ESTUDANTES DE PEDAGOGIA RESOLVENDO PROBLEMAS DE COMBINATÓRIA ENVOLVENDO O PRINCÍPIO ADITIVO E MULTIPLICATIVO[1]

Monalisa Cardoso Silva
UFPE
monalisacardoso08@yahoo.com.br

Resumo:
O presente estudo[1] aborda a investigação de estratégias e desempenho de estudantes do curso de Pedagogia na resolução dos diferentes tipos de problema de *raciocínio combinatório* (*produto cartesiano*, *arranjo*, *permutação* e *combinação*) e a compreensão dos mesmos a respeito da diferença de resolução pelo princípio aditivo ou multiplicativo. Para tal foram aplicados oito problemas combinatórios com vinte estudantes de Pedagogia de uma Universidade pública, no qual os sujeitos pesquisados apresentaram um bom resultado quanto à compreensão dos princípios da Combinatória, não havendo diferença significativa entre o desempenho de um tipo para o outro. Foram utilizadas estratégias válidas com destaque para a listagem. Essa compreensão é importante para que em sua prática os mesmos possam ministrar esse conteúdo desde cedo para os alunos ensinando a partir de estratégias, pois estes têm a capacidade de aprender de forma consistente este conhecimento tão importante para a formação.

Palavras-chave: Raciocínio Combinatório; Princípios; Estudantes de Pedagogia; Estratégias.

1. Introdução

Pessoa e Silva (2012) afirmam que é possível desenvolver o raciocínio combinatório antes da introdução formal deste conteúdo na escola. Os alunos são capazes de desenvolver estratégias para resolver problemas combinatórios dos diferentes tipos.

O que se percebe é que esse conhecimento matemático geralmente só é introduzido formalmente na escola a partir do 2º ano do Ensino Médio, quando a metodologia de ensino se perfaz através da utilização de fórmulas. Pessoa e Borba (2009) apontam que apenas o do tipo *produto cartesiano* é trabalhado explicitamente nas séries iniciais do Ensino Fundamental, embora os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1997) recomendem que os diferentes tipos de problemas combinatórios sejam propostos aos

[1] Estudo desenvolvido sob a orientação da Profa. Rute Borba (UFPE), líder do Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório (Geração).

alunos desde o início do processo de escolarização, sem ênfase na formalização, mas a partir de um trabalho com problemas que envolvam escolha e contagem.

Porém, pesquisas apontam que mesmo esse conhecimento não sendo trabalhado sistematicamente nos anos inicias do Ensino Fundamental, é possível que as crianças desde cedo, através de estratégias de resolução, desenvolvam uma compreensão a cerca da combinatória.

Estudo desenvolvido por Pessoa e Borba (2009) apresenta como um dos seus resultados as estratégias desenvolvidas por 568 alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio ao resolverem problemas de Combinatória (arranjo, combinação, permutação e produto cartesiano). Nesse estudo foram encontradas estratégias bem sucedidas, do tipo listagem, desenho, entre outras.

Estudo desenvolvido por Pessoa e Santos (2011) também encontrou diversas estratégias de alunos ao resolverem problemas combinatórios. Neste estudo, além de serem levantadas as estratégias de alunos do 5º ano do ensino fundamental, buscou-se através de entrevistas, perceber a compreensão que os mesmo tinham ao resolver cada tipo de problema combinatório.

Desta forma, acreditando que além de partir do ensinamento da Combinatória desde cedo com as crianças pelas estratégias que elas apontam, acreditamos que o professor precisa ter esse conhecimento adquirido. Assim, no presente trabalho buscamos encontrar as estratégias de resolução de problemas combinatórios de estudantes do curso de Pedagogia, sendo esses os futuros professores deste conteúdo, investigando quais as dificuldades/facilidades dos estudantes em relação ao seu desempenho de resolução quanto aos problemas que envolvem os princípios aditivo e multiplicativo da Combinatória.

2. Fundamentação Teórica

2.1. Construção de conceitos

Vergnaud estabelece que os conceitos que as crianças desenvolvem estão inseridos em campos conceituais, o definindo como “Um espaço de problemas ou de situações-problema cujo tratamento implica em conceitos e procedimentos de vários tipos que estão em estreita conexão.” (VERGNAUD, 1981, apud GROSSI, 1985, p. 13).

O estudo da Teoria dos Campos Conceituais busca conduzir caminhos que permitam a construção do domínio de conceitos a partir de um ensino significativo e contextualizado que leva em conta a relação teoria-prática, assim como o nível de desenvolvimento cognitivo dos alunos e a formação do professor na realização de interferência na busca de um saber que traga significados aos educandos. Esse processo é longo, uma vez que necessita de interações de diversas áreas do conhecimento, domínio de conteúdo e, sobretudo, de mediador capaz de exercer uma atividade de pesquisa.

