A ALAVANCA META EM LIVROS DIDÁTICOS DE ÁLGEBRA LINEAR

Francisca Cláudia Fernandes Fontenele
Universidade Federal do Ceará – UFC
claudia@multimeios.ufc.br

Francisco Régis Vieira Alves
Instituto Federal de Ciência e Tecnologia do Ceará – IFCE
fregis@ifce.edu.br

Resumo
Este trabalho teve como objetivo diagnosticar e analisar a presença de *recursos-meta* em livros didáticos de Álgebra Linear passíveis de se tornar *alavanca meta* para o leitor. Para isso realizamos uma análise qualitativa em três livros, tendo como foco a noção de base de um espaço vetorial. Os resultados foram considerados positivos, diante da verificação de elementos que demonstraram a preocupação por parte dos autores, em considerar na narrativa das explicações dos conteúdos analisados, elementos que podem suscitar a reflexão do aprendiz acerca dos significados conceituais envolvidos no tema em questão.

Palavras Chave: Álgebra Linear; Livro Didático; Alavanca Meta; Base.

1. Introdução

A Álgebra Linear é uma disciplina importante na área das Ciências Exatas e afins, e se destaca devido às possibilidades de aplicações em diversas áreas do conhecimento científico, e inclusive, dentro da própria Matemática, na qual se encontra subjacente a quase todos os seus domínios.

No entanto, segundo Dorier *et al* (1999), Dorier (2008) e Rogalski (1994), seu ensino é marcado por problemas, cujo caráter abstrato aliado ao excesso de formalismo, são tidos como principais fontes das dificuldades de compreensão que os estudantes enfrentam ao ingressar no ensino superior.

Dessa forma, nas últimas décadas observa-se a preocupação de educadores matemáticos de diferentes países, em investigar o ensino e aprendizagem dessa disciplina, dentre os quais destacamos as pesquisas realizadas na França através dos pesquisadores Jean-Luc Dorier, Marc Rogalski, Aline Robert e Jacqueline Robinet, cujas investigações culminaram no desenvolvimento da noção denominada *alavanca meta* e que será a base desse trabalho.

A noção de alavanca meta tem origens no significado dos termos metacognição, metaconhecimento, metacognitivo... A "meta" diz respeito, portanto, ao conhecimento que o sujeito tem sobre seu próprio conhecimento: o que sabe e como o sabe. No caso especifico tem a ver com a reflexão que ele faz em torno do seu próprio conhecimento matemático. A "alavanca" se refere ao recurso ou estratégia de ensino que quando bem elaborada e aplicada num momento adequado poderão ajudar a "alavancar" essa reflexão sobre a natureza, estrutura e/ou significados do objeto matemático estudado.

Os recursos didáticos passíveis de se tornar alavancas meta para os estudantes estão presentes, por exemplo, no discurso do professor, nas atividades propostas em sala de aula, e inclusive, no livro didático. A esses recursos chamaremos de *recursos-meta*, conforme encontramos em Oliveira (2005).

Neste trabalho buscamos verificar a presença desses elementos de ordem "meta" em livros didáticos de Álgebra Linear, tendo em conta sua importância e influencia no ensino e na aprendizagem dessa disciplina, uma vez que este pode ser considerado como principal instrumento de saber utilizado por professores e alunos, seja para elaboração de aulas, seja para consulta extraclasse.

Além disso, segundo resultados constatados por Araújo (2002), que analisou a metamatemática presente em livros de Álgebra Linear com foco na noção de base de um espaço vetorial, as obras analisadas nesse período traziam pouquíssimas situações capazes de tornar alavancas meta. Desse resultado, nos perguntamos se atualmente esse quadro permanece ou se houve avanços em relação à introdução desses elementos em livros mais recentes.

Dessa forma, diante da influencia exercida pelo livro didático na prática docente e no aprendizado do estudante, consideramos relevante um estudo que aborde essas questões e que possa ajudar na reflexão do próprio professor acerca de seus materiais de apoio ao ensino, bem como de considerar na elaboração das aulas a inclusão consciente dos recursos-meta.

2. Compreendendo a "Alavanca Meta"

As pesquisas sobre o ensino e aprendizagem da Álgebra Linear realizadas na França resultaram, dentre outras contribuições para o tema, na introdução do conceito de *alavanca meta*, que passou a ser indicado como um caminho promissor para superação das dificuldades. Tal indicação decorreu da constatação dos pesquisadores, após diversas investigações, de que não é possível a introdução das noções elementares da Álgebra Linear através de situações-problema (SILVA, 2005).

