ANÁLISE COMBINATÓRIA: UMA PROPOSTA DE ENSINO USANDO O PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM

Maria Aparecida de Brito Rosa
UEPA
mariabritors@hotmail.com

Profª. MSc. Sandra do Socorro de Miranda Neves
UEPA
sandrasmneves@yahoo.com.br

Resumo
O presente trabalho é parte de uma pesquisa de conclusão de curso que apresenta os resultados de uma investigação sobre o conhecimento de conceitos básicos da Análise Combinatória por parte dos alunos ingressantes no curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará, Campus VI núcleo de Paragominas. A pesquisa tem como um de seus objetivos a redução do uso de fórmulas na resolução de exercícios combinatórios, para isso, foi proposto o uso do Princípio Fundamental da Contagem. Antes de introduzir este método, os alunos participantes da pesquisa responderam a um questionário e a um pré-teste, com os resultados houve a necessidade da realização de uma oficina a fim de apresentar o conteúdo aos alunos e propor uma aprendizagem a partir do Princípio Fundamental da Contagem. Após a oficina os alunos foram submetidos a um pós-teste, seus resultados serão o foco deste trabalho.

Palavras Chave: Princípio Fundamental da Contagem; Resolução de Exercícios; Ensino e Aprendizagem.

1. Introdução

A análise combinatória é a parte da matemática que estuda as técnicas de contagem, um conteúdo de bastante utilidade no dia-a-dia, com aplicabilidades em diversas situações como, por exemplo, em cálculos de quantidade de placas de automóveis, números de telefones, grupos de pessoas, cartões de loteria, ocorrências de uma investigação científica, incidências de um sinistro, etc. (Cf: YOUSSEF; et al, 2005). Portanto, o domínio e aprendizagem deste tema por parte dos professores e alunos se mostram como de fundamental importância para a obtenção das competências expostas nos documentos oficiais da educação brasileira.

Nos PCN's, a Combinatória está incorporada no item "Tratamento de Informação" juntamente com os conteúdos de Estatística e Probabilidade a fim de evidenciá-los devido à importância de seus usos atuais, desta forma, registram que:

> Integrarão este bloco estudos relativos a noções de estatística, de probabilidade e de combinatória. Evidentemente, o que se pretende não é o desenvolvimento de um trabalho baseado na definição de termos ou de fórmulas envolvendo tais assuntos.
> Relativamente à combinatória, o objetivo é levar o aluno a lidar com situações-problema que envolvam combinações, arranjos, permutações e, especialmente, o princípio multiplicativo da contagem[1] (PCN, 1997, p.40).

O documento ressalta a importância do uso do princípio fundamental da contagem na resolução de problemas relativos à combinatória. Desse modo, prioriza-se um ensino que faça do aluno um elemento participativo na construção do conhecimento sem a imposição de fórmulas prontas que o impeça de desenvolver o raciocínio lógico sugerido pelo conteúdo.

Neste contexto o presente trabalho propõe o ensino do conteúdo da Análise Combinatória através do Principio fundamental Contagem - PFC[2] com o intuito de despertar o raciocínio combinatório nos alunos e reduzir o uso de fórmulas na resolução de problemas. Essa proposta é parte integrante de um trabalho de conclusão de curso e foi aplicada com alunos ingressantes do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade do Estado do Pará, núcleo de Paragominas. Este estudo se torna relevante no sentido da busca de melhorias no ensino e aprendizagem de conteúdos matemáticos, tanto na educação básica quanto na superior.

A pesquisa total se deu com a aplicação de um questionário, uma atividade denominada de pré-teste, uma oficina sobre os conceitos básicos da análise combinatória e a aplicação de um pós-teste, nesta ordem. Neste trabalho evidenciaremos apenas os resultados do pós-teste.

1.1 Solucionando problemas combinatórios sem o uso de fórmulas

[1] Também conhecido como princípio fundamental da contagem; método que permite resolver problemas só com o uso da multiplicação.
[2] A partir desse momento a sigla PFC substituirá: Princípio Fundamental da Contagem.

