica. E por último, o item (16), poderá utilizar a fórmula da soma dos termos de uma PA. Assim, para resolver os itens desta questão o estudante deverá mobilizar noções a respeito de velocidade média, de progressão geométrica e de progressão aritmética, além de suas propriedades. Ao apresentar essas noções o estudante estará evidenciando o processo de *sintetização*.

Em relação às resoluções dos estudantes da questão 2, também fizemos uma tabela na qual dispomos os principais processos envolvidos do Pensamento Matemático Avançado, definidas por Dreyfus (1991). Os espaços assinalados significam que aquele estudante apresentou a característica durante sua resolução:

Tabela 2 – Processos evidenciados nas resoluções da questão 2

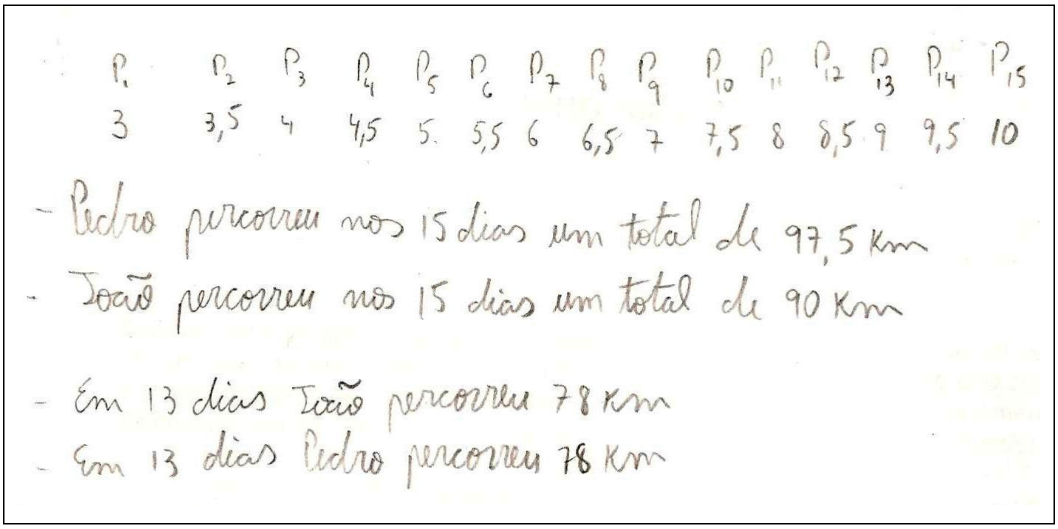
	Representar	Mudança de representações e tradução entre elas	Modelação	Generalização	Sintetização
G.1	X				
G.2	X				
G.3	X				
G.4	X	X		X	X
G.5	X	X		X	X
G.6	X				
G.7	X				

Fonte: do autor.

Com esta tabela podemos observar que todos os estudantes apresentaram o processo de *representar*: em suas resoluções a maioria das representações foi algébrica, ao escrever a fórmula do termo geral de uma Progressão Aritmética (PA) e a fórmula da soma dos temos de uma PA.

Nas resoluções desta questão não foi evidenciado o processo de *modelação*.

Mas houve outros tipos de representação, como nos mostra a figura a seguir do estudante G.2, ao representar de forma tabular os quilômetros percorridos por Pedro, sendo realizadas apenas estas anotações, não progredindo na resolução:

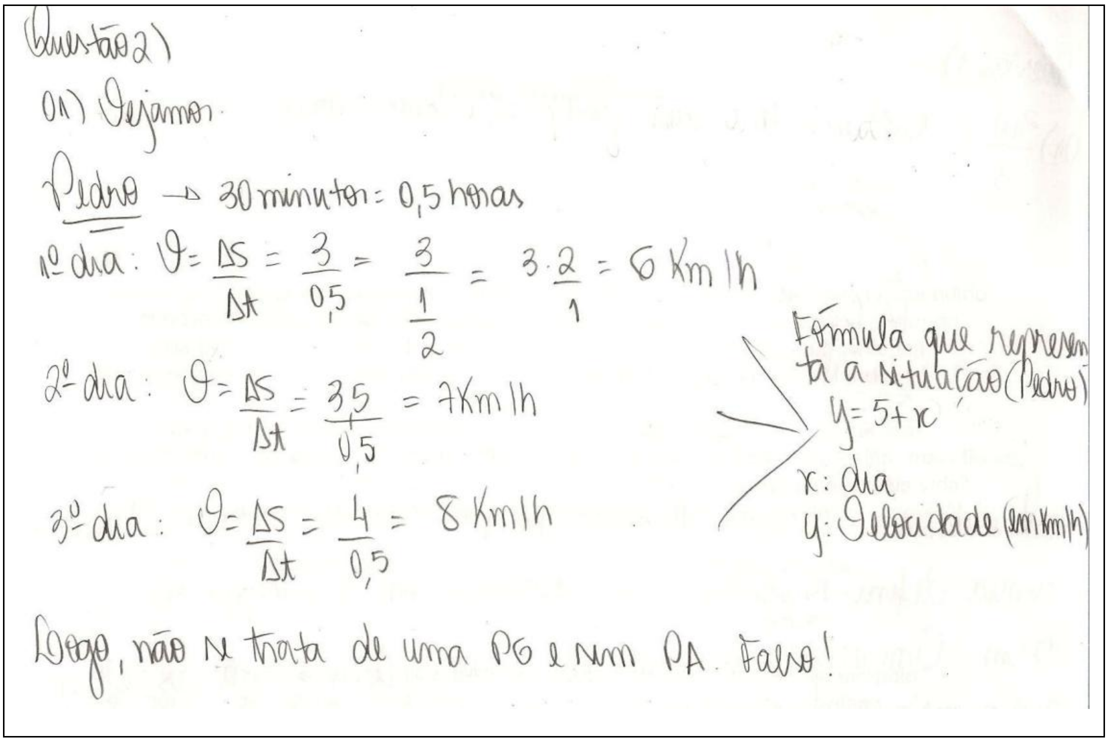


P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}	P_{13}	P_{14}	P_{15}
3	3,5	4	4,5	5	5,5	6	6,5	7	7,5	8	8,5	9	9,5	10

- Pedro percorreu nos 15 dias um total de 97,5 Km
- João percorreu nos 15 dias um total de 90 Km
- Em 13 dias João percorreu 78 Km
- Em 13 dias Pedro percorreu 78 Km

Figura 4 – Resolução da questão 2 do estudante G.2

O estudante G.4, em relação ao item (01), apresentou a fórmula da Velocidade Média (*representar*) e uma característica da abstração que é *generalização* ao observar o que estava acontecendo com as velocidades encontradas e generalizar em uma fórmula para poder calcular em qualquer dia, como nos mostra a seguinte figura:



Questão 2)

01) Vejamos.

Pedro → 30 minutos = 0,5 horas

1º dia: $\vartheta = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{3}{0,5} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 3 \cdot \frac{2}{1} = 6$ Km/h

2º dia: $\vartheta = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{3,5}{0,5} = 7$ Km/h

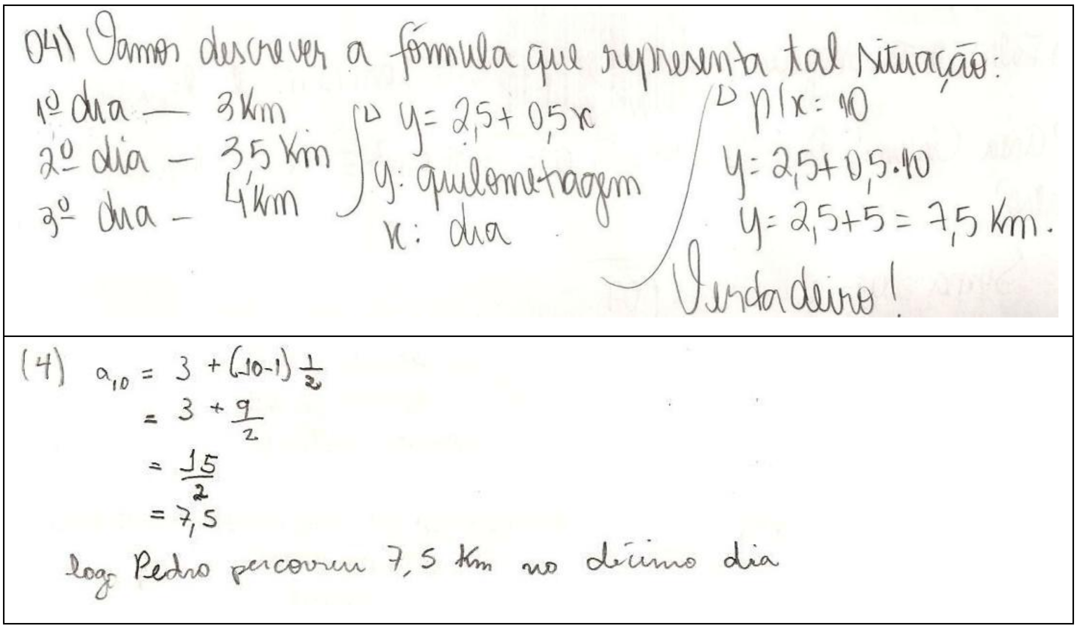
3º dia: $\vartheta = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{4}{0,5} = 8$ Km/h

Fórmula que representa a situação (Pedro)
$y = 5 + x$
x: dia
y: Velocidade (em Km/h)

Logo, não se trata de uma PG e sim PA. Falso!

Figura 5 – Resolução do item 01 da questão 2 do estudante G.4

Em relação ao item (04), apresentaremos duas resoluções diferentes, a primeira do estudante G.4 e a outra do estudante G.6, como mostra a figura a seguir:



04) Vamos descrever a fórmula que representa tal situação:
1º dia — 3 km
2º dia — 3,5 km
3º dia — 4 km
⇒ $y = 2{,}5 + 0{,}5x$
y: quilometragem
x: dia
⇒ p/ $x = 10$
$y = 2{,}5 + 0{,}5 \cdot 10$
$y = 2{,}5 + 5 = 7{,}5$ km.
Verdadeiro!