Pais (2002, p. 53) defende que a construção de conceitos deve-se estar ajustada ao nível cognitivo do aluno e que deve partir de situações práticas a fim de aproximar o que ele vivência na escola e na vida cotidiana. Dessa forma, o trabalho com as estruturas multiplicativas deve-se basear em uma perspectiva de ensino que propicie o aluno o contato com diversas situações de resolução de problemas, que os possibilitem a refletir e estabelecer relações, assim como, através de conceitos já conhecidos possa transformá-los em novos conceitos.

O conhecimento pelo educador desses variados tipos de problemas torna-se importante para que o mesmo em sua prática diversifique as atividades com problemas de estruturas e raciocínio diferentes, afim de que os alunos possam refletir a respeito de cada situação, procure caminhos e estratégias diversificadas de acordo com cada questão e não se condicione a resolver o problema de maneira mecânica.

2.2.Raciocínio Combinatório e a Combinatória

O *raciocínio combinatório* é um tipo de pensamento que envolve contagem, mas que vai além da enumeração de elementos de um conjunto. Pessoa e Borba (2009), afirmam que o raciocínio combinatório é uma forma de pensar que permite que se levantem possibilidades e sejam analisadas as combinações das mesmas, auxiliando na compreensão de conteúdos matemáticos e de outras áreas do conhecimento.

Merayo (2001) defende que a Análise Combinatória é a técnica de saber quantos objetos há em um conjunto sem realmente ter que contá-los, porque essa técnica não necessita listar ou enumerar todos os elementos que formam o conjunto. Assim, a contagem na Análise Combinatória não é vista meramente como enumeração direta de elementos, mas como determinação de possibilidades sem necessariamente levantar todos os casos possíveis.

Morgado et al (1991) afirmam que pode-se dizer que a Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas. Eles destacam dois tipos de problemas freqüentes em Análise Combinatória: (1) demonstrar a existência de subconjuntos de elementos de um conjunto finito dado e que satisfazem certas condições e (2) contar ou classificar os subconjuntos de um conjunto finito e que satisfazem certas condições dadas.

2.3. Produto Cartesiano, Permutação, Arranjo, Combinação

A Combinatória assume os seguintes significados, classificados por Pessoa e Borba (2008) em uma única organização: produtos cartesianos, combinações, arranjos e permutações. No Quadro 1 estão colocados os *significados* presentes na Combinatória (tipos de problemas), com seus exemplos e *invariantes* (relações e propriedades que se mantém constantes).

Quadro 1. Caracterização dos *significados* (tipos) de problemas combinatórios, exemplos de situações-problema e de *invariantes*.

	Exemplos de *Situações-problema*	*Invariantes*
Produto Cartesiano	Maria tem 3 saias (uma azul, uma preta e uma verde) e 5 blusas (nas cores amarela, bege, branca, rosa e vermelha). Quantos trajes diferentes ela pode formar, combinando todas as saias com todas as blusas?	- Dado dois (*ou mais*) conjuntos distintos (com n e com p elementos), os mesmos serão combinados para formar um novo conjunto. - A natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto.
Permutação simples (sem repetição)	Na estante da minha casa há fotos do meu pai, da minha mãe e do meu irmão, sendo um total de 3 porta-retratos. De quantas formas diferentes posso organizar esses porta-retratos de modo que eles fiquem lado a lado?	- Todos os **n** elementos do conjunto serão usados; - A ordem dos elementos gera novas possibilidades.
Arranjo simples (sem repetição)	Para prefeito de uma cidade se candidataram 3 pessoas (Joana, Vitória e Rafael). De quantas formas diferentes poderemos ter o primeiro e o segundo colocado nesta votação?	- Tendo **n** elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... **p** elementos, com **0**< **p** < **n** - A ordem dos elementos gera novas possibilidades.
Combinação simples (sem repetição)	Três alunos (Mário, Raul e Júnior) participam de um concurso em que serão sorteadas duas bicicletas. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos no concurso?	- Tendo **n** elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos.... **p** elementos, com **0**< **p** < **n** - A ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

Os problemas podem ser resolvidos por diferentes formas de *representação*: desenhos, listagens, árvores de possibilidades, tabelas, fórmulas, dentre outras. As diferentes simbologias ocorrem tanto no que se refere às formas como os alunos resolvem as questões, quanto à forma como a questão é apresentada para ser resolvida.

Pessoa e Silva (2012) afirmam que os invariantes são elementos fundamentais para que se compreendam as lógicas implícitas em cada significado da Combinatória, ou seja, em cada tipo de problema combinatório.

No presente estudo foram levantadas as estratégias utilizadas por estudantes do curso de Pedagogia ao resolverem problemas combinatórios com os princípios aditivo e multiplicativo, investigando o desempenho e compreensão dos mesmos.

