FUNÇÃO QUADRÁTICA E PROGRESSÕES ARITMÉTICAS - UMA ABORDAGEM COM AUXILIO DE SOFWTARES

César Thiago José da Silva
UFPE
cesarthiago.silva@gmail.com

Verônica Gitirana
UFPE
veronica.gitirana@gmail.com

Resumo
O presente trabalho objetivou elaborar, experimentar e analisar uma abordagem de função quadrática, com que valorize a caracterização desse modelo de funções a partir de uma contextualização com progressões aritméticas. Apoiado na orientação dos PCN foi construída uma abordagem valorizando articulação entre conteúdos da matemática escolar, com o uso de softwares de simulação. A abordagem foi experimentada com estudantes do ensino médio. Os resultados revelam que tal contextualização por um ambiente computacional, apoia a ação dos alunos no sentido de conjecturar e explorar as propriedades e consequências envolvidas na caracterização abordada, contribuindo assim para o ensino e a aprendizagem do tema.

Palavras chave: Ensino de Matemática; Funções; Progressões Aritméticas; Softwares no Ensino de Matemática.

1. Introdução

A função quadrática modela uma variedade de problemas tanto na própria matemática como nas ciências físicas e em muitas outras áreas. Isto faz com que este modelo de função tenha certo destaque na Educação Básica, aparecendo no final do Ensino Fundamental, assim como no Ensino Médio.

No entanto, ao contrário do que é comum se observar nas abordagens de função quadrática, sua importância não exige do cidadão apenas habilidade na manipulação de fórmulas prontas que descrevem a representação algébrica. Para o uso de tal modelo de função, assim como para os demais, é necessário que ele compreenda as características peculiares deste tipo de função. Entenda quais as características de uma relação entre duas grandezas de uma situação faz com que ela possa ser modelada por uma função quadrática. O que caracteriza uma função quadrática.

Como qualquer classe de objetos científicos ou não, a função quadrática possui características que a distinguem de outros modelos de função, e que independente da representação utilizada, são características inerentes à relação. Lima et al (2005) dedica uma seção do seu livro, para caracterizar cada modelo de função estudada no ensino médio. Na caracterização das funções quadráticas, outro conceito matemático é essencial, o de progressões aritméticas (PA). Nesse sentido, essa caracterização permite ainda uma articulação entre campos da matemática escolar.

Este projeto buscou elaborar, experimentar e analisar uma abordagem de função quadrática pautada nessa relação intradisciplinar, em que articula função quadrática e progressões aritméticas para criar ambiente propício à caracterização desse modelo funcional. As abordagens articuladas de função são orientadas pelos PCN quando apontam para o caráter integrador que função possui *"Um primeiro exemplo disso pode ser observado com relação às funções. O ensino isolado desse tema não permite a exploração do caráter integrador que ele possui."* (BRASIL, 2000, p. 43)

Para a criação de um ambiente que proporcionasse uma validação empírica de tais propriedades pelos estudantes, foram utilizados softwares como o *modellus* (TEODORO et al, 1997) e uma planilha eletrônica, nos quais foram produzidas as atividades. O "Modellus" é um software educacional livre para modelagem matemática que pode ser utilizado na aprendizagem e no ensino de várias ciências, com características interativas. Este software pode ser utilizado por alunos e professores do ensino médio ou universitário básico para construir modelos matemáticos e representá-los nas diferentes formas possibilitadas por ele como, tabelas, gráficos, animações, representação algébrica. Também são disponibilizadas no software, ferramentas para construir um modelo a partir de imagens (no formato BMP ou GIF) ou vídeos (no formato AVI).

Os instrumentos computacionais utilizados (software e planilha) permitiram uma articulação entre os dois conceitos, com simulações atuantes. Simulações que permitiram ao usuário alterar variáveis da situação e observar *feedback* em outras representações e/ou no outro conceito, relacionando os dois temas, a fim de propiciar uma melhor compreensão da caracterização do modelo quadrático.