Segundo Dorier (2008) a noção de alavanca meta foi inserida por Robert e Robinet (1993; 1996) tendo como ideia central a introdução, num momento apropriado da aula, de um elemento capaz de conduzir o estudante à reflexão acerca do objeto matemático estudado. Dorier *et al*. (2000, p. 151) explicam que

> a expressão alavanca meta foi designada para uso, no ensino, de informação ou conhecimento SOBRE matemática. Isso pode envolver o funcionamento da matemática, seu uso, sua aprendizagem, podendo seus elementos ser gerais ou particulares. [...] Essas informações podem levar os estudantes a refletir, conscientes ou não, tanto sobre seu próprio aprendizado na atividade matemática quanto sobre a própria natureza da matemática. É possível que tal reflexão os ajude a aprender. (tradução nossa)

De acordo com Robert e Robinet (1993) a inclusão da "meta" na didática da matemática é associada ao significado e relevância da metacognição e do metaconhecimento para os processos de aprendizagem. Ou seja, ao conhecimento que o individuo tem de seu próprio conhecimento, o que sabe, como o sabe, como o utiliza na resolução de problemas.

Dorier *et al*. (2000) delimita a noção de alavanca meta ao conhecimento sobre Matemática, o que inclui sua natureza, estrutura, significados, métodos... Classifica os recursos-meta segundo as informações que trazem: *informações constitutivas do conhecimento matemático* (métodos, estruturas e (re)organizações) e *informações constitutivas do funcionamento matemático* (interação entre definições, emprego de questionamentos, exemplos e contraexemplos, etc.) e ainda as de natureza epistemológica.

Dessa forma, pode ser exemplo de recurso-meta as informações que auxiliam a mudança de quadro, caracterizada pela interação dos diversos domínios em que a maioria dos conceitos ocorre: quadro geométrico, quadro numérico, quadro algébrico, entre outros.

Em Álgebra Linear, as mudanças de quadro ocorrem, por exemplo, na abordagem de vetores: há momentos em que se usa o quadro vetorial (notação u, v, w...) e em outro muda-se para o quadro numérico (em que as coordenadas do vetor são explícitas), e ainda se pode mudar para o quadro geométrico (até três dimensões).

As mudanças de ponto de vista também são exemplos de recursos-meta. Em Álgebra Linear essas mudanças ocorrem, por exemplo, em situações como essa: “[...] Identificar a equação linear $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$ com o vetor $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, a fim de passar do uso de combinações lineares de equações à noção de posto de uma família de vetores”. (ROGALSKI, 1994, p. 151, tradução nossa).

Além das mudanças de quadro e pontos de vista, também podem considerados como possíveis alavancas meta, as atividades ou situações que utilizem os três princípios para o ensino e aprendizagem de Guershon Harel, que dizem respeito ao Princípio da Concretização, Princípio da Necessidade e Princípio da Generalização.

O *Princípio da Concretização* parte da premissa de que os estudantes constroem sua compreensão conceitual com base em um contexto concreto para eles. Como exemplo, o autor cita o fato de que geralmente os alunos resolvem corretamente problemas de independência linear para vetores do R^n, mas têm dificuldades em verificar se um conjunto de funções é linearmente independente. Segundo Harel (2000, p. 181) isso “pode ser explicado pelo fato de que eles não podem aplicar o conceito de independência linear para polinômios como funções, pois o conceito de função como um vetor não é concreto para eles”.

Sobre o *Princípio da Necessidade*, Harel (2000, p. 185) explica que: “Para os estudantes aprenderem, eles precisam enxergar uma necessidade por aquilo que se pretende ensinar. Por ‘necessidade’, entende-se uma necessidade intelectual, como oposição à necessidade social ou econômica”.

O terceiro princípio, da *Generalização*, é explicado pelo autor da seguinte forma: “Quando o ensino é preocupado com o modelo ‘concreto’, isto é, um modelo que satisfaz o Princípio da Concretização, as atividades didáticas deste modelo devem permitir e encorajar a generalização dos conceitos” (p. 187). Assim, este princípio complementa os anteriores, cujo objetivo é permitir que os estudantes abstraiam os conceitos que eles aprenderam em um modelo específico.

3. A Metodologia

Para verificar a presença de recursos-meta nos livros de Álgebra Linear, delimitamos nossa investigação aos conteúdos referentes à noção de base de um espaço vetorial, por ser considerada uma noção abstrata e elementar.

Selecionamos três livros didáticos de Álgebra Linear que são frequentemente adotados nas universidades cearenses:

- Álgebra Linear e suas aplicações - Autor: Gilbert Strang – (L1) ;
- Álgebra Linear e suas aplicações - Autor: David Lay – (L2);
- Álgebra Linear - Autor: David Poole – (L3).