Segundo Esteves (2001) os problemas que envolvem a análise combinatória podem ser melhor entendidos com métodos sem a utilização de fórmulas prontas, são eles: *árvore de possibilidades, tabelas, diagramas ou enumerações,* assim como também é sugerido por Chevallard (1999).

Com relação aos problemas de contagem os PCNEM prezam pelo desenvolvimento do raciocínio combinatório e que as fórmulas sejam uma conclusão lógica da aprendizagem. Assim discorre que:

> A Contagem, ao mesmo tempo em que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório. As fórmulas devem ser consequência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande. Esses conteúdos devem ter maior espaço e empenho de trabalho no ensino médio, mantendo de perto a perspectiva da resolução de problemas aplicados para se evitar a teorização excessiva e estéril. Espera-se que assim o aluno possa se orientar frente a informações de natureza estatística ou probabilística (BRASIL, 2006, p. 126-127).

Desta forma, é proposto então, que o aluno primeiro desenvolva o raciocínio combinatório, através de métodos sem a utilização de algoritmos, para então, usar as fórmulas como generalização de sua aprendizagem. Os documentos oficiais ainda discorrem sobre os conteúdos e as habilidades para a temática “contagem”, registrando da seguinte forma:

> **Contagem:** princípio multiplicativo; problemas de contagem.
> • Decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou de eventos.
> • Identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem.
> • Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem (BRASIL, 2002, p. 124).

Para desenvolver tais habilidades nos alunos a respeito do tema análise combinatória os documentos oficiais da educação destacam o uso de métodos que proporcione ao aluno desenvolver o raciocínio combinatório, como exemplo destaca o uso do diagrama de árvores como importante para a conexão entre os experimentos compostos e a Combinatória, pois permite a visualização da estrutura dos múltiplos passos de um experimento.

Vejamos então através de um problema combinatório a aplicação de métodos sem a utilização de fórmulas, sugeridos pelos documentos que regem a educação brasileira e por alguns autores.

Problema 1: João vai visitar seus avós, mas antes deve passar pela casa de seus pais. De sua residência a casa de seus pais, há duas estradas e da casa de seus pais para a casa de seus avós há três estradas. De quantas maneiras diferentes João pode ir de sua casa até a casa de seus avós.

Vejamos a ilustração do problema através da Figura 1:

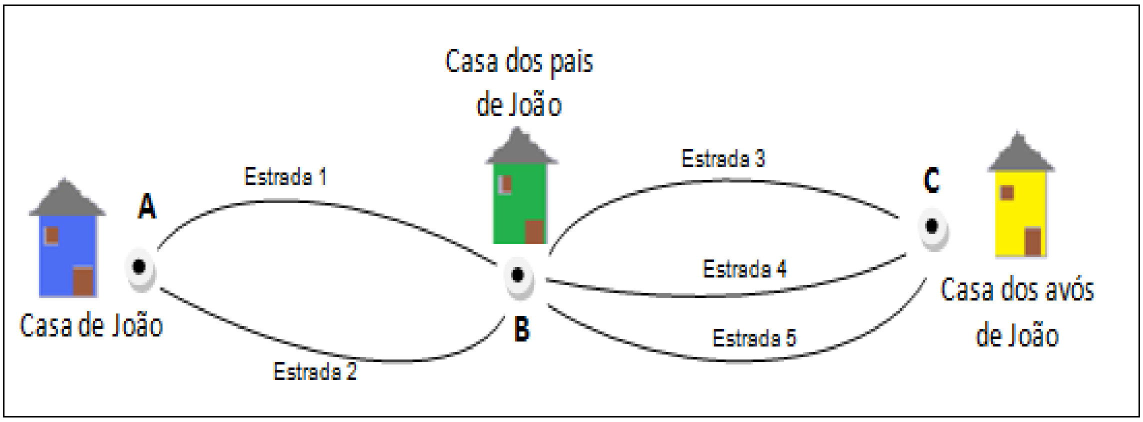
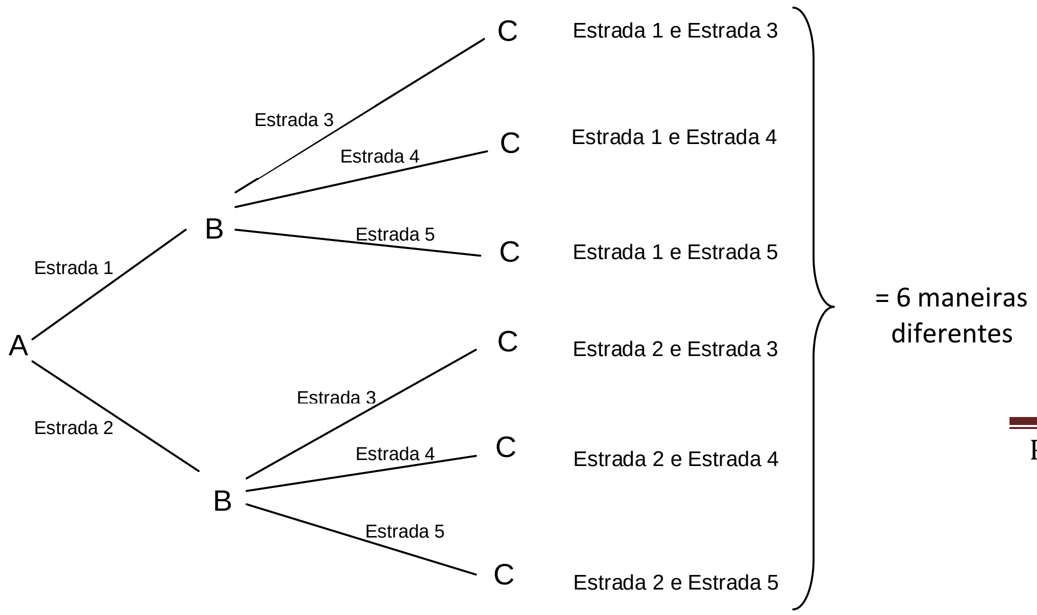


Figura 1: Ilustração do problema 1.

Possíveis estratégias para solucionar o *problema 1*.

- Árvore de Possibilidades



Como é possível perceber através da árvore de possibilidades montada acima, João poderá ir de sua casa até a casa de seus avós de seis maneiras diferentes. Com este esquema o aluno poderá facilmente desenvolver o raciocínio combinatório e dispensar o uso de fórmulas em muitos problemas.

- Tabela

Tabela 1: Resolução do problema 1.

B para C / **A para B**	**Estrada 3**	**Estrada 4**	**Estrada 5**
Estrada 1	Estrada 1 e Estrada 3	Estrada 1 e Estrada 4	Estrada 1 e Estrada 5
Estrada 2	Estrada 2 e Estrada 3	Estrada 2 e Estrada 4	Estrada 2 e Estrada 5

.

A disposição e formação dos agrupamentos em tabelas permite com que o aluno visualize de maneira clara os resultados obtidos, facilitando assim, o desenvolvimento do raciocínio combinatório sugerido pelo conteúdo estudado.

