IDÉIAS FUNDAMENTAIS DO CÁLCULO INTEGRAL

Amanda de Fátima Mello Macedo [1]
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
amanda.m.macedo@hotmail.com

Raquel Toledo Bach [2]
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
raquel_matematica@hotmail.com

Samanta Zanela Lenardon [3]
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
samanta_zanella@hotmail.com

Andréia Büttner Ciani [4]
Universidade Estadual do Oeste do Paraná
andbciani@gmail.com

Resumo:
Este minicurso destina-se a professores do Ensino Médio e Superior e a estudantes de Graduação, interessados em discutir e aprimorar-se nas ideias que permeiam o Cálculo Integral. Apresentaremos um tratamento para os conceitos que o fundamentam, seguindo a trilha da sua origem e do seu desenvolvimento histórico, com a exploração dos problemas iniciais do Cálculo, como a obtenção do valor de qualquer área. Introduziremos o conceito e aplicação da soma de Riemann por meio do método da Exaustão e das ideias de generalização e de limite. Nosso objetivo é compor o Cálculo do ponto de vista de um todo, evitando a ênfase em técnicas e procedimentos.

Palavras-chave: Idéias do Cálculo; Área; Método da Exaustão; Soma de Riemann; Cálculo Integral.

1. Introdução

Podemos considerar a existência de algum consenso de que a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral se configura em uma barreira difícil a ser ultrapassada em cursos de Graduação. E mesmo quando ultrapassada, muitos estudantes revelam uma aprendizagem

[1] Estudante do terceiro ano do curso de Licenciatura em Matemática, bolsista do Pibid - Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência, campus de Cascavel-PR.
[2] Estudante do terceiro ano do curso de Licenciatura em Matemática, bolsista do Pibid - Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência, campus de Cascavel-PR.
[3] Estudante do terceiro ano do curso de Licenciatura em Matemática, campus de Cascavel-PR.
[4] Professora doutora integrante do grupo de Formação de Professores de Ciências e Matemática desde 2002, e integrante do Grupo de Estudos e Pesquisa em Educação Matemática e Avaliação – GEPEMA desde 2007.

mais voltada ao domínio e manipulação de regras e técnicas e, por vezes, desprovida de um contexto teórico e histórico que as justifiquem. Estes estudantes parecem carecer de uma compreensão das ideias que ligam estas regras e técnicas, o que daria sentido ao Cálculo como um todo coerente e coeso. Diante destas percepções e carências é que resolvemos propor uma sistematização visando uma abordagem das ideias fundamentais que permeiam o Cálculo Integral. Tomando como base o minicurso apresentado por Ciani e Papani (2007), o qual resultou do trabalho de extensão desenvolvido entre 2006 e 2007, conforme consta em Ciani e Papani (2006), no qual as autoras propunham uma ênfase nas ideias fundamentais e principais que permeiam todo o Cálculo Diferencial e Integral.

Sabemos que as dificuldades com esta disciplina e o alto índice de reprovações se tornaram históricos e comuns. Acreditamos ainda que muitos esbarram nas dificuldades em decorrência da linguagem matemática. Afinal, dois séculos antes de Cristo, os gregos estiveram a um passo da construção do Cálculo e, talvez, não conseguiram pelo fato de não terem uma linguagem algébrica capaz de expressar com precisão suas ideias.

Além disso, a abordagem compartimentada do Cálculo pode ter contribuído para que ele se tornasse, em algumas situações, um conjunto de regras desconexas. Geralmente, os alunos não estabelecem relações entre o cálculo de área pela soma de Riemann com o cálculo de uma integral pelas técnicas de integração, não percebendo a integral como um conjunto infinito de retângulos ou figuras que cobrem uma área, se aproximando tanto quanto se queira do seu valor exato, ou seja, uma aproximação infinita. Temos que buscar maneiras de lidar com estas dificuldades.