3. Objetivo

Analisar as estratégias e o desempenho de estudantes do curso de Pedagogia na resolução dos diferentes tipos de problema de *raciocínio combinatório* (*produto cartesiano*, *arranjo*, *permutação* e *combinação*) e a compreensão dos mesmos a respeito da diferença de resolução pelo princípio aditivo ou multiplicativo.

4. Método

Participaram deste estudo 20 estudantes do curso de Pedagogia de uma Universidade pública, cursando entre o 7º e 9º período. Cada estudante resolveu, individualmente, uma ficha contendo oito problemas envolvendo o *raciocínio combinatório* (dois de cada tipo: *produto cartesiano*, *combinação*, *arranjo* e *permutação*). Os quatro primeiros problemas continham respostas através do princípio aditivo, e os quatro últimos envolviam o princípio multiplicativo na resolução. Foi dito que os problemas poderiam ser resolvidos da forma que quisessem e considerassem melhor: por desenhos, tabelas, gráficos, contas ou quaisquer outras formas. Em seguida foi feita uma análise quantitativa e qualitativa dos acertos totais, dos tipos de respostas e estratégias utilizadas nas resoluções, através das correções das respostas dadas por eles em cada problema.

5. Resultados

Análise dos acertos totais

A seguir veremos o Quadro 2 e a Tabela 1, no qual está exposto de forma ainda quantitativa os acertos totais dos estudantes pesquisados.

Quadro 2: Acertos totais por aluno, por tipo de problema e por princípio combinatório

ALUNOS	PROBLEMAS										TOTAL DE ACERTOS
	PRINCÍPIO ADITIVO					PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO					
	1º PC	2º A	3º C	4º P	Subtotal de acertos	5º PC	6º A	7º C	8º P	Subtotal de acertos	
1	X	X		X	**3**		X			**1**	**4**
2					**0**		X			**1**	**1**
3	X	X	X	X	**4**	X	X	X	X	**4**	**8**
4		X		X	**2**	X				**1**	**3**
5	X	X			**2**		X			**1**	**3**
6	X	X			**2**		X			**1**	**3**
7		X			**1**		X		X	**2**	**3**
8	X	X			**2**					**0**	**2**
9	X			X	**2**		X			**1**	**3**
10	X	X	X	X	**4**	X				**1**	**5**
11	X		X		**2**					**0**	**2**
12					**0**	X				**1**	**1**
13			X		**1**					**0**	**1**
14	X			X	**2**	X	X	X		**3**	**5**
15	X	X			**2**	X				**1**	**3**
16	X	X			**2**	X				**1**	**3**
17	X	X	X	X	**4**	X	X	X	X	**4**	**8**
18					**0**	X		X	X	**3**	**3**
19	X	X			**2**	X	X	X	X	**4**	**6**
20	X	X	X		**3**	X	X	X	X	**4**	**7**

PC=Produto Cartesiano; A=Arranjo; C=Combinação; P=Permutação

Tabela 1: Percentual de acertos por tipo de problema e por princípio da Combinatória

PERCENTUAL DE ACERTOS POR PROBLEMAS							
PROBLEMAS							
PRINCÍPIO ADITIVO				PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO			
1º PC	2º A	3º C	4º P	5º PC	6º A	7º C	8º P
70%	65%	30%	35%	55%	55%	30%	30%

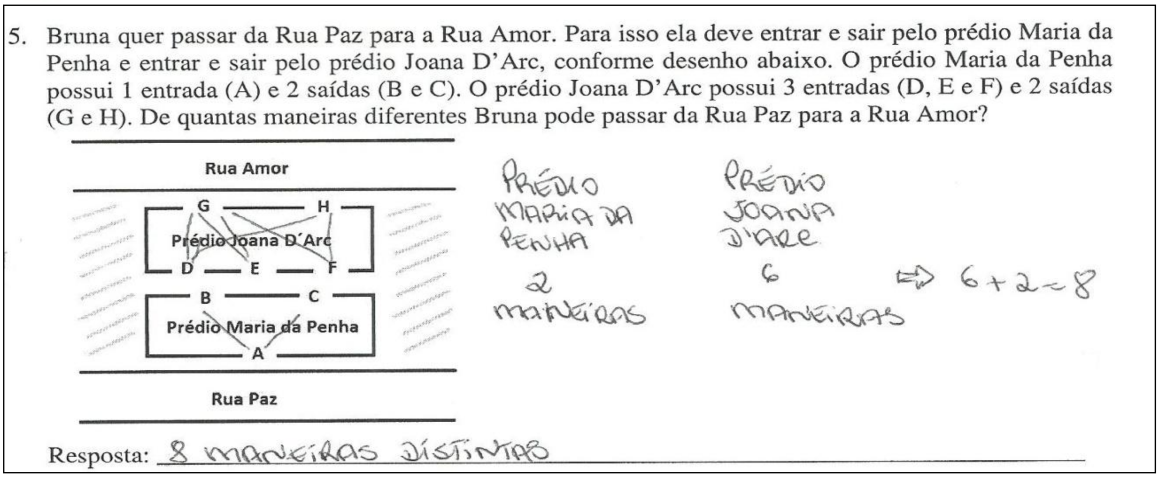
PC=Produto Cartesiano; A=Arranjo; C=Combinação; P=Permutação