- Contagem Direta

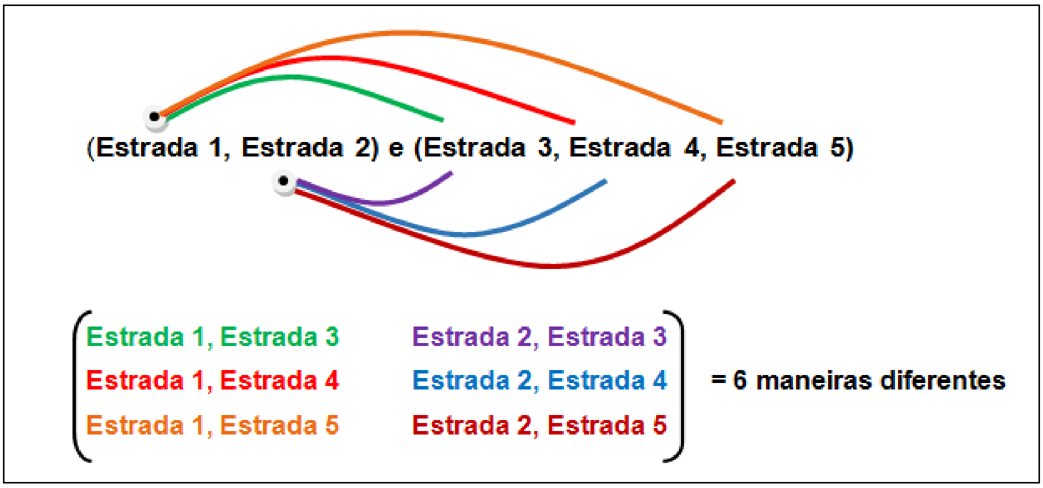


Figura 2: Resolução do Problema 1através da Contagem Direta.

A contagem direta assim como os outros dois métodos apresentados anteriormente leva o aluno a construir todos os agrupamentos possíveis de se formar dentro de um determinado problema, fazendo desta forma com que o aluno participe ativamente na construção do conhecimento.

Esteves (2001) afirma que incentivar o uso da árvore de possibilidades, tabelas, diagramas ou enumerações são meios importantes a fim de sistematizar a compreensão do Princípio Fundamental da Contagem. Estes métodos são de grande importância na introdução do conteúdo da Análise Combinatória, a fim de que os alunos visualizem na íntegra as soluções dos problemas e desenvolvam o raciocínio combinatório. No entanto, nos problemas que apresentam um número elevado de possibilidades de agrupamentos, essas técnicas se tornam inviáveis. Por tanto, evidencia-se neste trabalho o uso do PFC para a resolução de problemas, pois este método resolve todos os casos da combinatória. No exemplo acima poderíamos obter o resultado através do PFC da seguinte forma:

- Princípio Fundamental da Contagem

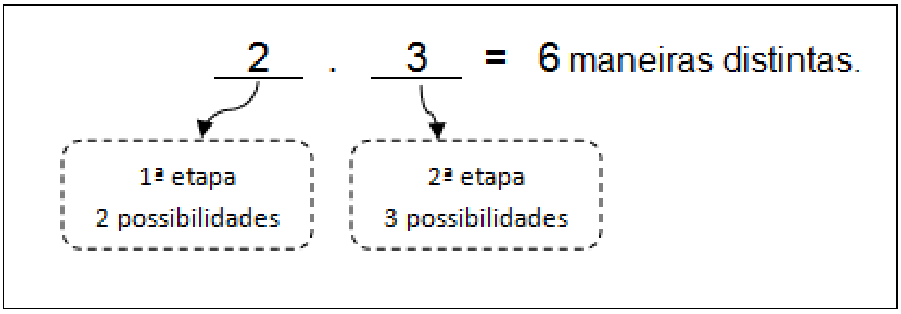


Figura 3: Resolução do Problema 1 através do PFC.

2. Metodologia

A pesquisa total desenvolveu-se com a aplicação de um questionário, um pré-teste e um pós-teste, também com a aplicação de uma oficina com duração de quatro horas a fim de apresentar o conteúdo aos alunos e propor o Princípio Fundamental da Contagem como método de resolução dos problemas de combinatória.

O estudo foi realizado com discentes do segundo semestre do curso de Licenciatura Plena em Matemática da Universidade do Estado do Pará – UEPA, campus VI. A turma possuía 40 alunos matriculados, mas no segundo semestre apenas 28 alunos frequentavam as aulas. E destes, 18 participaram do pós-teste, sendo 10 do sexo masculino e 8 do sexo feminino, a faixa etária dos discentes variava de 17 a 46 anos de idade.

Aqui, serão expostos apenas os resultados do pós-teste, este continha cinco problemas relacionados aos conteúdos da análise combinatória (Permutação, Arranjo e Combinação) considerados de nível fácil. Cada aluno respondeu individualmente os problemas propostos. A atividade teve duração de 30 minutos e foi aplicada para diagnosticar se após a oficina os discentes participantes da pesquisa adquiriram habilidades para resolver problemas combinatórios sem a utilização de fórmulas.