Visando resgatar a lógica da construção do Cálculo, optamos pela perspectiva pedagógica das investigações matemáticas em sala de aula, a qual vem ao encontro do que buscamos para trabalhá-lo. Tal proposta de trabalho tem sua origem ou inspiração no próprio trabalho investigativo dos matemáticos. “Ao se propor uma tarefa de investigação, espera-se que os alunos possam, de uma maneira razoavelmente consistente, utilizar os vários processos que caracterizam a atividade investigativa em Matemática” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 21). Nessa concepção, o trabalho em aulas de Cálculo resgata as características intrínsecas à Matemática e promove uma reflexão epistemológica sobre a construção do conhecimento matemático: “As investigações matemáticas envolvem, naturalmente, conceitos, procedimentos e representações matemáticas, mas o que mais fortemente as caracteriza é este estilo de conjectura-teste-demonstração” (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 10). “Para os matemáticos profissionais, investigar é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades" (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2003, p. 13). É o pensar matematicamente que queremos priorizar com este minicurso.

Pretendemos motivar os participantes, por meio da investigação, a solucionar o problema do cálculo da área de uma circunferência, sem a fórmula e, posteriormente, o cálculo da área sob uma curva qualquer. Isto levará à construção de tabelas, gráficos, objetivando uma sistematização e até generalização.

2. O problema da área

Iniciaremos as atividades propondo uma situação a ser investigada: como obter o valor de uma área qualquer? Tomando área como sendo a medida, expressa por um número real não negativo, de uma região plana delimitada por um perímetro. Para obter este valor utilizamos uma unidade de medida, a qual deve ser uma parte do plano, no caso um quadrado que pode ser qualquer sub-unidade do sistema métrico decimal. Por exemplo, o metro quadrado (m^2) ou centímetro quadrado (cm^2). Assim, um quadrado de lado 3 metros possui 9 m^2 de área, pois a sua superfície comporta 9 quadrados de 1 m de lado.

Todas as figuras geométricas com lados de segmentos de retas, podem ter suas áreas calculadas a partir de uma aplicação dessa ideia de área, como retângulos, triângulos, pentágonos, dentre outros. A dificuldade maior aparece quando se deseja calcular a área delimitada por um perímetro composto não apenas por segmentos de retas, como por exemplo, a circunferência.

Vamos investigar uma maneira de calcular a área de uma circunferência de raio 10 cm, sem utilizar a fórmula Área = πr^2, uma vez que ela não foi demonstrada, vamos supor que ela não seja sabida.

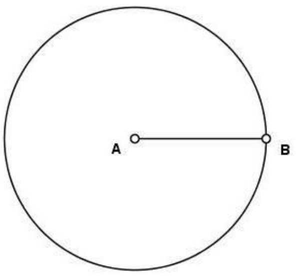

Figura 1: Circunferência de raio 10 cm.

Segundo Stewart (2001) as origens do cálculo trazem à memória a Grécia antiga, pelo menos 2500 anos atrás, quando foram encontrados cálculos de áreas por meio do chamado “método da exaustão”. Por exemplo, para encontrar a área de qualquer polígono eles poderiam dividi-lo em triângulos e somar as áreas obtidas.

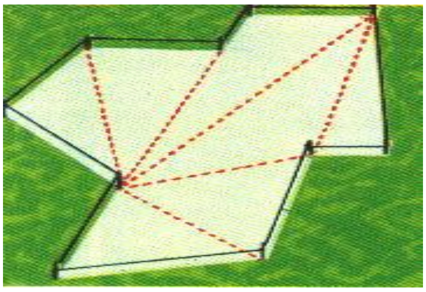

Figura 2: Subdivisão de área em triângulos.

Mais precisamente, o “método da exaustão” consistia em inscrever e circunscrever a figura com polígonos regulares e então aumentar o número de lados deles para uma melhor aproximação do valor exato da área.

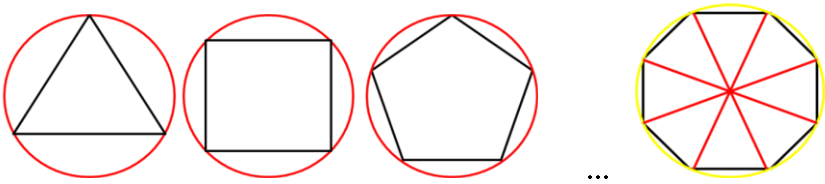

Figura 3: Aproximação da área por polígonos inscritos.