Observando o Quadro 2 e a Tabela 1, percebemos que por tipo de problema, os de produto cartesiano e arranjo aparecem como os de mais fácil resolução, tanto quando envolve o principio aditivo ou multiplicativo. Os demais tipos de problemas aparecem com percentuais semelhantes nos dois tipos de princípios, podendo-se observar que quando envolve o principio multiplicativo o percentual de acertos diminui nos problemas que envolvem produto cartesiano e arranjo, porém com pouca diferença.

Essa maior facilidade em resolver os problemas de produto cartesiano, também é encontrada por Pessoa e Silva (2012), em uma pesquisa realizada com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental, evidenciando a hipótese de pesquisadores da área de que esse tipo de problema combinatório é o único trabalhado antes do Ensino Médio, o que justifica a dificuldade com os outros significados da Combinatória que somente são introduzidos de maneira formal, no final da escolarização básica através de fórmulas.

De uma forma geral os estudantes que obtiveram sucesso nas questões que apresentavam o princípio aditivo erravam quando apresentavam o princípio multiplicativo, demonstrando dificuldade na listagem das possibilidades, já que nas questões que envolvem esse principio envolviam todas as possibilidades possíveis entre os dois conjuntos.

Outra dificuldade encontrada, mas não em grande quantidade, porém importante de se destacar, pode ser observada com o exemplo do aluno 6 abaixo. Esse erro pode ser explicado pelo fato de não compreender que as formas de resolução eram diferentes, pois nos casos que envolvem o principio multiplicativo todas as possibilidades dos dois conjuntos de combinações são realizadas o que apresentava uma confusão na listagem das possibilidades ou na operação matemática utilizada.


5. Bruna quer passar da Rua Paz para a Rua Amor. Para isso ela deve entrar e sair pelo prédio Maria da Penha e entrar e sair pelo prédio Joana D'Arc, conforme desenho abaixo. O prédio Maria da Penha possui 1 entrada (A) e 2 saídas (B e C). O prédio Joana D'Arc possui 3 entradas (D, E e F) e 2 saídas (G e H). De quantas maneiras diferentes Bruna pode passar da Rua Paz para a Rua Amor?

Resposta: 8 MANEIRAS DISTINTAS

Figura 1. Aluno 6 resolvendo os problemas de produto cartesiano

De maneira geral não ouve diferença expressiva no quantitativo de acerto total entre os dois tipos de princípios combinatórios, destacando-se mais a diferença entre os tipos de problemas, fato este encontrado em pesquisa com estudantes desde os anos iniciais até no ensino superior, como no estudo atual. Isso mostra a necessidade de um ensino sistemático enfatizando os invariantes de cada significado da combinatória, assim como foi trabalho em estudos como o de Pessoa e Silva (2012) e Pessoa e Santos (2012).

Tipos de respostas e de estratégias apresentadas pelos alunos

Como afirmado na análise de desempenho, para a análise quantitativa foram considerados como acertos os acertos totais, entretanto, entre todas as respostas apresentadas foram encontradas diferentes possibilidades, estratégias e tipos de respostas que fazem com que se reflita sobre como os alunos pensam em relação à Combinatória.

Os tipos de respostas mais freqüentes dos alunos em relação aos problemas propostos estão apresentados no Quadro 3.

Quadro 3: Tipos de respostas apresentadas pelos alunos e a pontuação utilizada para analisar o desempenho ao resolverem os problemas de *Combinatória* propostos.

Pontuação	Tipo de Resposta

0 ponto	Em branco; Apenas resposta incorreta; Resposta incorreta, sem o estabelecimento de relação combinatória
1 pontos	Lista apenas uma possibilidade
2 pontos	Lista mais de uma possibilidade, mas não esgota todas
3 pontos	Apenas resposta correta; Resposta correta explicitando estratégia

Com esta pontuação estabelecida, de forma que cada aluno poderia atingir um total máximo de 24 pontos, dependendo da relação e compressão que os mesmos apresentaram, observaremos o nível que se encontra o grupo pesquisado.