Dessa forma, trata-se de um estudo qualitativo que nos remete à análise documental, na qual utilizamos como técnica analítica a análise de conteúdo proposta por Bardin (2004?). Em virtude das teorias abordadas, descrevemos no quadro 01 as categorias de análise eleitas para realização da investigação.

Quadro 01: Descrição das categorias eleitas para condução das análises.

Descrição da Categoria de Análise	**Significado da Análise**
Uso de linguagem coloquial	Livros que usam essa linguagem para simplificar a apresentação dos conceitos.
Uso de contra-exemplos	Exploração de contra-exemplo como forma de fortalecer a explicação conceitual.
Uso de metáforas	Recorrência a metáforas para melhor explicar os conceitos
Uso de representação geométrica	Mostrar um conceito de modo “concreto” por imagens mentais.
Mudanças de quadro ou pontos de vista	Mostrar as diferentes formas de visualizar um conceito.
Princípios de Harel	Explicitação da necessidade de se trabalhar com um conceito; Explicitação de um conceito de modo que este seja concreto para o aluno; Uso de generalização dos conceitos.

Fonte: Elaboração dos autores.

Para fins de coleta e organização das informações relevantes ao estudo, verificamos como a noção de base é introduzida e como são apresentadas as propriedades e teoremas, a partir dos quais descremos somente os trechos em que detectamos a presença de recursos-meta passíveis de se tornar alavanca meta para o leitor.

4. Resultados e Discussão

Para melhor apresentar os resultados obtidos, faremos uma exposição dos recursos-meta identificados em cada livro, comentando cada elemento encontrado.

4.1. Álgebra Linear e suas aplicações – L1

Neste livro o autor introduz a noção de *base* explicitando diretamente as técnicas usadas para determinar se um conjunto gera e se é linearmente independente. Inicia o tópico com as seguintes palavras:

> Para determinar se *b* é uma combinação das colunas, tentamos resolver *Ax = b*. A fim de determinar se as colunas são independentes, resolvemos *Ax = 0*. **A geração envolve o espaço-coluna e a independência envolve o espaço nulo**. Os vetores coordenados $e_1, \ldots, e_n$ geram R^n e são linearmente independentes. Grosso modo, podemos dizer **que nenhum vetor nesse conjunto é desperdiçado.** Isto leva a ideia crucial de **base**”. (STRANG, 2009, p. 95)

O autor associa as ideias de geração e independência linear, vistos anteriormente, com a ideia usual de “desperdício”, como forma de facilitar a introdução da noção de *base*. Ao apresentar a definição formal, novamente essa ideia de desperdício é enfatizada entre parênteses, conforme mostra a figura 01:

> 2I Uma *base* para **V** é uma sequência de vetores que possui duas propriedades concomitantes:
> **1.** Os vetores são linearmente independentes (não há vetores demais).
> **2.** Eles geram o espaço **V** (não faltam vetores).

Fig. 01: definição de base conforme aparece em L1.
Fonte: Strang (2009, p. 95).

Nesse caso, podemos considerar essa estratégia, que faz uso da linguagem coloquial, como um recurso-meta passível de se tornar uma alavanca meta para o leitor, uma vez que pode gerar reflexões sobre o conceito de base, a partir da associação de saberes anteriores (geração e independência) com a ideia de desperdício.

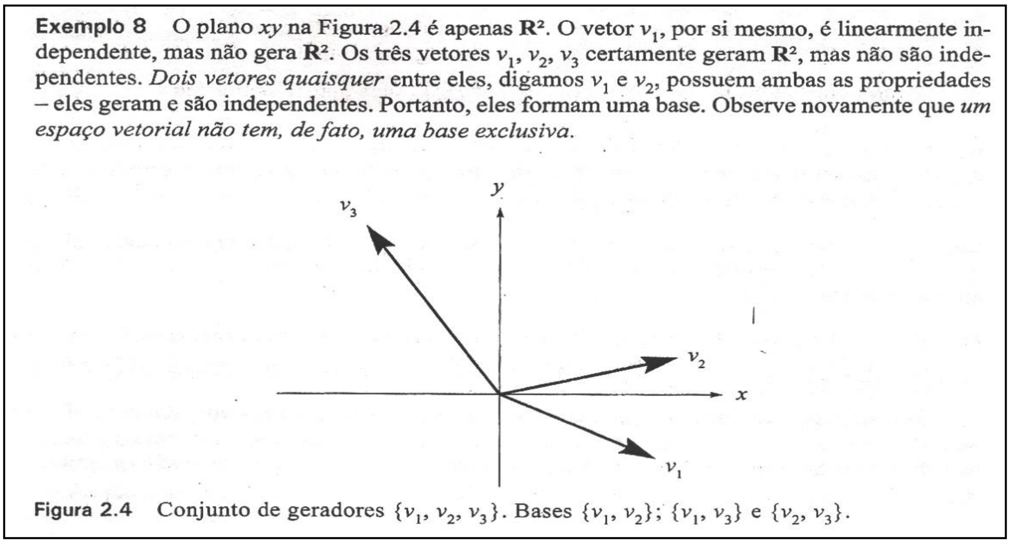
O uso de uma linguagem não muito preocupada com o uso do formalismo, típico da matemática, está presente nas explicações que se sucedem. A ideia de que há somente um modo de apresentar um vetor *v* como combinação linear dos vetores-base e que um espaço vetorial possui infinitas bases, é assim explicitada:

> Essa combinação de propriedades é absolutamente fundamental para a álgebra linear. Ela significa que todo vetor no espaço é uma combinação dos vetores-bases, pois eles geram o espaço. Também significa que a combinação é

> exclusiva: se $\mathrm{v} = \mathrm{a_1 v_1} + \ldots + \mathrm{a_k v_k}$ e também $\mathrm{v} = \mathrm{b_1 v_1} + \ldots + \mathrm{b_k v_k}$, então a subtração resulta em $0 = \sum(a_i - b_i)v_i$. Agora a independência faz a sua parte; todo coeficiente $a_i - b_i$ deve ser nulo. Portanto $a_i = b_i$. ***Há um, e somente um modo de apresentar v como uma combinação linear dos vetores-bases***. É melhor dizermos logo que os vetores coordenados $e_1, \ldots, e_n$ não são a única base de R^n [...] Um espaço vetorial possui ***infinitas bases diferentes***".
> (STRANG, 2009, p. 95)

Nestes trechos observamos que o autor optou por explicar o significado da *base* e sua característica de não ser única, utilizando uma linguagem que dispensa o excesso de formalismo, mas sem perder a essência do conteúdo. Outros livros apresentam essas propriedades através de teoremas formais. Segundo Dorier *et al.* (1999) o uso excessivo de formalismo constitui um obstáculo para os estudantes. Além disso, essa linguagem coloquial pode ser considerada como um recurso-meta, pois ela traz informações *sobre* o significado da noção de base, portanto, é um discurso que pode levar o aluno a refletir sobre esse conceito e seu papel dentro da teoria dos espaços vetoriais.

Em seguida o autor ilustra o fato da base de um espaço vetorial não ser única através da representação geométrica de três vetores no plano xy, do qual se pode observar a dependência entre os três, o conjunto gerador e as diferentes bases formadas por eles (ver figura 02).



Exemplo 8 O plano *xy* na Figura 2.4 é apenas $\mathbf{R}^2$. O vetor v_1, por si mesmo, é linearmente independente, mas não gera $\mathbf{R}^2$. Os três vetores v_1, v_2, v_3 certamente geram $\mathbf{R}^2$, mas não são independentes. *Dois vetores quaisquer* entre eles, digamos v_1 e v_2, possuem ambas as propriedades – eles geram e são independentes. Portanto, eles formam uma base. Observe novamente que *um espaço vetorial não tem, de fato, uma base exclusiva.*

Figura 2.4 Conjunto de geradores $\{v_1, v_2, v_3\}$. Bases $\{v_1, v_2\}$; $\{v_1, v_3\}$ e $\{v_2, v_3\}$.

Fig. 02: Representação geométrica de conjuntos geradores e bases.
Fonte: Strang (2009, p. 96).

Nesse caso, os conceitos explicados anteriormente ganham uma visualização (concreta) que pode ajudar o aluno a reforçar sua compreensão sobre a combinação das propriedades de geração do espaço e independência de vetores. Aqui, o recurso-meta utilizado foi o Principio da Concretização e a mudança do quadro algébrico para o geométrico. Observamos também que o próprio autor chama atenção para o fato da não exclusividade de uma base.

