QUADRO TRIGONOMÉTRICO: UMA FERRAMENTA PARA O ESTUDO DAS FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS

André Luiz Mognol Drabach
Editora Peason Education do Brasil
andre.drabach@gmail.com

Resumo:
Este trabalho é resultado do desenvolvimento de atividades que foram aplicadas numa escola particular da região metropolitana de Curitiba para alunos de 2° ano do Ensino Médio, com objetivo de dar significado à construção dos gráficos das funções trigonométricas. As práticas de laboratório de matemática podem ser aplicadas de várias formas: trazendo problemas contextualizados, proporcionando estruturas de apoio para melhorar o raciocínio e a compreensão e possibilitando a manipulação de material concreto. Assim, surgiu a ideia de elaborar o quadro trigonométrico, onde fosse possível articular conceitos estudados previamente, interpretação e construção de objeto trabalhado que pudesse auxiliar na compreensão dos principais conceitos de funções trigonométricas. Os recursos usados foram o livro didático, o quadro trigonométrico e o laboratório de matemática. Após a realização das atividades foi possível constatar que quando se trabalha com material manipulável como ferramenta de apoio didático, as dificuldades em refletir sobre definições e conceitos foram na sua maioria superadas.
Palavras-chave: função trigonométrica; quadro trigonométrico; laboratório.

1. Introdução

O presente trabalho tem como objetivo a utilização de práticas pedagógicas diferenciadas em sala de aula, pois elas, segundo Costa (1997), despertam o interesse dos alunos pelo conteúdo a ser estudado. A autora avalia duas abordagens metodológicas no ensino da trigonometria: uma é iniciada com o uso de tecnologias e finalizada com materiais concretos; a outra possui um processo exatamente contrário. Ainda segundo Costa, o aprendizado de funções trigonométricas tem grau de complexidade elevado e exige a utilização de materiais manipuláveis.

Mendez (2001) propõe uma abordagem metodológica que coloca o contexto histórico da Matemática como principal ferramenta no processo de ensino-aprendizagem, enquanto Nascarato (2003) analisa as diferentes abordagens para a relação seno encontradas em livros didáticos do século XX e faz críticas quanto à metodologia empregada nesses manuais.

O trabalho elaborado por Brito e Morey (2004, p. 31) objetiva verificar as dificuldades em Geometria e Trigonometria sentidas por professores do ensino fundamental. Para essas autoras, as principais dificuldades encontradas pelos professores estão ligadas à formação escolar das décadas de 70 e 80, caracterizadas por elas pelo descaso com a trigonometria, pela formalização precoce de conceitos e pela memorização de procedimentos sem sua respectiva compreensão.

Foi nessa análise de ensaios que apresentam metodologias diferenciadas no ensino de funções trigonométricas e na busca por novas metodologias para ensiná-las, com base nas dificuldades dos alunos e professores, que me deparei com o quadro trigonométrico.

2. Metodologia

O professor desenvolveu os arquivos necessários para a montagem do quadro trigonométrico e incentivou os educandos para construí-lo no laboratório de matemática. No início, os alunos são convidados a irem ao laboratório de matemática, onde há uma aula inicial, necessária para a compreensão do processo de construção do quadro trigonométrico. Em seguida constrói-se essa ferramenta matemática e na sequência a utiliza para o desenvolvimento de conceitos da trigonometria.

Trabalhar com materiais manipuláveis propicia o desenvolvimento de várias habilidades, mas a principal é aperfeiçoamento do raciocínio lógico-matemático para aplicá-lo de forma similar a um jogo, a fim de possibilitar maior construção de exemplos e resoluções de maior quantidade de exercícios.

O trabalho foi planejado e realizado em três etapas, no total de seis aulas. Etapa 1: Foi realizada em duas aulas de 50 minutos e dividida em dois momentos. No primeiro momento foi feita uma breve revisão sobre as razões trigonométricas e um convite que foi muito bem-aceito pelos alunos; no segundo momento, as atividades foram distribuídas para eles resolverem em grupos. Etapa 2: Foi realizada em duas aulas de 50 minutos. Cada aluno recebeu uma folha contento uma tabela a ser preenchida e outra com o plano cartesiano. Em seguida foi inicializado o processo de construção do gráfico e estudo de elementos essenciais da função trigonométrica $y = a + b \cdot \operatorname{sen} c$. Etapa 3: Foi feita em duas aulas de 50 minutos. Os alunos construíram os gráficos das outras funções trigonométricas e suas variações. Por fim, foi proposto que os alunos comparassem os gráficos obtidos das funções seno, cosseno e tangente com os das suas inversas.