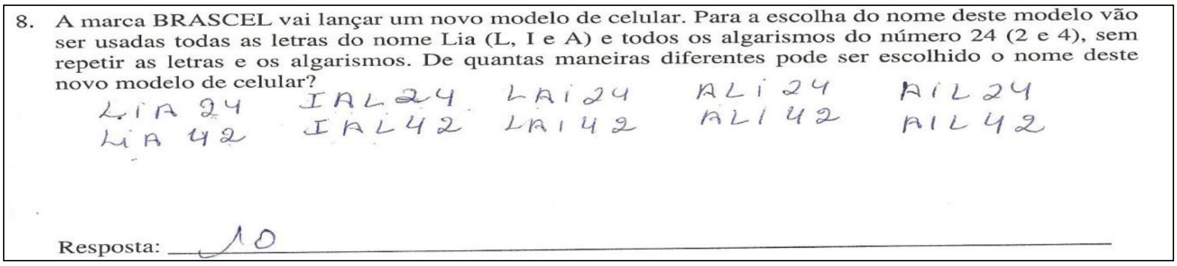
Tabela 2: Quantitativo de pontos obtidos pelos alunos por tipo de resposta

ALUNOS	PROBLEMAS								TOTAL DE PONTOS
	PRINCÍPIO ADITIVO				PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO				
	1º PC	2º A	3º C	4º P	5º PC	6º A	7º C	8º P	
1	3	3	2	3	2	3	2	2	19
2	2	2	2	2	2	3	2	0	15
3	3	3	3	3	3	3	3	3	24
4	2	3	2	3	3	2	2	2	19
5	3	3	2	2	0	3	2	3	18
6	3	3	2	2	2	3	2	2	19
7	0	3	0	0	0	3	0	3	09
8	3	3	2	2	2	2	2	2	18
9	3	0	0	3	0	3	0	0	09
10	3	3	3	3	3	0	0	0	15
11	3	2	3	2	3	2	0	2	17
12	0	0	0	0	3	0	0	0	03
13	3	2	2	3	3	3	3	2	21
14	0	0	3	0	0	0	0	0	03
15	3	3	2	0	3	0	0	0	11
16	3	3	2	2	3	2	2	2	19
17	3	3	3	3	3	3	3	3	24
18	2	0	0	2	3	2	3	3	14

19	3	3	2	3	3	3	3	3	23
20	3	3	3	2	3	3	3	3	23

PC=Produto Cartesiano; A=Arranjo; C=Combinação; P=Permutação

Em uma análise qualitativa, podemos observar através dos tipos de respostas utilizadas pelos alunos, muitos daqueles que não obtiveram o acerto total da questão, apresentaram respostas que indicam o desenvolvimento do raciocínio combinatório em evolução, isto é, mesmo não acertando, suas respostas davam indícios da sua compreensão do problema, entretanto necessitando de aprimoramento, principalmente, na sistematização da resposta. Com exemplo do aluno 14 no problema de permutação, que lista várias possibilidades, faltando apenas duas para esgotar.


8. A marca BRASCEL vai lançar um novo modelo de celular. Para a escolha do nome deste modelo vão ser usadas todas as letras do nome Lia (L, I e A) e todos os algarismos do número 24 (2 e 4), sem repetir as letras e os algarismos. De quantas maneiras diferentes pode ser escolhido o nome deste novo modelo de celular?

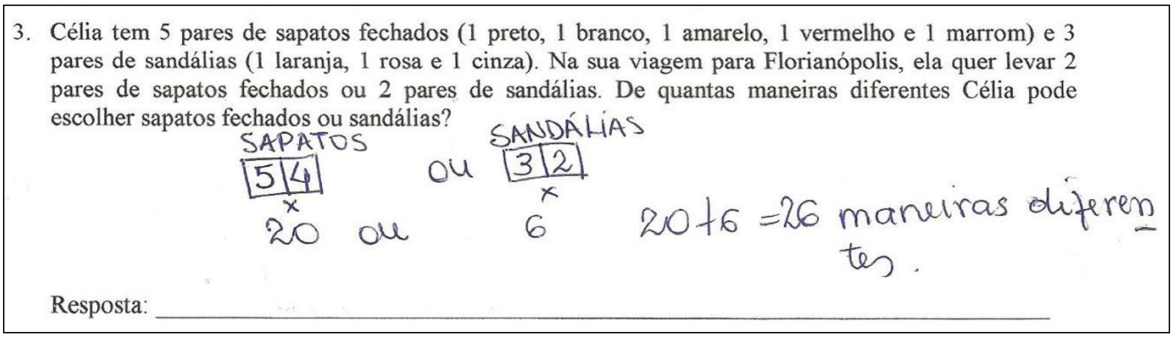
LIA 24 IAL24 LAI24 ALI24 AIL24
LIA 42 IAL42 LAI42 ALI42 AIL42

Resposta: 10

Figura 2. Aluno 14 resolvendo o problema de permutação com o princípio multiplicativo

Analisando de maneira geral, a média de pontos obtidos ficou em 16, 15 pontos por aluno, porém pode-se observar que a pontuação oscilou de 3 para 24 pontos. Desta forma entende-se que os alunos de maneira geral, apresentaram um desempenho regular atentando-se para os tipos de respostas, que muitas vezes chegaram próximo do resultado correto.