Outro recurso-meta é identificado no seguinte trecho que é apresentado após o teorema que trata da possibilidade de se estender ou reduzir um conjunto de vetores a uma base:

> O ponto crucial é que uma base é um *conjunto independente máximo*. Ele não pode ser ampliado sem perder a independência. A base é também um *conjunto de geradores mínimo*. Ele não pode ser diminuído e continuar gerando o espaço. (STRANG, 2009, p. 98, grifo nosso)

Aqui a noção de base é apresentada como um conjunto independente máximo e também como um conjunto de geradores mínimo. Consideramos que esses termos "conjunto independente máximo" e "conjunto de geradores mínimo" podem propiciar reflexões acerca de como uma base pode ser "enxergada". Nesse caso há uma mudança de ponto de vista e por se tratar de uma noção abstrata, o uso desses termos pode desencadear uma reflexão que vai de encontro à definição inicial e pode ajudar a ampliar ainda mais compreensão desses conceitos. De certa forma, esses termos generalizam a noção de base, vista até então, como um conjunto de geradores independentes. Consideramos que aqui foi usado o Principio da Generalização de Harel.

Na abordagem da noção de base, apresentada neste livro, detectamos quatro momentos em que o autor traz informações sobre o funcionamento dos conteúdos em questão, sendo eles na definição, na explicação de algumas propriedades, num exemplo de base e ao mudar a forma de se ver uma base.

4.2. Álgebra Linear e suas aplicações - L2

A noção de base é apresentada inicialmente no Capítulo 2 – Álgebra Matricial – no tópico que aborda os subespaços de R^n. O autor a introduz explicando a necessidade de se trabalhar com o menor conjunto possível de vetores geradores, sendo que este tem que ser linearmente independente.

> Como um subespaço geralmente contém uma infinidade de vetores, alguns dos problemas envolvendo subespaços podem ser tratados de uma melhor forma através de um pequeno conjunto finito de vetores que geram o subespaço. Quanto menor for o conjunto, melhor. Pode ser mostrado que o menor conjunto gerador tem que ser linearmente independente. (LAY, 2011, p. 156)

Nessa introdução observamos que o autor utilizou o Principio da Necessidade, como forma de chamar atenção para o porquê da definição que é em seguida apresentada:

“Uma base de um subespaço H do R^n é um subconjunto de H linearmente independente e que gera H”. (p. 156). Notemos que aqui, a definição de base é restrita ao subespaços R^n.

Em seguida a noção de base é apresentada no plano xyz, conforme mostra a figura 03. Consideramos que se trata de um recurso-meta, pois mostra a base canônica do R^n representada nas formas tabular e geométrica.

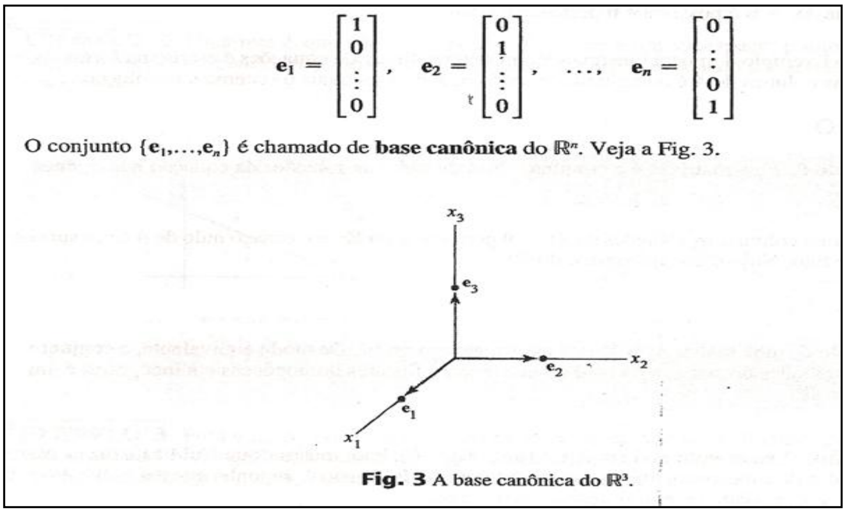


Fig. 03: Representação geométrica da base canônica do R^3.
Fonte: Lay (2011, p. 156).

Neste exemplo, a noção de base ganhou novas perspectivas, passando a ser abordada sob o ponto de vista geométrico, em que houve uma passagem do quadro tabular para o quadro geométrico. Essa passagem também pode ser caracterizada como sendo o Principio da Concretização, uma vez que essa visualização pode ser entendida como o “concreto” para o leitor.

No capítulo 4 – Espaços Vetoriais - novamente é abordada a noção de base, agora estendida aos espaços vetoriais. Após ser relembrada a noção de independência linear o autor apresenta a definição de base de modo bem mais formal, em que é novamente exibido um exemplo que usa a representação geométrica da base canônica do R^3. No exemplo 6 é apresentada a base canônica de P_n, incluindo a representação geométrica de P_2, conforme mostra a figura 04.