Se considerarmos a área inscrita à circunferência como a_n, teremos sempre que a_n < Área Exata da Circunferência (AEC), sendo n o número de lados do polígono inscrito.

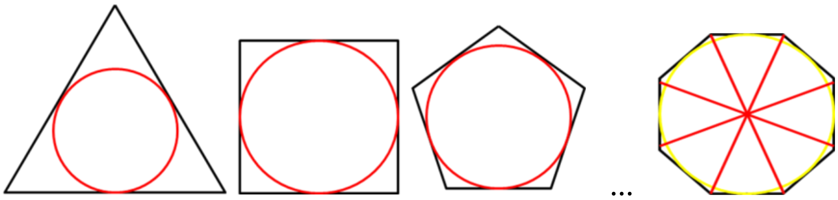

Figura 4: Aproximação da área por polígonos circunscritos.

Analogamente, A_n como sendo a área do polígono circunscrito, teremos AEC < A_n , e n o número de lados do polígono circunscrito.

A fim de organizar os dados, possibilitar a percepção de regularidades e induzir a uma generalização, deverá ser construída uma tabela que associe o número de lados do polígono, n, inscrito e circunscrito, ao valor das áreas dos respectivos polígonos, a_n e A_n. A visualização destes valores permitirá observar que à medida que aumentamos n, tanto a_n quanto A_n vão se aproximando de AEC, permanecendo a desigualdade a_n < AEC < A_n, por maior que tomemos n. A igualdade perfeita nunca será atingida.

O método da exaustão não exige que o polígono inscrito chegue a coincidir com o círculo, mas apenas lida com o fato de a diferença poder ser tão pequena quanto conseguirmos. Este raciocínio é similar ao raciocínio utilizado na compreensão do conceito de limite. Os gregos não usavam explicitamente limites, segundo Monteiro (2003), a diferença entre o método de exaustão e o limite do Cálculo Diferencial e Integral reside apenas no fato de os gregos não realizarem essa passagem ao infinito, pois não tinham noção de um "continuum aritmético". Para avaliar até que ponto chegaram os gregos, basta lembrar que Arquimedes (287-12 a.C) realizou o Cálculo da área sob a parábola antecipando-se, assim, em mais de dezessete séculos aos resultados do Cálculo Integral. Provavelmente ele não obteve a sua formalização e o cálculo exato, devido à falta de uma linguagem adequada, uma vez que nem mesmo o conceito de função e plano cartesiano "existiam".

Segundo Botelho e Rezende (2007), o conceito de função, fundamental para o surgimento e desenvolvimento do Cálculo, levou muito tempo para ser aperfeiçoado, mas as ideias iniciais, já apareciam de forma implícita por volta de 600 a.C, na primeira escola filosófica grega. No entanto, foi somente por volta do século XV que ela apareceu explicitada em linguagem matemática como uma relação entre duas grandezas dependentes, continuando seu aprimoramento, sendo que nos séculos XVII e XVIII, foi explicitada de uma maneira mais rigorosa, se configurando em uma definição, vindo assim a revolucionar a Matemática e assumir um papel central em todas as ciências exatas. Os matemáticos do século XVII, nomeadamente Fermat e Descartes, com a introdução das coordenadas cartesianas, transformaram problemas geométricos em problemas algébricos. Nos séculos XVIII e XIX desenvolve-se a análise conduzindo à noção geral de função, que permite uma generalização e uma simplificação das teorias matemáticas. A partir de então, uma função identifica-se com uma fórmula que permite calcular f(x), conhecendo x.

Os matemáticos antigos lidaram com essa ideia de aproximações e "limites" de modo intuitivo por dois séculos. Percebiam a falta de uma linguagem para expressar suas ideias, pois intuitivamente, já sabiam que a área exata seria encontrada quando n fosse infinitamente grande, mas não tinham ainda como se expressar de maneira precisa e rigorosa. A humanidade precisou esperar até o século XIX para que este rigor fosse finalmente encontrado por Augustin-Louis Cauchy (1789-1857), que criou uma definição formal de limite. Talvez a demora de dois séculos sinalize para a sutileza e o cuidado na compreensão desse conceito.