3. Desenvolvimento

Etapa 1: Inicialmente, foram relembrados conceitos relacionados a razões trigonométricas no triângulo retângulo e as formas de obtenção de valores para seno, cosseno e tangente no ciclo trigonométrico. Em seguida, os alunos foram estimulados a desenvolver um material concreto que pudesse auxiliar na obtenção dos valores das razões trigonométricas, com base no seguinte questionamento: (P) — Já se sabe que para construção de gráfico necessita-se de muitos valores, ou seja, pares ordenados, os quais geralmente são representados numa tabela. Agora, se construíssemos o gráfico de uma função $y = \text{sen}\, x$, em que os valores de seno dependem do ângulo correspondente, como poderíamos obter, de forma rápida e com certa precisão, os valores de seno para grande quantidade de ângulos?

O professor encaminhou os alunos para o laboratório de matemática, solicitou a organização em grupos de até cinco integrantes e, após uma aula de revisão dos conceitos básicos das razões trigonométricas, entregou uma prancheta de madeira (tipo Eucatex) com furo no centro, uma folha tamanho A4 com uma circunferência de diâmetro igual a 2 unidades e quatro retas paralelas duas a duas com escalas definidas (figura 1) e outra folha transparência com duas retas perpendiculares e uma circunferência de diâmetro 1 unidade (figura 2) e um percevejo, conforme esquema abaixo.

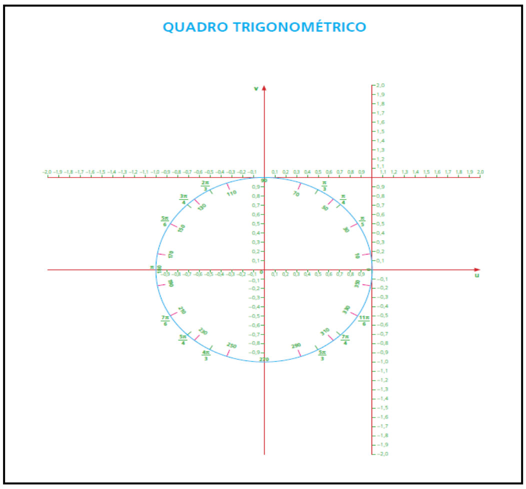


Figura 1: Folha-base do quadro

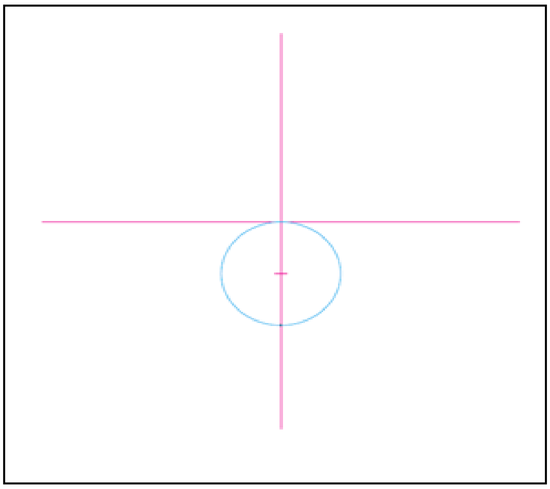


Figura 2: Folha transparência

Para Lorenzato (2006, p. 6), para aqueles que possuem visão atualizada de educação matemática o laboratório de ensino é grata alternativa metodológica porque, mais do que nunca, o ensino de matemática se apresenta com necessidades especiais e o laboratório de matemática deve prover a escola para atender a essas necessidades.