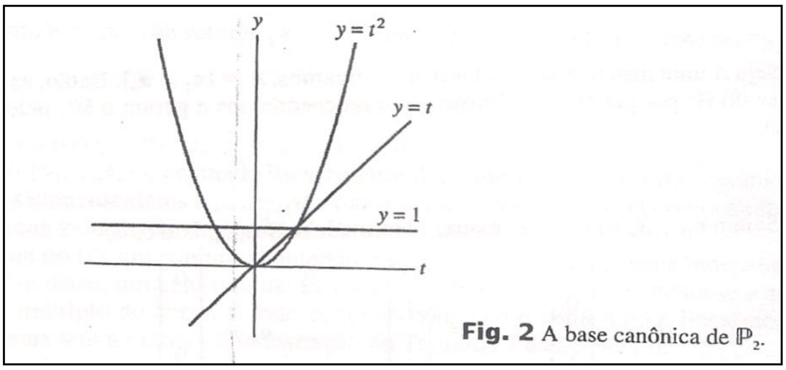


Fig. 04: Base canônica de P_2. Fonte: Lay (2011, p. 215).

Consideramos que este é mais um recurso-meta, pois faz uso da mudança de quadro e do Princípio da Concretização. Além disso, o autor utiliza uma base de um espaço vetorial em P_n, permitindo que o leitor conheça outros espaços vetoriais, além de R^n e M_{mn}.

Em seguida é abordado o tópico intitulado "Teorema do conjunto gerador" cuja introdução nos chamou atenção pela linguagem coloquial que pode propiciar a reflexão do leitor acerca da noção de base: "Como veremos, uma base é um conjunto gerador 'eficiente' que não contém vetores desnecessários. De fato, uma base pode ser obtida de um conjunto gerador descartando vetores desnecessários". (LAY, 2011, p. 215).

O termo "eficiente" pode desencadear reflexões que reforçam as propriedades de geração e independência de uma base. Também ajuda a compreender o teorema do conjunto gerador que explicita que um conjunto de vetores pode ser estendido ou reduzido a uma base.

A seção intitulada "Duas formas de ver uma base", é abordada como uma consequência do teorema do conjunto gerador:

> Quando usamos o teorema do Conjunto Gerador, a retirada de vetores de um conjunto gerador tem que parar quando o conjunto se torna linearmente independente. Se retirarmos um vetor a mais, esse vetor não será combinação linear dos demais, e, portanto, esse conjunto menor não irá mais gerar V. Assim, uma base é um conjunto gerador que é o *menor possível*. Uma base também é um conjunto linearmente independente que é o *maior possível*. Se S é uma base para V e se S for acrescido de um vetor – digamos, w – de V, então o novo conjunto não pode ser linearmente independente, porque S gera V e w, portanto, é uma combinação linear dos elementos de S. (LAY, 2011, p. 217 e 218, grifo dos autores)

No exemplo 10 do livro, o autor faz uso da linguagem coloquial para explicar como um conjunto linearmente independente pode ser aumentado até formar uma base e como a adição de vetores "destrói" a independência linear do conjunto. Sendo que por outro lado, um conjunto gerador pode ser diminuído até formar uma base, mas se a retirada de vetores continua, a propriedade geradora é “destruída”. Em seguida, a explicação é ilustrada, conforme mostra a figura 05:

$$\left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix}\right\} \quad \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix}\right\} \quad \left\{\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}2\\3\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}4\\5\\6\end{bmatrix},\begin{bmatrix}7\\8\\9\end{bmatrix}\right\}$$

Linearmente independente mas não gera o $\mathbb{R}^3$ | Uma base para o $\mathbb{R}^3$ | Gera o $\mathbb{R}^3$ mas é linearmente dependente

Fig. 05: Exemplo de como a adição ou subtração de vetores de uma base destrói a independência e a geração, respectivamente. Fonte: Lay (2011, p. 218).

Consideramos que há recurso-meta nessa abordagem, tanto no uso da linguagem coloquial através da ideia de destruição, quanto na forma como a situação foi ilustrada, destacando cada situação anteriormente explicada.

Diante do exposto, podemos concluir que nesta obra o autor também fornece informações *sobre* os conceitos e propriedades da noção de base através da linguagem coloquial, princípio da necessidade, representação geométrica e mudança de quadro. No total identificamos cinco momentos em que os recursos-meta aparecem.

4.3. Álgebra Linear – L3

Neste livro a noção de base aparece inicialmente no Capítulo 3 – Matrizes – no tópico destinado a abordagem de subespaços associados a matrizes. É inicialmente abordado partindo da ideia intuitiva de que subespaços são generalizações de planos que passam pela origem em R^3.