2. Contextualização na própria matemática

Conforme os PCN, a contextualização em matemática se dá basicamente em quatro categorias: aspecto cultural, aplicações em outras ciências, história da matemática e na própria matemática:

> O critério central é o da contextualização e da interdisciplinaridade, ou seja, é o potencial de um tema permitir conexões entre diversos conceitos matemáticos e entre diferentes formas de pensamento matemático, ou, ainda, a relevância cultural do tema, tanto no que diz respeito às suas aplicações dentro ou fora da Matemática, como à sua importância histórica no desenvolvimento da própria ciência.
> (BRASIL, 2000, p. 43)

No entanto, quando se fala em contextualização um foco maior parece ser dado a situações ligadas à vida prática, o que gera uma busca por aplicações dos conteúdos matemáticos restrita a um contexto sociocultural. Porém, encontramos na própria matemática diversas situações em que é possível essa prática:

> Um vasto campo para a contextualização dos conceitos e procedimentos matemáticos são os próprios campos da matemática escolar: números e operações; geometria; grandezas e medidas; e tratamento da informação. As diferentes grandezas e suas características, por exemplo, oferecem excelentes contextos para a introdução e extensão dos campos numéricos.
> (CARVALHO, 2010, p. 76)

Neste texto encontramos um desses exemplos. Funções quadráticas e progressões aritméticas não são diretamente relacionadas nas aulas de matemática, apesar de ser orientada pelos PCN+ do ensino médio, a ideia de contextualizar função em geral com sequências: *"Com relação às seqüências, é preciso garantir uma abordagem conectada à idéia de função"* (BRASIL, 2002). No contexto da caracterização da função polinomial do 2º grau essa conexão é obrigatória, pois os dois conteúdos são indissociáveis para a compreensão da validação do teorema.

3. A caracterização da função quadrática

O modelo de funções quadráticas é caracterizado por funções contínuas e deriváveis que têm como 2ª derivada uma constante. Visto que tais propriedades apenas são estudadas no ensino superior, privam-se os estudantes do estudo dessa propriedade fundamental para a distinção com as demais funções reais. Mas a história nos mostra que antes mesmo dos conceitos de derivação, o físico italiano Galilei observou, através do seu experimento com um plano inclinado, que o espaço percorrido pelo objeto era diretamente proporcional ao quadrado do tempo levado para percorrê-lo, para isso, observou que a sequência das medidas do espaço percorrido formava uma progressão aritmética de segunda ordem, que é uma sequência $y_{1,}\, y_2,\, y_3,\, y_4,...$, tal que as diferenças sucessivas $d_1 = y_2 - y_1$, $d_2 = y_3 - y_{2,}$, $d_3 = y_4 - y_3$, ... formam uma progressão aritmética usual.

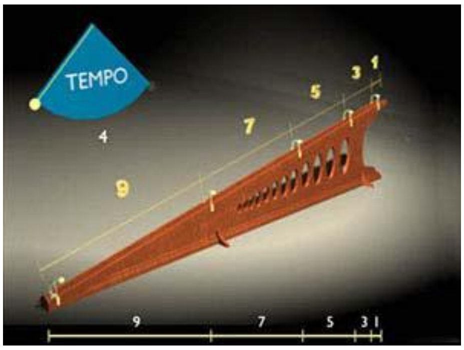

Figura 1: Ilustração da experiência realizada por Galileu, disponível em: http://brunelleschi.imss.fi.it/museum/emulti.asp?player=wmv&codice=500045&banda=h

Lima et al (2005) dedica um capítulo ao estudo da função quadrática, no qual define-a no conjunto dos números reais e aborda algumas de suas propriedades fundamentais, além disso, contextualiza historicamente, relaciona-a com a sua representação gráfica, a parábola, discute algumas aplicações e por fim traz o teorema de caracterização que é constituído de duas proposições:

1) *Se f é quadrática e* $x_{1,}\, x_2,\, x_3,\, x_4,...$, *é uma progressão aritmética qualquer, então a sequência:* $f(x_1)_,\ f(x_2),\ f(x_3),\ f(x_4),...$ *tem a propriedade de que as diferenças sucessivas entre seus termos formam uma progressão aritmética.*

2) *Se f é contínua e transforma progressões aritméticas em progressões aritméticas de segunda ordem, então f é da forma* $f(x) = ax^2+bx+c$.