No laboratório de matemática, com os alunos organizados em grupos, o professor orientou e acompanhou o processo de construção do quadro trigonométrico, auxiliando individualmente na elaboração correta dessa ferramenta matemática. A montagem do quadro trigonométrico, dispondo dos materiais fornecidos, é relativamente simples, pois basta o aluno colar a folha-base A4 na prancheta e em seguida fixar, com o percevejo, o ponto em destaque da folha transparência no centro da circunferência da folha A4. As figuras abaixo representam o esquema de como deveria ficar o quadro trigonométrico montado e um exemplo de construção realizada por um dos alunos.

Figura 3: Construção de um aluno

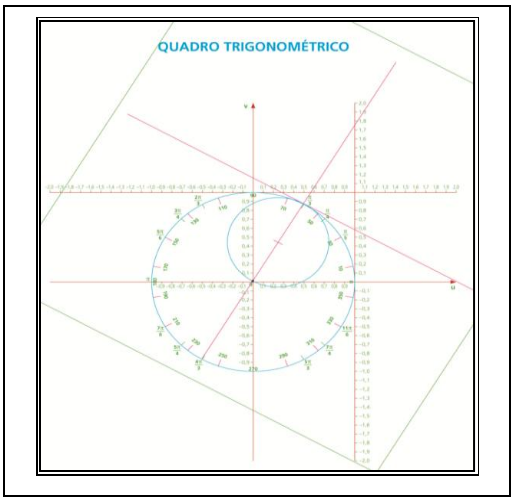


Figura 4: Quadro de referência

Dispondo do quadro trigonométrico, o professor solicitou aos alunos que refletissem sobre os significados dos eixos nomeados por u e v e fez alguns questionamentos, instigando-os a pensar: (P) — Pensem sobre o ciclo trigonométrico: qual o significado da intersecção da circunferência menor (azul) e os eixos u e v? A maior parte dos alunos conseguiu perceber que os eixos u e v representavam o seno e o cosseno do ângulo formado pela reta que suporta o diâmetro da circunferência menor (transparência).

As provocações continuaram: (P) — A reta traçada na vertical, paralela ao eixo v, representa que razão trigonométrica? Que tal comparar com o ciclo trigonométrico e associar as grandezas nesse referencial? Nesse momento, muitos alunos se manifestaram. Alguns alunos afirmaram: (A) — Professor, a reta é tangente à circunferência, portanto ela representa a tangente do ângulo em questão. O professor, concordando com a resposta dada, construiu o seguinte esquema explicativo para reforçar as constatações dos alunos.

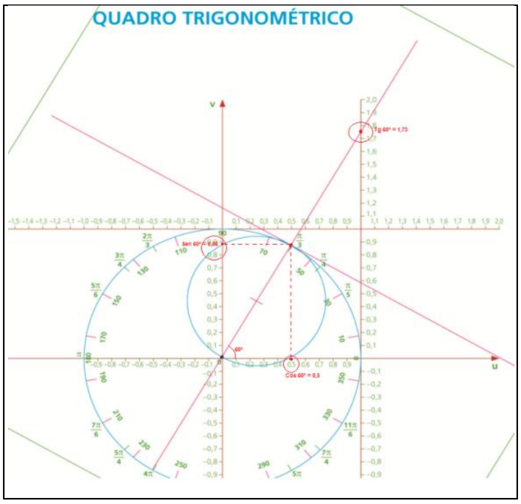


Figura 5: Esquema de obtenção das razões trigonométricas

Após construção do quadro trigonométrico, associado ao ciclo trigonométrico, o qual foi estudado previamente, e compreendendo o processo de determinação dos valores de seno, cosseno e tangente, o professor questionou: (P) — Será que esse quadro trigonométrico fornece os valores das razões trigonométricas corretamente? Vamos testar! Nesse momento os alunos foram convidados a determinar valores de seno, cosseno e tangente para os ângulos notáveis e em seguida comparar com os já sabidos da tabela. Para essa atividade eles puderam utilizar a calculadora, devido aos valores das raízes não inteiras.

Alguns alunos questionaram, pois algumas medidas que obtiveram com o quadro trigonométrico eram diferentes daquelas que já conheciam da tabela de valores notáveis. Esse processo os ajudou a esclarecer que em atividades experimentais os erros de medidas são comuns, porém insignificantes para o objetivo da atividade. Para Lorenzato (2006, p. 14), a atividade laboratorial pode induzir o aluno a aceitar como verdadeiras as propriedades matemáticas que lhe foram propiciadas por meio do material manipulável.