(4) $a_{10} = 3 + (10-1)\frac{1}{2}$
$= 3 + \frac{9}{2}$
$= \frac{15}{2}$
$= 7{,}5$
logo Pedro percorreu 7,5 km no décimo dia

Figura 6 – Resoluções do item 04 da questão 2 dos estudantes G.4 e G.6, respectivamente

Podemos notar que o estudante G.4 não utilizou a fórmula do termo geral da PA, ele observou o que estava acontecendo nos dias calculados e generalizou obtendo uma fórmula específica para aquela situação (*generalização*). Já o aluno G.6 utilizou a fórmula do termo geral de uma PA para resolver a questão, apresentando uma representação algébrica (*representar*).

5. Resultados da Pesquisa

Diante das resoluções das questões pelos estudantes participantes e de algumas análises que destacamos neste trabalho podemos observar que os processos envolvidos dependem de cada questão e de cada aluno.

A primeira questão possibilitou os estudantes a apresentarem os processos de *representar*, *mudança de representações e tradução entre elas* e *sintetização*. O processo de *representar* ocorre quando é apresentado: representação geométrica do triângulo inscrito na circunferência; representações algébricas como fórmula do Teorema de Pitágoras, fórmula da área da circunferência, fórmula do comprimento do círculo e relação trigonométrica do cosseno. Tais representações utilizadas pelos estudantes foram necessárias para que eles se referissem aos conceitos utilizados, que segundo Dreyfus (1991) são representações simbólicas, pois simbolizam conceitos matemáticos.

O processo de *mudança de representações e tradução entre elas* ocorre quando se passa de uma representação geométrica (como no caso do triângulo inscrito na circunferência) para uma representação algébrica (quando se utiliza das fórmulas do Teorema de Pitágoras e da área da circunferência), por exemplo. Ao evidenciar diferentes representações, pode acontecer do estudante transitar por entre elas, e foi o que aconteceu. Deve-se mudar de uma representação para a outra sempre que esta for mais eficiente (DREYFUS, 1991).

E o processo de *sintetização* ocorre quando o estudante utiliza diversos conceitos para resolver a questão por inteiro, apresentando conceitos como pontos equidistantes em uma circunferência e conceitos de ângulos em um triângulo. Dreyfus (1991) afirma que geralmente alguns conceitos matemáticos são ensinados na escola de forma isolada, não havendo uma relação entre eles. O que se espera é que o estudante consiga relacioná-los.

Já na segunda questão os estudantes apresentaram outro processo que antes não havia sido revelado, que é *generalização*. O processo de *representar* aqui ocorre quando é apresentado: representações algébricas, como as fórmulas do termo geral e da soma dos termos de uma Progressão Aritmética, a fórmula da Velocidade Média; e representação tabular. Dreyfus (1991) afirma que tais símbolos, as representações, são um sinal de referência e representam o conceito em questão. Além disso, servem para tornar explícito um conhecimento implícito.

O processo de *sintetização* ocorre quando é apresentado conceitos de Velocidade Média e de Progressão Aritmética para resolver a questão. Podemos observar que estes conceitos utilizados são ensinados de forma totalmente isolada, e que foi possível à união desses para que se pudesse resolver a questão.

E o processo de *generalização* ocorre quando se encontra a fórmula para calcular a velocidade para os dias considerados na questão. Dreyfus (1991) afirma que a partir de particularidade pode-se chegar a um resultado genérico, expandindo o domínio de validade.

Portanto, acreditamos que com esta teoria do Pensamento Matemático Avançado o professor pode compreender o que está acontecendo com seu aluno, a partir das resoluções de questões, verificando se o aluno realmente está conseguindo abstrair os conceitos matemáticos.

6. Agradecimentos

Agradecemos a CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – e à Fundação Araucária pelo apoio financeiro; aos estudantes que se disponibilizaram para a realização desta pesquisa.

7. Referências

BRANDEMBERG, João Cláudio. **Uma análise histórico-epistemológica do conceito de grupo**. São Paulo: Livraria da Física, 2010.

DOMINGOS, A. **Compreensão de conceitos matemáticos avançados – a matemática no ensino superior.** (tese de doutorado, Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade Nova Lisboa). Lisboa, 2003.

DREYFUS, Tommy. Advanced Mathematical Thinking Processes. In: TALL, David. Advanced Mathematical Thinking. Holanda: Kluwer Academic Publishers, 1991, pp.25-41.

GRAY, Eddie. et al. Knowledge construction and diverging thinking in elementary and advanced mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, *38*, 1-3, 111-133.1999.

PINTO, Márcia Maria Fusaro. Educação Matemática no Ensino Superior. **Educação em Revista**, Belo Horizonte, n.36, dez. 2002.

RESNICK, Lauren B. **Education and learning to think**. Washington: National Academy Press, 1987.

TALL, David. The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Ed.), **Advanced mathematical thinking** (pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer. 1991.