Que levam ao teorema de caracterização da função quadrática:

> A fim de que a função contínua f: $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ seja quadrática é necessário e suficiente que toda a progressão aritmética não-constante $x_1, x_2,..., x_n,...$, seja transformada por f numa PA de segunda ordem não-degenerada
> $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2), ..., y_n= f(x_n),\ldots$
> (LIMA et al, 2005, p.149)

O teorema acima é fundamental para distinguir a função quadrática das demais funções reais, pois revela a essência dessa família de funções, mostrando o comportamento que lhe é intrínseco. As duas implicações que o precedem relacionam diretamente função quadrática e progressões aritméticas (introduzindo inclusive um outro conceito, não tão usual, a progressão aritmética de segunda ordem.)

O presente trabalho analisa uma abordagem que parte da caracterização da função quadrática que privilegia tal articulação, por meio de atividades elaboradas com auxílio de softwares, tomando por base a proposição (1) do teorema.

4. Método

Foi realizada uma sequência de atividades com 18 estudantes (divididos em 9 duplas) do ensino médio de um projeto pré-acadêmico da Universidade Federal de Pernambuco. Tal sequência foi experimentada em dois encontros de 1h/a cada. Os estudantes receberam as atividades e exploraram as situações construídas nos softwares para responderem às perguntas na atividade, cada dupla tinha um computador disponível.

Três atividades: duas delas utilizaram como suporte o software *Modellus* e uma, o programa *Microsoft Excel*. Fichas de atividades foram entregues aos estudantes, nas quais eles deveriam escrever os cálculos e as conclusões obtidas. A *atividade 1* simulou um lançamento de projéteis; a *atividade 2* trouxe uma situação de lançamento em queda livre; na *atividade 3*, que usou o Excel, os estudantes exploraram a representação algébrica com o objetivo de levantar conjecturas em torno das características intrínsecas à função quadrática aplicada a progressões aritméticas.

a. Atividade 1

Cada dupla recebeu um arquivo contendo uma simulação do lançamento de um projétil e uma ficha de atividades.

Figura 2*:* Simulação da atividade 1

A primeira questão da ficha de atividade buscava que os estudantes observassem a relação entre a altura do projétil e o tempo, a partir dos valores do tempo em uma PA de razão 1 (os números naturais), com foco na variação da imagem, gerando uma PA de segunda ordem.

Um objeto é lançado ao ar. Suponha que a sua altura em metros, t segundos após o lançamento seja modelada por uma função quadrática e que h = 0 corresponde a altura mínima, o solo. *Abra o arquivo "atividade1.mdl" e na janela animação observe a situação.*

1) Observe a animação e anote as alturas nos instantes de tempo abaixo:

t	0	1	2	3
h				

Com os valores obtidos no item anterior complete a seqüência h(n):

$h(0) = \_\_\_\_$

$h(1) = \_\_\_\_ = h(0) + \square$

$h(2) = \_\_\_\_ = h(1) + \square$

$h(3) = \_\_\_\_ = h(2) + \square$

Agora complete os demais valores e obtenha uma expressão para h(n):

$h(4) = h(3) + \square = \_\_\_\_$

$h(5) = h(4) + \square = \_\_\_\_$

Observe a sequência formada pelos números nos quadradinhos.
Qual o seu termo geral a_n?

Agora complete:

$h(n) = h(n-1) + \square$

Figura 3*:* Primeira questão da ficha de atividade 1

Uma segunda questão compôs a ficha de atividade 1, dessa vez, em que a observação e exploração da simulação é feita com os tempos tomados em outra PA, com razão ½.

2) Agora, vamos repetir o procedimento considerando agora intervalos de tempo de ½ segundo. (*para modificar o intervalo: na janela controlo → opções→ passo e observar os valores na janela "tabela"*):

t	0	½	1
h			

h= _____

h = _____ = *h* + $\square$

h= _____ = *h* + $\square$

Complete os demais valores e obtenha uma expressão para h(n):

h = *h* + $\square$ = _____

h = *h* + $\square$ = _____

h = *h* + $\square$ = _____

h = *h* + $\boxed{}$

Figura 4: *Segunda questão da ficha de atividade 1*

b. Atividade 2

Na atividade 2, cada dupla recebeu um arquivo contendo uma simulação do lançamento de uma caixa de um avião em queda livre e uma ficha de atividades.