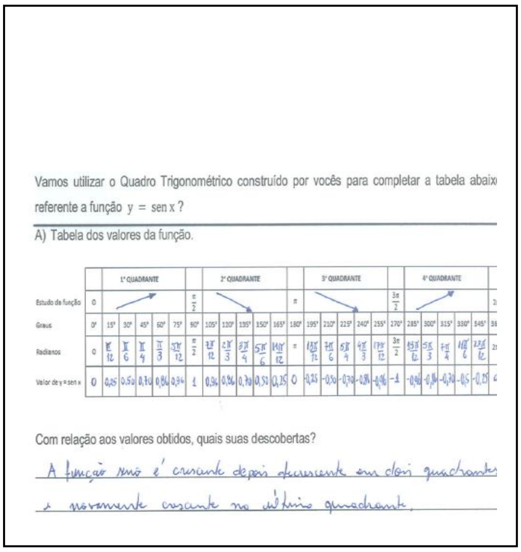
O desenvolvimento do quadro trigonométrico favorece a inclusão, pois possibilita a interação e promove a união e a cooperação no projeto, no qual em pequenos grupos todos têm que opinar sobre a montagem, as metas e os conteúdos abordados. Para Lopes (2005, p. 20), a oferta de brinquedos eletrônicos e os atraentes jogos à disposição no mercado desmerecem o artesanato, colocando no lugar da satisfação de criar o gosto pelo consumo exacerbado, trocando-se os valores entre o ter e o fazer.

Novos questionamentos surgiram e o diálogo continuou. (P) — Qual a importância que o quadro trigonométrico tem na construção do gráfico de uma função trigonométrica? Depois de um tempo reagiram e após algumas discussões com inserções do professor chegaram a um consenso sobre a necessidade de conhecer grande quantidade de medidas de seno, por exemplo, para a construção do gráfico. Assim, com o quadro trigonométrico, esses valores e os processos de crescimento e decrescimento da curva ficam evidentes.

Etapa 2: O objetivo inicial foi enfatizar a importância do quadro trigonométrico na construção e interpretação dos gráficos das funções circulares. A pergunta básica foi: (P) — Vamos construir os gráficos das funções trigonométricas usando o quadro trigonométrico que vocês construíram na aula passada? Como devo fazer? Por onde começar? Para auxiliar no desenvolvimento, o professor construiu o gráfico junto aos alunos, utilizando a lousa interativa digital, uma tabela parcialmente preenchida em conjunto e um plano cartesiano sem escalas, conforme mostrado nas figuras 6 e 7. O entregou individualmente aos alunos as tabelas, e de posse desses materiais, os alunos, muito interessados, começaram a desenvolver a atividade proposta.

Para facilitar a compreensão e o desenvolvimento da atividade foi acordado, entre os grupos, o uso de escala-padrão, que no caso seria com variação de 15 graus. O professor foi orientando e auxiliando individualmente os alunos, sanando dúvidas referentes à leitura dos valores de seno, cosseno e tangente no quadro trigonométrico, à conversão de graus para radianos, à construção da escala no eixo horizontal, à representação dos pares ordenados no plano cartesiano e ao traçado da curva dos senos e cossenos.

Alguns alunos questionaram: (A) — Professor, o que seria o item na tabela chamado estudo da função? O professor se vê frente a uma ótima oportunidade de questionar e fazer com que o aluno relembre conceitos básicos de funções. Assim, ele devolve a pergunta: (P) — Qual o assunto que estamos estudando? Os alunos ficam quietos frente ao questionamento do professor, mas logo um responde: (A) — Funções trigonométricas. (P) — E quais os principais tópicos estudados em funções? Nesse momento vários alunos participaram e após algum tempo de discussão chegaram ao consenso de que o item da tabela refere-se ao crescimento e decrescimento da função. Segundo Moreira (2006, p. 70) o professor deve fazer perguntas com postura investigativa, pois só assim está agindo como um facilitador, tentando conhecer a forma com que o aluno interpreta o problema. Os valores obtidos por um aluno encontram-se na figura 6.



Vamos utilizar o quadro trigonométrico construído por você para completar a tabela abaixo referente à função $y = \text{sen}\, x$?