3. Resultados da Pesquisa

Vejamos através dos resultados finais do pós-teste como os discentes resolveram as cinco situações-problemas que estavam dispostas da seguinte forma:

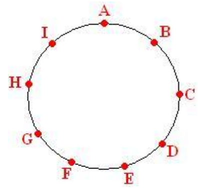
1) A operadora telefônica TIM possui o número 89 como novo prefixo. Sabendo-se que um número de celular completo possui 8 algarismos e que os que possui os 6 últimos algarismos iguais são eliminados, qual a quantidade máxima de chips com esse prefixo a operadora poderá emitir?

2) Um cofre possui um disco marcado com os dígitos 0,1, 2,..., 9. O segredo do cofre é marcado por uma sequência de 3 algarismos distintos. Se uma pessoa tentar abrir o cofre quantas tentativas deverá fazer (no máximo) para conseguir abri-lo?

3) Uma escola tem 8 professores, entre os quais serão escolhidos 2 que disputarão os cargos de diretor e vice-diretor. De quantas maneiras diferentes pode ser o resultado da eleição?

4) Um professor deseja sortear 3 (três) livros idênticos de Matemática entre os 7 (sete) melhores alunos de uma sala. Quantos são os possíveis resultados do sorteio?

5) Considere nove pontos diferentes de uma circunferência, conforme a figura.
Quantas retas ficam determinadas por esses nove pontos?



Segue abaixo o Gráfico 1 expondo os resultados obtidos pelos alunos pesquisados na aplicação do pós-teste.

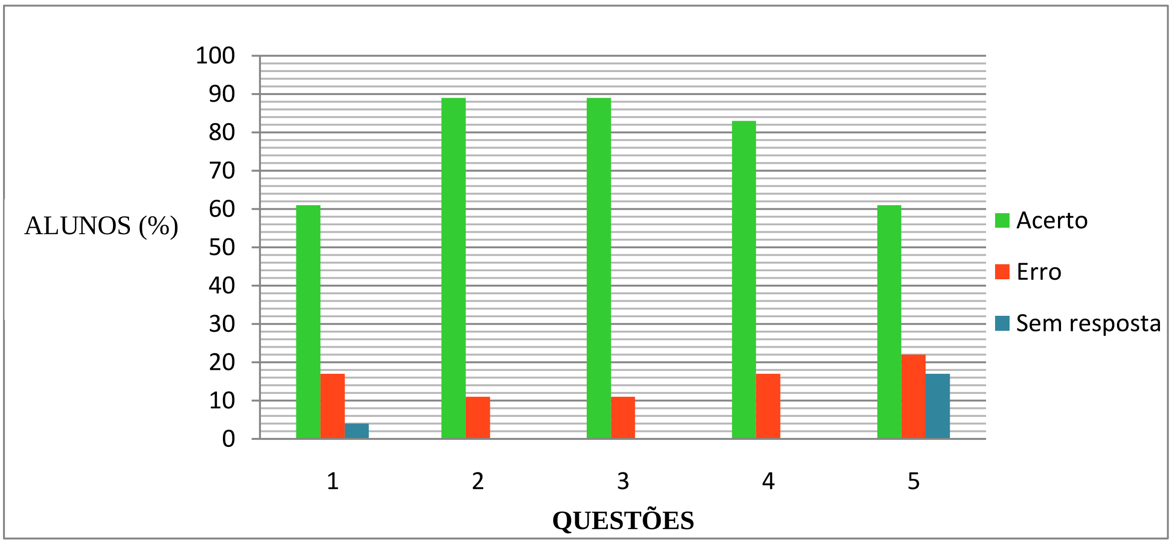


Gráfico 1: Resultados do Pós-Teste

Assim como nos mostra o gráfico 1, os discentes tiveram um bom desempenho no pós-teste. Serão expostas algumas resoluções deste teste, para isso, os alunos foram identificados por alguns números. Mostra-se através das figuras 4 a 10 como foi que alguns alunos chegaram a suas respostas, vejamos:

Problema 1.