Uma das dificuldades observadas é a não percepção das diferenças de invariantes para cada tipo de problema. Alguns alunos como o aluno 4, por possuírem conhecimento dos problemas do tipo cartesiano que se resolve através de uma multiplicação direta, utiliza o mesmo procedimento para o de combinação.


3. Célia tem 5 pares de sapatos fechados (1 preto, 1 branco, 1 amarelo, 1 vermelho e 1 marrom) e 3 pares de sandálias (1 laranja, 1 rosa e 1 cinza). Na sua viagem para Florianópolis, ela quer levar 2 pares de sapatos fechados ou 2 pares de sandálias. De quantas maneiras diferentes Célia pode escolher sapatos fechados ou sandálias?

SAPATOS $\boxed{5}\boxed{4}$ × 20 ou SANDÁLIAS $\boxed{3}\boxed{2}$ × 6

20+6 =26 maneiras diferentes.

Resposta: ______

Figura 3. Aluno 4 resolvendo o problema de combinação com o princípio aditivo

De maneira geral percebe-se pelos tipos de respostas, que o insucesso em algumas questões não se deu pela não compreensão de diferença entre os princípios da combinatória, mas sim na listagem das possibilidades ou no cálculo quando envolvia o princípio multiplicativo.

Tenho em vista esses resultados apresentados, podemos perceber que o raciocínio combinatório se faz presente na compreensão multiplicativa que os alunos possuem, porém o que se faz necessário é a percepção dos invariantes e a utilização de estratégias válidas para cada tipo de problema e princípio da Combinatória.

Referente às estratégias apresentadas pelos alunos pesquisados, observemos o Quadro 4 e a Tabela 3 com a frequência que estas foram utilizadas a seguir:

Quadro 4: Estratégias apresentadas pelos alunos do Grupo Experimental ao resolverem os problemas de *Combinatória* propostos.

1. Não explicitou estratégia	Quando o aluno apenas forneceu a resposta, correta ou incorreta. Desse modo fica difícil precisar com certeza qual estratégia foi utilizada para a resolução.
2. Árvore de possibilidades	O aluno construiu uma árvore de possibilidades, podendo apresentar uma resposta *correta* ou *incorreta*, *com ou sem sistematização dos elementos, com* ou *sem esgotamento de possibilidades*.
3. Quadro / diagrama e cálculo	O aluno construiu um quadro ou um diagrama para representar o processo de solução e utilizou um cálculo pra juntar as possibilidades. Pode haver resposta *correta* ou *incorreta*, *com* ou *sem sistematização*, *com* ou *sem esgotamento de possibilidades*.
4. Listagem de possibilidades	O aluno listou as possibilidades de forma escrita, com os nomes ou com símbolos, podendo a resposta ser *correta* ou *incorreta*, *havendo*, ou *não*, o *estabelecimento de relação* e/ou o *esgotamento de todas as possibilidades*.
5. Listagem de possibilidade e	O aluno listou as possibilidades de forma escrita e em seguida fez uma adição, podendo a resposta ser *correta* ou *incorreta*, *havendo*, ou *não*, o

adição	*estabelecimento de relação* e/ou o *esgotamento de todas as possibilidades*.
6. Listagem de possibilidades e multiplicação	O aluno listou as possibilidades de forma escrita e em seguida fez uma multiplicação, podendo a resposta ser *correta* ou *incorreta, havendo*, ou *não*, o *estabelecimento de relação* e/ou o *esgotamento de todas as possibilidades*.
7. Cálculo Inadequado	O aluno relacionou o problema algum cálculo, entretanto, em situações nas quais ele não se aplica. A resposta é *incorreta sem relação*.
8. Cálculo Adequado	O aluno relacionou o problema a um cálculo, com a possibilidade correta de seu uso. A resposta pode ser *correta* ou *incorreta*.