> Podemos extrair um pouco mais da ideia intuitiva de que subespaços são generalizações de planos que passam pela origem em R^3. Um plano é gerado por quaisquer dois vetores paralelos ao plano, mas não paralelos entre si. Na linguagem algébrica esses dois vetores geram o plano e são linearmente independentes. Não dá certo com menos de dois vetores, e mais de dois vetores não são necessários. Essa é a essência de uma base para um subespaço. (POOLE, 2011, p. 174)

Nesse caso o recurso-meta identificado foi o Principio da Generalização, em que o leitor é instigado a refletir sobre a ideia da base, partindo da generalização de planos que passam pela origem.

Em seguida só encontramos outro elemento de ordem meta no Capítulo 6 – Espaços Vetoriais – conforme mostra a figura 06. Nesse exemplo o autor aborda como encontrar bases para os subespaços vetoriais R^4, P_3 e M_{22}, trabalhando os três exemplos lado a lado.

Consideramos que este exemplo pode ser um recurso-meta, pois permite a mudança de ponto de vista em relação aos espaços vetoriais, uma vez que muitas vezes sua abordagem acaba ficando restrita aos espaços R^n. Além disso, essa oportunidade de comparar o uso das técnicas para encontrar uma base aplicada a diferentes espaços pode conduzir o aluno a refletir sobre as similaridades e diferenças entre eles numa reflexão sobre os espaços vetoriais e a própria técnica.

SOLUÇÃO: Mais uma vez, vamos trabalhar os três exemplos lado a lado para destacar as similaridades entre eles. Em certo sentido, eles são todos *o mesmo* exemplo, mas devemos trabalhar até a Seção 6.6 para tornar essa idéia precisa.

a) Como

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ -b \\ a \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

temos que $W_1 = \text{ger}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, onde

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Tendo em vista que, claramente, o conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ é linearmente independente, ele também é uma base para W_1.

(b) Como

$$a + bx - bx^2 + ax^3 = a(1 + x^3) + b(x - x^2)$$

temos que $W_2 = \text{ger}(u(x), v(x))$, onde

$$u(x) = 1 + x^3$$

e

$$v(x) = x - x^2$$

Tendo em vista que, claramente, o conjunto $\{u(x), v(x)\}$ é linearmente independente, ele também é uma base para W_2.

(c) Como

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

temos que $W_3 = \text{ger}(U, V)$, onde

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad V = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tendo em vista que, claramente, o conjunto $\{U, V\}$ é linearmente independente, ele também é uma base para W_3.◆

Fig. 06: Resolução lado a lado de uma questão sobre base com os espaços R^4, P_3 e M_{22}.
Fonte: Poole (2011, p. 405)

Neste livro pudemos constatar que somente em dois momentos os recursos-meta apareceram na abordagem inicial da noção de base, através do Principio da Generalização e do método usado no exemplo 13 (informações constitutivas do conhecimento matemático) para mostrar as similaridades na solução de um problema com espaços vetoriais distintos.

5. Considerações Finais

Diante da descrição dos recursos-meta identificados em cada obra, observamos que cada autor utilizou formas diferentes de introduzir o tema. Mas, cada um buscou à sua maneira, encaixar na explicação algum recurso que fizesse com que o estudante compreendesse seu significado relacionando-o aos conteúdos anteriores.

A introdução da noção de base em L1 é feita utilizando a ideia de "desperdício", em L2 o autor usa a necessidade de trabalhar com conjuntos pequenos e finitos de vetores, e, em L3 o autor parte da ideia intuitiva de que subespaços são generalizações de planos que passam pela origem em R^3, para então falar da condição de geração de um plano em R^3 (dois vetores paralelos e independentes). Nesse caso, foi usada a linguagem coloquial, o Principio da Necessidade e o Princípio da Generalização, respectivamente.

Para reforçar a ideia e o significado da base, dois autores recorreram à representação geométrica. Em L1 foi apresentado três vetores no plano xy em que é possível visualizar a dependência, independência, conjunto de geradores e as bases formadas por eles. Em L2 a representação geométrica também é utilizada, mas nesse caso, são apresentados gráficos que trazem a base canônica de R^3 e de P_2. Nesse caso, os recursos-meta usados foram a mudança de quadro e o Principio da Concretização.