Depois de Cauchy podemos afirmar que a AEC é o limite das áreas dos polígonos inscritos (circunscritos) e, finalmente, fazemos o n tender a infinito, e escrevemos

$$AEC = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} A_n \ .$$

Uma segunda atividade a ser proposta, será calcular a área delimitada por uma curva qualquer. Vamos sugerir o cálculo da área delimitada pela curva $f(x) = x^2$, para $0 \leq x \leq 1$.

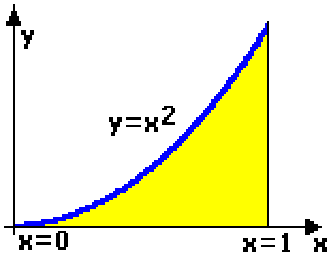

Figura 4: Área sob a parábola.

Como poderíamos utilizar o método da exaustão para a resolução deste problema? Quais seriam os polígonos mais adequados para fazermos uma aproximação da área por excesso e por falta?

Notamos primeiro que a Área Exata da Parábola (AEP) deve estar entre 0 e 1, pois a região de AEP está contida em um quadrado com comprimento de lado 1, mas esta é uma estimativa muito grosseira. Uma segunda tentativa de aproximação poderia ser pela circunscrição de um triângulo retângulo de base 1 e altura 1^2, e pela inscrição de um triângulo retângulo de base menor que 1 e altura menor que 1^2. No entanto, aparece uma dificuldade em se estabelecer as medidas do triângulo inscrito. Provavelmente, a ideia de prosseguir com estes polígonos, quadrados, triângulos, ou utilizando outras formas geométricas, para a obtenção de uma aproximação mais refinada da AEP irá esbarrar em outras dificuldades para o cálculo, principalmente no que diz respeito a uma sistematização. Os participantes poderão testar a aproximação da área por meio de retângulos e chegar à conclusão de que seria uma boa estratégia.

A princípio, uma possibilidade seria a circunscrição de três retângulos de mesma base na região AEP. Seriam traçadas três faixas R_1, R_2 e R_3 pelas retas verticais $x = \frac{1}{3}$, $x = \frac{2}{3}$ e $x = 1$. Podemos aproximar cada faixa por um retângulo com base igual à largura da faixa e altura igual ao lado direito da faixa, sendo a altura calculada por $f(x) = x^2$ nos extremos direitos dos subintervalos $[0,\frac{1}{3}]$, $[\frac{1}{3},\frac{2}{3}]$ e $[\frac{2}{3},1]$. Cada um dos retângulos tem largura $\frac{1}{3}$ e as alturas são $(\frac{1}{3})^2$, $(\frac{2}{3})^2$ e 1^2. Logo, a soma das áreas desses retângulos é dada por $A_3 = \frac{1}{3}.(\frac{1}{3})^2 + \frac{1}{3}.(\frac{2}{3})^2 + \frac{1}{3}.1^2 = 0{,}518518....$ Podemos observar que o valor de AEP é menor do que A_3, isto é, $AEP < A_3$. Dessa forma, obtemos uma aproximação do valor da área por excesso. De maneira similar, apenas modificando a altura das faixas, ao invés de tomarmos o lado direito, tomaremos o lado esquerdo da faixa como referência para a medida da altura de cada faixa. Obteremos a área inscrita de $a_3 = \frac{1}{3}.0^2 + \frac{1}{3}.(\frac{1}{3})^2 + \frac{1}{3}.(\frac{2}{3})^2 = 0{,}185185...$, de modo que $a_3 <$ AEP. Assim, $a_3 <$ AEP $< A_3$.