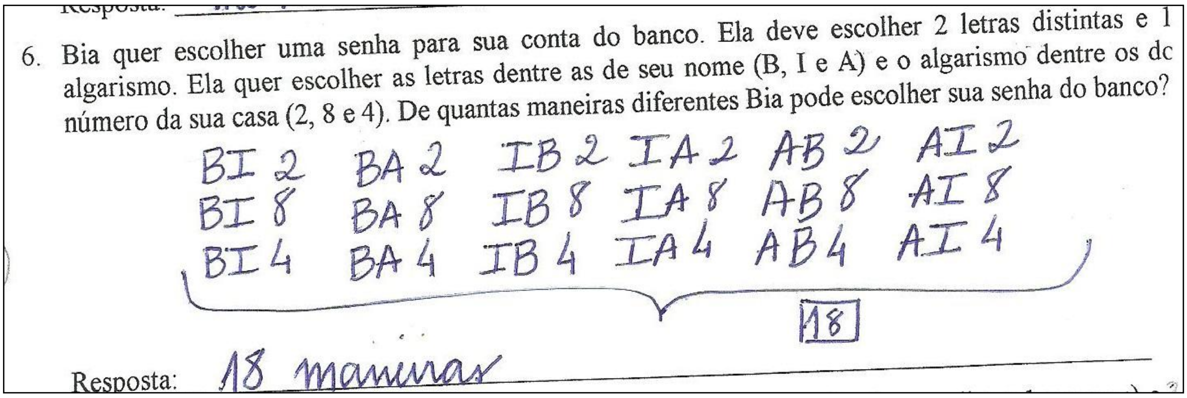
Tabela 3: Percentuais de tipo de estratégias por tipo de problema e por principio combinatório

				Não explicitou estratégia	Árvore de possibilidades	Quadro / Diagrama e cálculo	Listagem	Listagem e adição	Listagem e multiplicação	Cálculo inadequado	Cálculo adequado
Problemas	**Princ. Aditivo**	PC	1º	30	5	20	5	5	5	10	20
		A	2º	35	5		10	25	5	5	15
		C	3º	30	5		10	20		35	
		P	4º	25	10		15	20		25	5
	Princ. Multip.	PC	5º	30		15	30		5	10	10
		A	6º	35	10	5	30			20	
		C	7º	40	5	5	10	5	5	25	5
		P	8º	30	10		30	5	5	20	

PC=Produto Cartesiano; A=Arranjo; C=Combinação; P=Permutação

Os estudantes pesquisados utilizaram em suas resoluções, diferentes tipos de estratégias, entretanto, pode-se observar que houve um percentual alto de alunos que *não as explicitaram*, podendo estas ser apenas resposta correta ou incorreta ou em branco. Essa é uma característica de alunos em níveis de escolarização mais avançado que resistem a usar procedimentos informais para resolver problemas matemáticos por acreditarem em um caminho único a se chegar aos resultados, como as fórmulas ou até mesmo por vergonha de tentar e errar. Em sua maioria, os alunos que não utilizaram estratégia foram aqueles que não se saíram bem na resolução dos problemas.

Entre os procedimentos informais utilizados, a *listagem* aparece com destaque, sendo utilizada na resolução para todos os tipos de problemas, apresentando-se como uma estratégia válida para se chegar à resposta correta. Este procedimento desde cedo aparece como sendo uma estratégia utilizada pelos alunos, como em estudos anteriores, precisando apenas da sistematização para que de forma organizada, chegue-se ao resultado correto. Com exemplo o aluno 3 que obteve êxito em todas as questões, utilizando a listagem em quase todas as resoluções.


6. Bia quer escolher uma senha para sua conta do banco. Ela deve escolher 2 letras distintas e 1 algarismo. Ela quer escolher as letras dentre as de seu nome (B, I e A) e o algarismo dentre os do número da sua casa (2, 8 e 4). De quantas maneiras diferentes Bia pode escolher sua senha do banco?

BI 2 BA 2 IB 2 IA 2 AB 2 AI 2
BI 8 BA 8 IB 8 IA 8 AB 8 AI 8
BI 4 BA 4 IB 4 IA 4 AB 4 AI 4

$\boxed{18}$

Resposta: 18 maneiras

Figura 4. Aluno 3 resolvendo o problema de arranjo com o princípio multiplicativo

Os outros tipos de estratégias apresentaram percentuais baixos de utilização, demonstrando principalmente que mesmo sendo uma turma do ensino superior , eles não possuíam o domínio da multiplicação nesse conteúdo e preferiram não utilizar ou quando utilizavam, era de forma inadequada.

O uso do *cálculo inadequado* também apareceu em todos os tipos de problemas, mostrando o quanto, muitos alunos confundem a Combinatória como apenas um único tipo de problema, o que mais uma vez nos leva a defender a necessidade de um ensino que atente na percepção dos invariantes. Essa dificuldade expressa pelos estudantes de pedagogia, muitas vezes pode refletir na sua atuação profissional em sala de aula, por não possuir domínio deste conteúdo, o que muitas vezes o exclui do programa escolar de seus educandos.

Boa parte dos alunos que apresentaram dificuldades na resolução dos problemas com o principio multiplicativo, utilizaram a listagem para a resolução, entretanto, como se tratava de uma listagem com mais elementos, muitos se perdiam na sistematização dos mesmos.