Tabela dos valores da função.

		1º QUADRANTE					
Estudo da função	0						$\frac{\pi}{2}$
Graus	0º	15º	30º	45º	60º	75º	90º
Radianos	0						$\frac{\pi}{2}$
Valor de y = sen x							

	2º QUADRANTE					
Estudo da função						π
Graus	105º	120º	135º	150º	165º	180º
Radianos						π
Valor de y = sen x						

	3º QUADRANTE					
Estudo da função						$\frac{3\pi}{2}$
Graus	195º	210º	225º	240º	255º	270º
Radianos						$\frac{3\pi}{2}$
Valor de y = sen x						

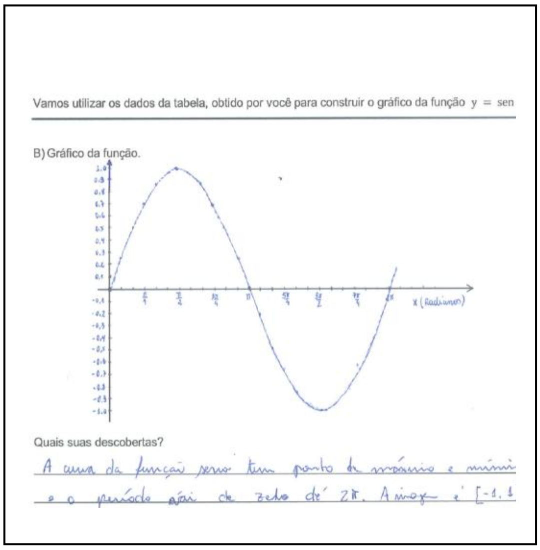
	4º QUADRANTE					
Estudo da função						2π
Graus	285º	300º	315º	330º	345º	360º
Radianos						2π
Valor de y = sen x						

Com relação aos valores obtidos, quais as suas descobertas?

A função é crescente no primeiro quadrante, decrescente no segundo e terceiro e novamente crescente no quarto quadrante.

Figura 6: Resposta do aluno

Novos questionamentos surgiram e o diálogo continuou. (P) — E agora, como proceder para construir corretamente o gráfico da função? A maior parte dos alunos sentiu dificuldades na montagem da escala do gráfico, alguns representaram valores em graus no eixo das abscissas, enquanto outros em radianos. Essa dificuldade já havia sido prevista pelo professor e nesse momento ocorreu a interferência dele, justificando a necessidade de construir a escala horizontal em radianos. Com base na dificuldade evidenciada, o professor novamente questiona: (P) — Quais os passos utilizados para a construção dos gráficos das funções vistas anteriormente? Que tal construir a escala com base nos dados da tabela! Muitos se manifestaram. Alguns afirmaram que já estavam fazendo isso.



Vamos utilizar os dados da tabela, obtido por você para construir o gráfico da função $y = \text{sen}\, x$?

Gráfico da função.

Quais as suas descobertas?

A função seno apresenta pontos de máximo e mínimo, o período vai de zero a 2π e a imagem é [-1, 1].

Figura 7: Resposta do aluno

Novos questionamentos surgiram e o diálogo continuou. (P) — Numa função circular o domínio não é finito, ou seja, a construção sugerida pela tabela define o domínio entre 0 e 2π. Vocês acreditam que a função "acaba" em 2π? Alguns alunos ficaram quietos, pensando, no entanto, outros comentaram a possibilidade de ser infinita, já que a função é circular e não tendo definido o número de voltas, não é possível conhecer exatamente o domínio da função. (P) — Mas se o domínio da função não se limita em 2π, como será o seu gráfico após esse valor? Um dos alunos respondeu: (A) — Ué! Igual ao que construímos, pois a função é circular e a primeira volta no ciclo trigonométrico será igual a todas as outras. Nesse momento o professor fez comentário sobre os conceitos de domínio, imagem e período de uma função circular, usando outros gráficos como exemplo.