Aluno 1:

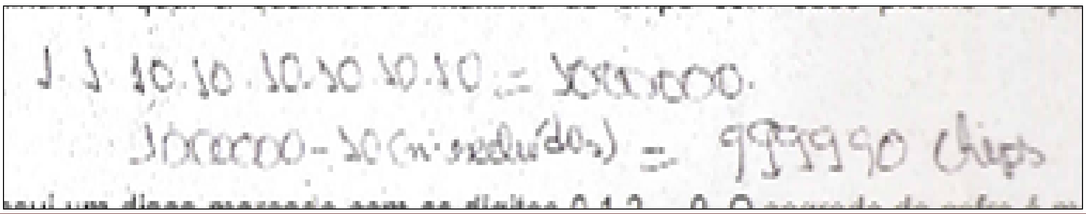


Figura 4: Exemplo de uma resolução do primeiro problema do pós-teste feita por um aluno participante da pesquisa.

Este aluno conseguiu desenvolver facilmente a resolução de um problema do Princípio Fundamental da Contagem, identificando suas etapas e realizando multiplicações sucessivas. A questão é considerada de nível fácil, no entanto, alguns alunos ainda a erraram, isso, devido não realizarem a última etapa do problema, que pedia para que eliminassem os chips com os seis últimos números iguais.

Aluno 2:

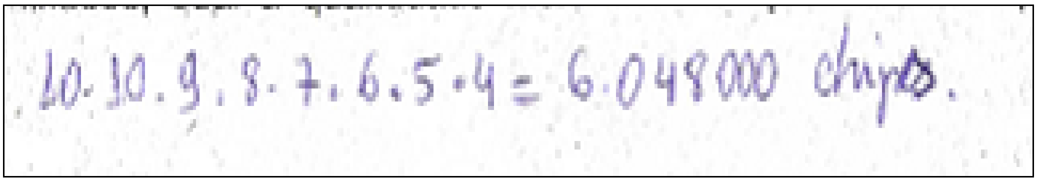


Figura 5: Exemplo de uma resolução do primeiro problema do pós-teste feita por um aluno participante da pesquisa.

Como mostra a figura acima, o Aluno 2 expôs uma resolução totalmente diferente. O estudante equivocou-se nos dois entendimentos principais do problema. Nos dois primeiros algarismos que seriam fixos, o aluno considerou 10 possibilidades para cada, quando se deveria considerar apenas uma possibilidade para cada, pois entre os 10 números disponíveis, os números 8 e 9 aparecem uma única vez. Quanto as demais etapas, o aluno considerou que nenhum dos 6 últimos algarismos pudessem se repetir, quando na verdade, só seriam exclusos os números de celulares em que todos os seis últimos números fossem iguais.

Percebe-se que nem todos os alunos conseguiram entender os conceitos explicados durante a oficina.

Nos problemas 2 e 3, a grande maioria dos alunos chegaram a resolução correta através do princípio fundamental da contagem. Apenas dois alunos erram estes problemas devido a tentativas frustradas com uso da fórmula de arranjo. Um dos alunos resolveu o problema 3 tanto pela fórmula quanto pelo princípio fundamental da contagem, assim como mostra a figura abaixo.

Aluno 3:

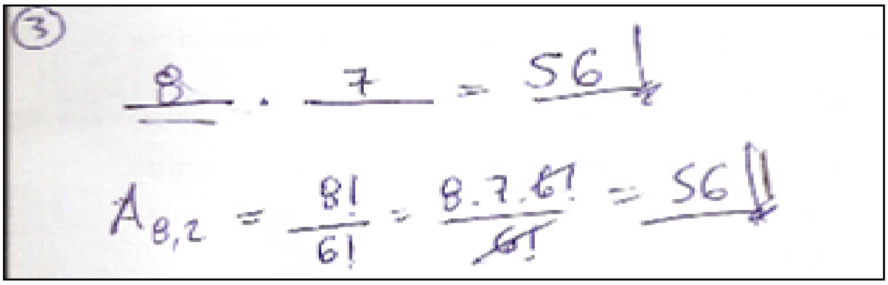


Figura 6: Exemplo de uma resolução do terceiro problema do pós-teste feita por um aluno participante da pesquisa.