Outra forma de resolução encontrada nos protocolos foi a listagem de cada subconjunto e depois a soma das possibilidades. Quando esta estratégia foi utilizada com os problemas que possuíam o principio aditivo, no qual existia a partícula “ou”, os estudantes chegavam ao resultado correto. Porém os mesmo não tinham a compreensão de que com o principio multiplicativo poderia ser resolvido de forma semelhante, entretanto multiplicando as possibilidades de cada conjunto em vez de somar. Desta forma os alunos optaram em listar todas as possibilidades envolvendo todos os elementos, sendo uma estratégia válida, porém de difícil sistematização.

9. Conclusão

Diante do que foi observado, os estudantes de Pedagogia pesquisados apresentaram possuir compreensão da diferença de raciocínio existente na resolução de problemas envolvendo os princípios da combinatória: o aditivo e o multiplicativo.

Essa conclusão é afirmada pelo comparativo percentual de acertos totais entre as questões dos dois tipos de princípios, no qual de forma geral não oscilou no quantitativo de diferença. Referente ao desempenho dos estudantes pode-se concluir que o raciocínio combinatório se faz presente em seus conhecimentos, no qual a maioria deles apresentou um resultado satisfatório em suas resoluções.

Mesmo sendo alunos do ensino superior o uso da *sistematização* e da *listagem* apontam nos resultados, como sendo o caminho de melhor facilidade pelos alunos de se chegar ao resultado dos problemas, pois nenhum dos alunos apresentou o uso de fórmulas na resolução e mesmo assim chegavam ao resultado correto listando ou utilizando outro tipo de estratégia.

O uso da multiplicação inadequada na resolução dos problemas, nos atenta a refletir sobre a não percepção dos diferentes invariantes existentes entre os problemas combinatórios por alguns dos estudantes pesquisados. Essa falta de compreensão do professor dos anos iniciais, muitas vezes é levada à sala de aula de seus alunos, tornando a Combinatória restrita ao problema de produto cartesiano que é resolvido por uma multiplicação direta.

Conhecer as características de cada problema demonstra ser de extrema importância, pois compreendendo os invariantes, elementos fundamentais para que se compreendam as lógicas implícitas em cada significado da combinatória, os mesmos busquem a resolução correta, utilizando a estratégia adequada, esgotando todas as possibilidades, podendo perceber suas regularidades.

Desta forma podemos concluir que os estudantes pesquisados apresentaram um bom resultado quanto à compreensão dos princípios da Combinatória, não havendo diferença expressiva entre o desempenho de um tipo para o outro, no qual foram utilizadas estratégias válidas.

Essa compreensão é importante para que em sua prática os mesmos possam ministrar esse conteúdo desde cedo para os alunos ensinando a partir de estratégias, e não logo introduzindo fórmulas (embora estas sejam importantes em determinadas situações, como, por exemplo, para se resolver problemas cujos resultados são números de valores altos, mas podem ser vistas em anos escolares mais avançados), pois estes têm a capacidade de aprender de forma consistente este conhecimento tão importante para a formação.

10. Referências.

BRASIL, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática**. 1º e 2º ciclos. Brasília: Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

MERAYO, Felix. **Matemática Discreta**. Madri: Editora Thomson Paraninfo S.A., 2001.

MORGADO, Augusto, PITOMBEIRA DE CARVALHO, João, PINTO DE CARVALHO, Paulo. & FERNANDEZ, Pedro. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: Graftex, 1991.

GROSSI, Esther Pillar. **Psychogénése et Apprentissage du Concept de Multiple.** 1995. 526 f. Tese (Doutorado em Psicologia Cognitiva)- École des Hautes Études en Sciences Sociales, Paris, 1985.

PAIS, Luis Carlos. **Uma análise do significado da utilização de recursos didáticos no ensino da Geometria**. www.anped.org.br/23/textos/1919t.pdf, 23ª Reunião, Caxambu, 2000.

PESSOA, Cristiane. & BORBA, Rute. Como crianças de 1ª à 4ª série resolvem problemas de raciocínio combinatório? **Anais do 2º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática.** Recife, 2008.

PESSOA, Cristiane & BORBA, Rute. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série.** ZETETIKÉ – Cempem – FE – Unicamp, v. 17, jan-jun. 2009.

PESSOA, Cristiane & SANTOS, Laís. **O que fazem alunos do 5º ano de escolarização básica diante de situações combinatórias?** Anais do XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática. Recife 2011.

PESSOA, Cristiane & SANTOS, Laís. **Listagem, invariantes, sistematização e generalização: um caminho para o ensino de combinatória em uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental.** Anais do III Simpósio Internacional de Educação Matemática. Fortaleza, 2012.

PESSOA, Cristiane & SILVA, Monalisa. **Invariantes, generalização, sistematização e estratégias bem sucedidas: o ensino da combinatória no 9º ano do Ensino Fundamental.** Anais do III Simpósio Internacional de Educação Matemática. Fortaleza, 2012.