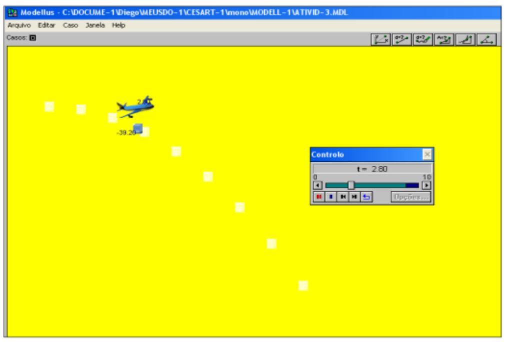

Figura 5: Simulação da atividade 2

Na ficha de atividades, com esse segundo modelo explorou-se a representação da relação por tabela, para que o estudante observe a sequência formada e busque uma relação para obter a imagem do termo seguinte.

Abra o arquivo "*atividade2b.mdl*" e observe a variação da posição do objeto que está em queda livre, esta é uma situação modelada por uma função quadrática.

a) Registre na tabela a distância entre o avião e a caixa nos instantes de tempo abaixo:

Instante(s)	Distância (m)	Variação da distância
0		
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		

b) Qual será a distância entre o avião e a caixa depois de 11 segundos?

c) Se a distância entre o avião e a caixa no instante "t" é x metros, qual será a distância entre os objetos no instante "$t+1$"?

Figura 6: Ficha de atividade 2

c. Atividade 3

Na atividade 3, cada dupla recebeu um planilha com uma simulação que articula a equação, tabelas e o gráfico da função e uma ficha de atividades.

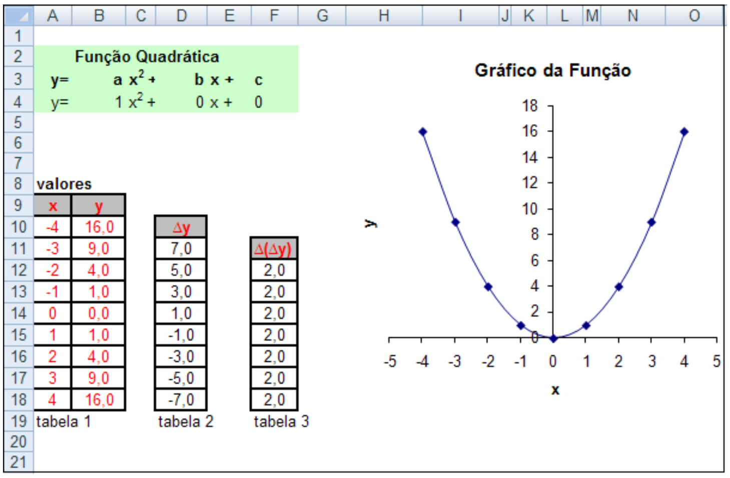

Figura 7: Tela da atividade 3

Na ficha de atividades, com essa terceira atividade explorou-se a articulação entre as diferentes representações como entre os coeficientes e PA de segunda ordem gerada.

1) Abra o arquivo "*atividade3.xls*" e observe a tabela com alguns valores da imagem de uma função real do tipo $f(x) = ax^2+bx+c$:

A tabela 1 exibe, para cada valor de x, um valor y a ele associado da seguinte forma: $y = ax^2+bx+c$.

A tabela 2 exibe a variação de y, ou seja, $\Delta y = y_n - y_{(n-1)}$.

A tabela 3 exibe a variação dos valores da tabela Δy, ou seja, $\Delta(\Delta y)$.

a) Modifique os valores dos coeficientes *a, b* e *c* livremente e para cada caso observe a seqüência formada pelos valores da tabela 2, ou seja, Δy.

a	*b*	*c*	Seqüência dos valores de $\Delta y = y_n - y_{(n-1)}$	Formam uma p.a.?
1	0	0	7, 5, 3, 1, -1, -3, -5, -7	Sim

a) Modifique livremente apenas os valores do coeficiente *c*. Quais tabelas têm os seus valores modificados? Qual a influência do coeficiente *c* na variação da função quadrática?

b) Modifique livremente apenas os valores do coeficiente *b*. Os valores na tabela Δy sempre formam uma p.a.? Em caso positivo, qual a relação entre o valor escolhido para *b* e a razão da p.a., ou seja, $\Delta(\Delta y)$?

c) Modifique livremente apenas os valores do coeficiente *a*. Os valores na tabela Δy sempre formam uma p.a.? Em caso positivo, qual a relação entre o valor escolhido para *a* e a razão da p.a., ou seja, $\Delta(\Delta y)$?