O trabalho continuou e com base nessas indagações os alunos preencheram a tabela, determinando intervalos de crescimento e decrescimento, pontos de inflexão, zeros, domínio, imagem, período e gráfico da função. Só dois grupos não concluíram e pediram orientações. O professor solicitou que um aluno de outro grupo, que tinha terminado as atividades propostas, ajudasse os demais a encontrar domínio, imagem e periodicidade da função. A aluna conseguiu auxiliar um dos grupos, inclusive na construção do gráfico, sob a supervisão do professor. Em muitas situações de sala de aula é importante que alguns alunos, que já tenha finalizado o trabalho proposto, auxiliem os colegas, no entanto é indispensável a supervisão do professor.

Etapa 3: Esta aula se deu no laboratório de matemática onde os alunos continuaram trabalhando em grupos de cinco integrantes na sua maioria. O professor mais uma vez usou as ferramentas disponíveis no quadro trigonométrico e relembrou os métodos de obtenção dos valores de seno, cosseno e tangente, conforme mostrado anteriormente na figura 6. Os alunos, no primeiro momento, exploraram o quadro até que o professor questionou: (P) — Vamos construir o gráfico das funções cosseno e tangente? Que tal utilizar o método visto na construção da função seno para determinar o gráfico das outras funções? A ideia era fazer os alunos refletirem, analisarem a situação e buscarem inspiração na tabela e no plano cartesiano da função seno para usá-los na construção dos gráficos das funções cosseno e tangente.

Houve poucas interferências do professor, no entanto, a maior dificuldade foi identificada no processo de construção do gráfico da tangente, pois a maioria dos grupos associou que essa curva deveria ter alguma similaridade geométrica com as de seno e cosseno. Para o professor foi um momento muito importante. Os alunos estavam interessados em saber como construir o gráfico de uma função cuja continuidade não era possível, já que muitos não conseguiam encontrar o valor da tangente de 90 graus. (A) —

Professor, como saber o valor da tangente de 90°, se quando eu "monto" esse ângulo a reta que deveria cortar a da tangente é paralela à segunda? Frente a esse questionamento, o professor devolveu a pergunta: (P) — Existe algum ponto de intersecção entre duas retas paralelas? Lembre-se de que duas retas são paralelas quando a menor distância entre elas é sempre a mesma. Nesse momento, outro aluno do mesmo grupo que aparentemente não estava prestando atenção respondeu: (A) — Se as retas são paralelas então não há pontos comuns entre elas, portanto a tangente de 90 graus não existe. O professor achou interessante reforçar essas ideias e após alguns minutos de discussão foi dada sequência à construção dos gráficos. Pouco tempo depois, após mais algumas intervenções do professor, todos haviam terminado a construção dos gráficos. Nesse período de finalização das atividades propostas os alunos foram novamente questionados: (P) — Já sabemos que as razões seno, cosseno e tangente admitem inversas — cossecante, secante e cotangente —, porém não conhecemos seus gráficos. Como podemos construí-los? Um aluno indagou: (A) — Professor, podemos utilizar os valores das funções seno, cosseno e tangente e determinar os valores inversos. (P) — Como você conseguiu perceber? (A) — Na verdade eu lembrei que nós já estudamos que, por exemplo, $\text{cossec}\,x = \frac{1}{\text{sen}\,x}$. Nesse instante o professor aproveitou o comentário do aluno para demonstrar como encontrar os valores das funções inversas das trabalhadas, e após alguns minutos de demonstrações e constatações, chegou-se a novas tabelas de valores das funções inversas. A seguir o professor desafia os alunos a construir o gráfico da função cossecante, baseando-se no gráfico da função seno. Os gráficos das funções seno e cossecante abaixo foram desenvolvidos por um dos alunos.