O problema tratava-se de um agrupamento do tipo arranjo. O Aluno 5 mostrou-se habilidoso quanto aos métodos de resolução dos problemas de contagem, mostrando assim, que por parte de alguns alunos a oficina atingiu o resultado esperado.

O objetivo foi alcançado principalmente nos problemas do tipo combinação, pois no pré-teste, apenas um aluno resolveu a questão relativa a este agrupamento, ainda assim, através do uso de fórmulas. No entanto, os resultados do pós-teste foram bem satisfatórios, obtendo várias resoluções corretas e tendo como método de resolução o PFC.

O quarto problema tratava-se de um agrupamento do tipo combinação, a maioria dos alunos respondeu o problema sem a utilização da fórmula que é ensinada comumente no ensino médio. Vejamos algumas resoluções realizadas pelos alunos.

Problema 4.

Aluno 4:

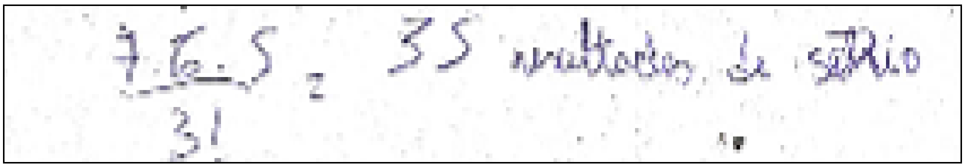


Figura 7: Exemplo de uma resolução do quarto problema do pós-teste feita por um aluno participante da pesquisa.

Como mostra a figura 7, o aluno compreendeu o método proposto, resolvendo o problema de combinação apenas pelo princípio fundamental da contagem, observando que por se tratar de um agrupamento do tipo combinação, uma divisão deveria ser efetuada para eliminar os agrupamentos repetidos. Este posicionamento é fruto das aulas expositivas durante a oficina realizada, sabendo-se que até então os alunos desconheciam esta alternativa.

Aluno 5.

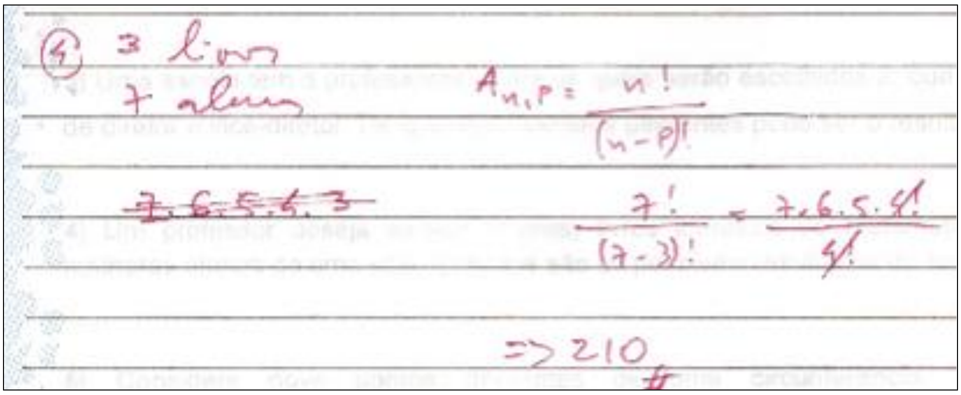


Figura 8: Exemplo de uma resolução do quarto problema do pós-teste feita por um aluno participante da pesquisa.

Já este aluno optou pela a utilização da fórmula na resolução do problema 4, no entanto, equivocou-se usando a fórmula do arranjo ao invés da fórmula de combinação. Neste caso, o aluno pode ter classificado o problema como um agrupamento de arranjo e não de combinação.

O último problema apresentou o maior índice de erro e questão sem respostado pós-teste. Trata-se de um agrupamento também do tipo combinação, a questão tem procedimentos de resolução simples, porém, alguns alunos não conseguiram desenvolver a solução correta. Vejamos abaixo as respostas desenvolvidas por dois alunos.

Problema 5.