Figura 8*:* Ficha de atividade 3

5. Resultados

A seguir, os resultados obtidos pelos estudantes e consequentes conclusões:

a. Atividade 1

Na atividade 1, foi solicitado aos estudantes obter a sequência que se formava ao tomarem-se tempos sucessivos para a altura do objeto. A sequência formada nos quadrados induziu-os à ideia de que a altura no instante *t* podia ser obtida adicionando-se à altura no instante *t-1* o termo correspondente de uma PA. Contudo, nem todos determinaram qual seria esse termo, os 50% dos participantes chegaram à seguinte expressão

"$a_n = 3 - 2(n-1)$".

A maioria dos estudantes percebeu a relação entre a variação da função quadrática e a PA o que foi constatado quando escreveram h(n) relacionado com a_n:

DUPLA 1: $h(n) = h(n-1) + a_n$

No entanto, outros revelaram pouca habilidade em interpretar expressões literais e comunicar através delas os resultados obtidos:

DUPLA 2: $h(n) = h(n-1) - 2$

No segundo exemplo, os estudantes também identificaram a PA que determina a variação da função, mas erraram novamente na hora de obter a expressão para determinar a altura num instante em função do instante anterior, no lugar de escrever:

$$h\left(\frac{t}{2}\right) = h\left(\frac{t-1}{2}\right) + \underbrace{[1{,}75 - \frac{(t-1)}{2}]}_{a_t}$$

Alguns estudantes escreveram:

$$h\left(\frac{t}{2}\right) = h\left(\frac{t-1}{2}\right) - 0{,}5$$

O que nos leva a acreditar que confundiram a razão da PA com a própria progressão. Vale ressaltar que, apesar de os estudantes conseguirem visualizar através dos dois exemplos, que a propriedade característica se aplica a ambos, a maior dificuldade se constituiu em comunicar o resultado que eles "sabiam" que estava correto, mas não tinham familiaridade suficiente para expressar esse resultado através de um modelo algébrico.

b. Atividade 2

No item (a) os estudantes deveriam preencher os valores para a distância nos instantes de tempo indicados, tais valores foram mostrados na animação. Depois deveriam obter a sequência da "variação da distância" que constitui uma PA. Essa etapa, todos os participantes cumpriram sem dificuldade.

No item (b), para responder a pergunta de qual a distância entre o avião e a caixa depois de 11 segundos, o aluno teria que observar, da sequência formada na tabela, que a distância em t = 11s poderia ser obtida adicionando-se à distância no instante t = 10s o termo da P.A. correspondente, ou seja, a_{11}. Esta foi a ideia da maioria dos estudantes:

DUPLA 1: *"Varia 10 m de instante para instante. Então a distância no instante 11 é igual a 605 m."*

DUPLA 2: *"Seguindo a 'lógica' da letra (a), é igual a 605m."*

No item (c), os estudantes deveriam obter uma expressão geral para a distância no instante t em função da distância no instante t-1 (para a sequência de tempo dada: t = 1,2,3,4,5,...). Analisando as respostas dos estudantes no item (b), poderíamos imaginar que eles conseguiriam generalizar esse comportamento da variação, mas revelaram extrema dificuldade ao utilizarem da linguagem formal para comunicar tal generalização, o que mostra que a compreensão de um fato nem sempre é acompanhado da habilidade de o expressar numa linguagem algébrica.

DUPLA 3: "$t + 1 = x + 10$"

DUPLA 4: "$S = 5t^2 + 10t + 5$"

DUPLA 5: "$t + 1 \rightarrow x + (-10) + 1$"

c. Atividade 3

No primeiro momento, os estudantes deveriam manipular a representação algébrica da função quadrática de modo a obter diferentes funções e verificar se as diferenças sucessivas de f(x) para x = {-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4} formavam uma progressão aritmética. Todos os estudantes conseguiram verificar sem dificuldades que esta propriedade foi verificada para todos os valores que eles escolheram para *a, b* e *c*.

No item (b) os estudantes deveriam perceber a influência da escolha do coeficiente *c* na variação da função quadrática. Eis algumas respostas:

DUPLA 1: "*Influencia só nos valores de y, porque o coeficiente c só faz o gráfico se mover verticalmente.*"
DUPLA 2: "*Tabela de y. Influencia em relação à subida e descida no eixo y.*"
DUPLA 3: *"Apenas a tabela 1. Influencia no gráfico no eixo y."*

Percebe-se uma referência ao gráfico porque este foi disponibilizado na planilha, assim os estudantes perceberam que o valor escolhido para c só tem influência na imagem (tabela 1) e não na variação das diferenças sucessivas dos valores de f(x) expostos na tabela 2.