Este procedimento pode ser repetido para 4, 5, 6, ..., n retângulos. Tomando n retângulos circunscritos teremos retângulos de largura 1/n, e as alturas são os valores da função $f(x) = x^2$ nos pontos 1/n, 2/n, 3/n, ..., n/n, isto é , $(1/n)^2$, $(2/n)^2$, $(3/n)^2$, ..., $(n/n)^2$. Assim, $A_n = 1/n(1/n)^2 + 1/n(2/n)^2 + 1/n(3/n)^2 + ... + 1/n(n/n)^2 =$

$$= 1/n.1/n^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2) = \frac{1}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}, \text{ e}$$

$$a_n = 1/n(0)^2 + 1/n(1/n)^2 + 1/n(2/n)^2 + ... + 1/n[(n-1)/n]^2 =$$

$$= 1/n.1/n^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + (n-1)^2) = \frac{1}{n^3}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6} = \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}.$$

Mantendo sempre a desigualdade $a_4 <$ AEP $< A_4$, $a_5 <$ AEP $< A_5$, $a_6 <$ AEP $< A_6$, ... , $a_n <$ AEP $< A_n$.

Novamente, organizaremos os dados em uma tabela a fim de conduzir a uma generalização, associando a quantidade de retângulos, n, inscrito e circunscrito aos seus respectivos valores de áreas, a_n e A_n.

Como na situação da área do círculo, a aproximação fica cada vez melhor à medida que aumentamos o número de polígonos, neste caso de retângulos, isto é, quando $n \to \infty$.

Portanto, vamos escrever a área da região, AEP, da seguinte forma:

$$\text{AEP} = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\frac{(n+1)}{n}\frac{(2n+1)}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}(1+\frac{1}{n})(2+\frac{1}{n}) = \frac{1}{6}.1.2 = \frac{1}{3}.$$

$$\text{AEP} = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}\frac{(n-1)}{n}\frac{(2n-1)}{n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6}(1-\frac{1}{n})(2-\frac{1}{n}) = \frac{1}{6}.1.2 = \frac{1}{3}.$$

Com isso, vemos que AEP $= \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{3}$.

3. Discussão

Esperamos proporcionar aos participantes uma compreensão das ideias de infinito, função, limite e generalização, trabalhadas durante o minicurso; baseando-se em um dos problemas que originaram o Cálculo: a obtenção do valor de áreas limitadas, pelo menos em partes, por curvas.

Sem a utilização de fórmulas prontas, teremos como objetivo oportunizar aos participantes a possibilidade de pensar como os matemáticos antigos pensaram, de percorrer caminhos similares de resoluções para os problemas propostos. Tomaremos como inspiração a vertente pedagógica das investigações matemáticas em sala de aula.

O cálculo do valor exato de uma área delimitada, pelo menos em partes, por uma curva, será transformado na soma de áreas mais fáceis de calcular e, refinando este cálculo, e transformando em uma soma infinita. Transformar uma quantidade no limite de outras quantidades mais fáceis de calcular é uma ideia fundamental que permeia o Curso de Cálculo Integral.

Outra ideia não apenas do Cálculo, mas da matemática em geral, é a de generalização. Proporcionaremos situações para o trabalho com esta ideia, através das atividades com valores iniciais conhecidos, conduziremos os participantes a sistematizações de soluções com os dados iniciais para chegarem à generalização.

4. Referências

BOTELHO, L.; REZENDE, W. Um breve histórico do conceito de função. **Caderno dá licença**. Instituto de Matemática. Universidade Federal Fluminense, v. 6, p. 63-76, Niterói, 2007. Disponível em: <http://www.uff.br/dalicenca/images/stories/caderno/volume6/ UM_BREVE_HISTÓRICO_DO_CONCEITO_DE_FUNÇÃO.pdf>. Acesso em: 26/03/2013.

CIANI, A. B.; PAPANI, F. M. G. As ideias principais do cálculo diferencial e integral. In: **Anais do VI SEMINÁRIO DE EXTENSÃO DA UNIOESTE**, 2006, Francisco Beltrão: UNIOESTE, 2006.

CIANI, A. B.; PAPANI, F. M. G. As Idéias Principais do Cálculo Diferencial e Integral. In: IX ENEM - Encontro Nacional de Educação Matemática, 2007, Belo Horizonte, MG. **Anais do IX ENEM**. Belo Horizonte: UNI-BH, 2007, p 1-19.

LEITHOLD, L. **O Cálculo com Geometria Analítica.** v.1, 3.ed., São Paulo: HABRA, 1994.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

STEWART, J. **Cálculo.** Vol.1, 6.ed., São Paulo: Cengage Learning, 2011.