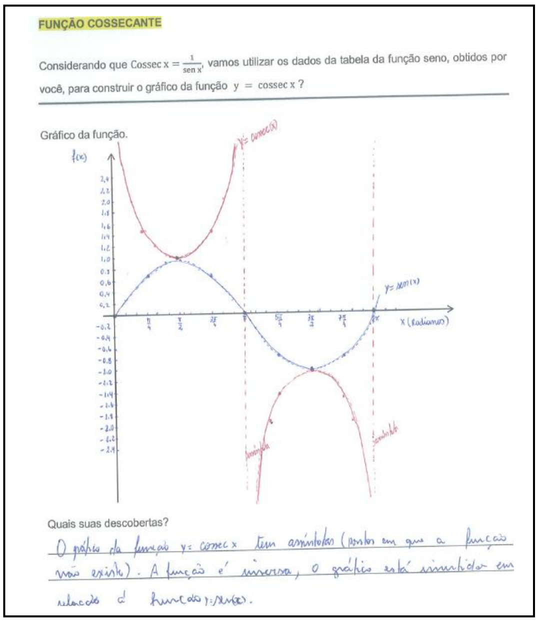


Figura 8: Resposta do aluno

Considerando que $\text{cossec}\,x = \frac{1}{\text{sen}\,x}$, vamos utilizar os dados da tabela da função seno, obtidos por você, para construir o gráfico da função $y = \text{cossec}\,x$?

Gráfico da função.

Quais as suas descobertas?

O gráfico da função $y = \text{cossec}\,x$ tem assíntotas — pontos em que a função não é definida — e o seu gráfico está invertido em relação à função seno.

4. Considerações finais

Como era o objetivo deste trabalho, relato como as atividades práticas laboratoriais podem contribuir na reconstrução e fixação de conceitos e definições já estudados anteriormente e desenvolvimento de novos conceitos com base nos conhecidos. Foi possível perceber, no decorrer do processo, que as atividades propostas de construção, principalmente do quadro trigonométrico, e a utilização de material manipulável colocaram o educando em processo de desequilíbrio em que ele pode questionar e, com base nas devoluções do professor, reorganizar seu pensamento, ajudando na reconstrução do conhecimento.

A atividade é realizada há vários anos, com turmas diferentes, na mesma escola e em virtude do grau de envolvimento que os alunos sempre apresentam, espero que este trabalho possa incentivar professores de matemática para desenvolver atividades em suas aulas utilizando a proposta de ensino descrita. Acredito que esta proposta pode contribuir para aprendizagem mais significativa, uma vez que coloca o aluno no centro do processo de construção do conhecimento e faz conexões com conhecimentos preexistentes na estrutura cognitiva.

A utilização do quadro trigonométrico — material manipulável — na construção dos gráficos das funções circulares em grupo possibilitou ao educando a realização de várias medições, obtenção de relações e comparações entre valores obtidos com os dos colegas, criando ambiente propício para que o processo de ensino-aprendizagem fosse bem-sucedido.

No trabalho, devido ao espaço, foi optado pela apresentação visual dos resultados obtidos nas funções seno e cossecante, no entanto vale destacar que para as funções cosseno, secante, tangente e cotangente os resultados obtidos foram satisfatórios, tanto quanto os apresentados.

5. Referências bibliográficas

ALMEIDA, L. M. W; BRITO, D. S. **Modelagem matemática na sala de aula**: algumas implicações para o ensino e aprendizagem da matemática. Anais do XI CIAEM: Blumenau, 2003.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais***:* matemática. Brasília: MEC/SEF, 2000. Disponível em: <http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/blegais.pdf>. Acesso em: 25 jan. 2013.

BRITO, A. de J.; MOREY, B. B**. Geometria e trigonometria: dificuldades dos professores de matemática do ensino fundamental**. In: John A. Fossa (org). Presenças Matemáticas. Natal: Edufrn, 2004.

IEZZI, G. *et al*. **Matemática**: vol. único: 4. ed. São Paulo: Atual, 2007.

LOPES, Maria da Glória. **Jogos na educação:** criar, fazer, jogar. 2. ed. São Paulo: Cortez, 1999.

LORENZATO, S. **O laboratório de ensino de matemática na formação de professores**. São Paulo: Autores Associados, 2006.

MENDES, I. A. **O uso da história no ensino da matemática: reflexões teóricas e experiências.** Belém: EDUEPA, 2001.

MOREIRA, M. A. **As teorias da aprendizagem significativa e sua implementação em sala de aula**. Brasília: Universidade de Brasília, 2006. 186 p.

NACARATO, A. M. **A definição de seno apresentada nos livros didáticos de matemática no século XX**. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 5., 2003, Rio Claro. Anais Rio Claro: SBHMat, 2003.

VYGOTSKY, L. S. **A formação social da mente**. 4. ed. São Paulo: Martins Fontes, 1991.