Item (c)
Nesse item, as duplas deveriam alterar apenas o coeficiente *b* e obter uma relação entre o valor escolhido para *b* e a razão da PA determinada pelas diferenças sucessivas dos valores de f(x). A maior parte dos estudantes verificou que para todos os valores que eles escolhiam para *b* a razão da PA não se alterava:

DUPLA 4: "*...a modificação do coeficiente b não altera o valor da razão da PA*"

No entanto, alguns estudantes generalizaram precipitadamente a partir das observações que fizeram:

DUPLA 5: *"Sempre vai ser dois"*
DUPLA 6: "*... sendo assim a razão 4b*"

Isto mostra a limitação e o caráter apenas "indutivo" da atividade, pois se baseia na exploração e manipulação por parte dos estudantes, as duplas acima generalizaram um fato que possivelmente se aplicaria a um ou mais exemplos e não a todos os casos. Daí a necessidade da generalização formal através da demonstração matemática.

Item (d)
Nesse item, os estudantes deveriam inferir a relação entre o valor escolhido para o coeficiente *a* e a razão da PA das diferenças sucessivas de f(x) (considerando a sequência

dos valores de x escolhida: -4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4). Através da alteração do coeficiente *a* eles chegaram às seguintes conclusões:

DUPLA 1: *"Para qualquer valor de a o valor de* $\Delta(\Delta y)=2a$*."*
DUPLA 2: *"Sempre é o dobro de a."*
DUPLA 3: *"A razão da PA será o dobro do valor atribuído ao coeficiente a."*
DUPLA 4: *"A razão 'varia' duas vezes o valor de a."*

É importante ressaltar que esta generalização obtida pelos estudantes é válida para o nosso exemplo porque tomamos uma PA de razão 1 no domínio da função, pois pode ser verificado que:

$$t_{i+1} - t_i = r \implies d_{i+1} - d_i = 2ar^2$$

Como r = 1, a conclusão dos estudantes ($\Delta(\Delta y) = 2a$) é válida nesse caso.

6. Considerações finais

O recurso computacional na nossa abordagem deu a oportunidade para que os estudantes conjecturassem um fato matemático a partir da exploração e alteração dos dados, além de poderem simular e explorar as propriedades da caracterização da função quadrática num contexto com progressões aritméticas. Essas ações foram possibilitadas pelos softwares citados, que permitiram a livre ação no teste das hipóteses dos alunos.

Observa-se através dos resultados obtidos, que apesar da dificuldade que há no tratamento de expressões matemáticas literais, houve uma boa compreensão quando se relacionaram os dois conteúdos, a maioria dos estudantes pode perceber: a relação entre a função quadrática e progressões aritméticas explorada nas três atividades, as propriedades 1 e a validade do teorema para mais de uma sequência, a possibilidade de obtenção do valor de f(n) a partir do termo antecedente e a_n, a validade do teorema quando se aplicam diferentes funções quadráticas a uma progressão dada, a relação entre a variação do coeficiente da função e a razão da PA correspondente, entre outros. No entanto, percebeu-se que uma abordagem para passagem da situação observada para a expressão algébrica ainda necessita de novos esforços e criação de situações de ensino.

7. Referências

CARVALHO, J.B.P.F.. **Matemática: Ensino Fundamental** / Coordenação João Bosco Pitombeira Fernandes de Carvalho . - Brasília : Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2010. 248 p. : il. (Coleção Explorando o Ensino ; v. 17)

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática (Ensino Médio).** Brasília: MEC/SEF, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais + (PCN+) - Ciências da Natureza e suas Tecnologias.** Brasília: MEC, 2002.

LIMA, E. L. et al. **A Matemática do Ensino Médio.** v.1, 8 ed. Rio de Janeiro: SBM, 2005.

TEODORO, V. et al., **Modellus, interactive modelling with mathematics [software for windows]**. San Mateo, CA: Knowledge Revolution, 1997. Disponível em: < http://modellus.fct.unl.pt > Acesso em: 05 de maio de 2009.