Aluno 1:

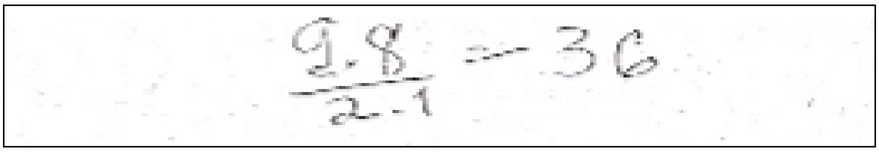


Figura 9: Exemplo de uma resolução do quinto problema do pós-teste feita por um aluno participante da pesquisa.

Assim como nas outras respostas registradas em seu teste, este aluno também não utilizou a fórmula de combinação para resolver o problema, nota-se que este discente compreendeu os ensinamentos repassados durante a oficina, haja vista que nenhum aluno apresentou resolução sem o uso de fórmulas nos problemas de combinação do pré-teste.

Aluno 3:

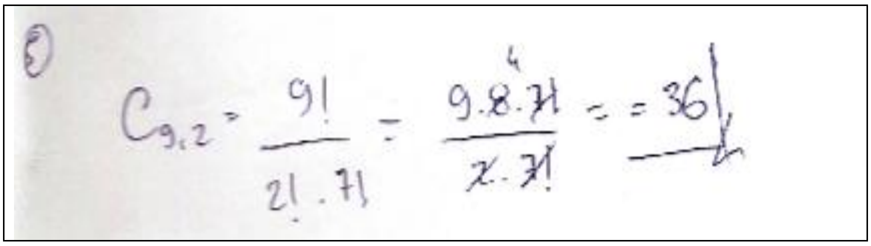


Figura 10: Um exemplo de resolução do quinto problema do pós-teste feita por um aluno participante da pesquisa.

O aluno 5 também desenvolveu uma resposta correta, mas, optou pelo uso da fórmula. Foi possível notar que esta foi realmente uma opção do discente, pois em exemplos anteriores, mostrou-se apto a resolver problemas de agrupamentos sem a utilização de fórmulas.

Contudo, os resultados almejados para o pós-teste foram alcançados, sendo possível perceber o avanço na aprendizagem dos alunos quanto aos conhecimentos da Análise Combinatória. Sabe-se que o tempo de uma oficina é insuficiente para conseguirmos repassar aos alunos todos os conceitos do conteúdo, porém, se mostra um tempo proveitoso para a apresentação do tema, a fim de despertar o interesse nos alunos em estudar o conteúdo e notar sua presença no dia-a-dia, sendo possível ainda, fixar alguma metodologia, neste caso a fixação do Principio Fundamental da Contagem como método principal na resolução de problemas combinatórios.

4. Referências

BRASIL, SEB, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Brasília: MEC/SEB, 2000.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretaria da Educação Básica. **Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza**, Matemática e suas Tecnologias, Vol. 2, Brasília: SEF/MEC. 2006.

CHEVALLARD, Y. **El análisis de lãs prácticas docentes em la teoria antropológica de lo didáctico.** Recher chesen Didactique dês Mathématiques, Vol. 19, nº 2, p. 221-266, 1999.

ESTEVES, I. *Investigando os fatores que influenciam o raciocínio combinatório em adolescentes de 14 anos – 8ª série do ensino fundamental*. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Centro de Ciências Exatas e Tecnologia, PUC-SP, São Paulo, 2001.

HARIKI, S. **Conectar problemas: uma nova estratégia de resolução de problemas combinatórios**. In: Revista Educação e Matemática, nº 37, Portugal: 1996.

SADOVSKY, P. Falta Fundamentação Didática no Ensino da Matemática. Nova Escola. São Paulo, Ed. Abril, Jan./Fev. 2007.

_____________. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *PCN+ Ensino Médio*: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: MEC, 2002.

Youssef, A. N.; Soares, E.; FERNANDEZ, V. P. **Matemática.** – 1 ed. – São Paulo: Scipione, 2005.

_____________. **Parâmetros Curriculares Nacionais – Matemática.** Brasília: Secretaria de Ensino Fundamental - SEF, 1997.