Quanto às técnicas usadas para encontrar uma base, em L1 e L2, não encontramos recursos-meta, pois nessas obras o que prevaleceu foram as explicações dos algoritmos, sem que necessariamente essas explicações pudessem desencadear reflexões diretas que relacionassem seus significados aos conceitos. No entanto, o L3 traz um exemplo que mostra como encontrar bases para os subespaços R^4, P_3 e M_{22}, cuja resolução é mostrada lado a lado. Consideramos que esse método pode desencadear reflexões sobre as similaridades e diferenças entre os diferentes espaços e sobre o próprio algoritmo de resolução.

Informações sobre a possibilidade de se encontrar uma base a partir do acréscimo ou retirada de vetores e a abordagem da noção de base como um conjunto independente máximo e como um conjunto de geradores mínimos aparece em L1 e em L2. Ambos os autores usam da linguagem coloquial para explicar essas propriedades. Em L3 essas noções aparecem diretamente na forma de teoremas. No quadro 02 sintetizamos os resultados obtidos:

Quadro 02: Síntese dos resultados obtidos.

Livro	Conteúdo	Recurso-meta	Quantidade
L1	- Introdução do conceito de *base*; - Exemplos de bases; - Existência de infinitas bases; - Redução e extensão de conjunto de vetores a uma base.	- Linguagem coloquial; - Representação geométrica; - Princípios da Concretização e da Generalização.	5
L2	- Introdução do conceito de *base*; - Exemplos de bases; - Teorema do Conjunto Gerador; - Redução e extensão de conjunto de vetores a uma base.	- Principio da Necessidade; - Mudança de quadro; - Principio da Concretização; - Linguagem coloquial;	5
L3	- Introdução do conceito de *base*;	- Principio da Generalização;	2

	- Como encontrar bases.	- Mudança de ponto de vista.	

Fonte: elaboração dos autores.

Apesar do uso dos recursos-meta ter ficado mais evidente nos livros L1 e L2, podemos considerar que, ao contrário do que foi constatado por Araújo (2002), atualmente, os resultados foram promissores, pois dão indícios de uma preocupação por parte dos autores em apresentar na narrativa das explicações dos conteúdos, elementos que pudessem gerar a reflexão do leitor acerca dos significados dos conceitos abordados.

Os recursos mais utilizados foram o uso de linguagem coloquial, representações geométricas e os Principios de Harel. Porém, consideramos que seria pertinente o uso de contra-exemplos como meio de proporcionar novas formas de explicar os conceitos, de modo que o aprendiz pudesse enxergar os conteúdos sob diferentes pontos de vista. Bem como, o uso de questionamentos que pudessem instigar o leitor a refletir um pouco mais, antes de prosseguir com seus estudos.

Esperamos que este estudo possa contribuir para a conscientização dos professores acerca da importância da utilização de tais recursos no ensino - quando da impossibilidade de introdução dos conceitos através de problemas (como é o caso da Álgebra Linear) - bem como da escolha de livros didáticos que contemplem esses recursos que primam pela reflexão *sobre* o conhecimento matemático e não somente a exposição sucessiva de teoremas, provas e algoritmos. Ressaltamos, que de posse do conhecimento acerca do significado e contribuições das alavancas meta para o ensino, o próprio professor pode pesquisar e elaborar situações e atividades que façam uso desses recursos.

6. Agradecimentos

Agradecemos à Fundação Cearense de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico – FUNCAP, pelo incentivo ao desenvolvimento de pesquisas científicas nessa área.

7. Referências

ARAÚJO, C. C. V. B. **A metamatemática no livro didático de álgebra linear**. 2002. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2002.

BARDIN, L. **Análise de conteúdo.** Lisboa: Edições 70, [2004?].

DORIER, J. L. et al. **On the teaching of Linear Algebra**. Grenoble, France: Kluwer Academic Publishers, 2000.

________________. Teaching and learning Linear Algebra in first year of French Science University. **European Research in Mathematics Education I**: group 1. 1999. p. 103-112. Disponível em:< http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/papers/g1-dorier-et-al.pdf> Acesso em: 12 mar. 2012.

DORIER, J. L. Recherche en Histoire et en Didactique des Mathématiques sur l'Algebre Linéaire – perspequitives théorique sur leurs interations. **Les Cahiers Du Laboratoire Leibniz**. Nº 12. Grenoble, France. 2008. Disponível em: <http://www-leibniz.imag.rf/LesCahiers> Acesso em: 10 Mar. 2012.

HAREL, G. Three principles of learning and teaching mathematics In: DORIER, J. L. *et al*. **On the teaching of Linear Algebra**. Grenoble, France: Kluwer Academic Publishers, 2000. p. 177-189.

LAY, D. C. **Álgebra linear e suas aplicações.** 2. ed. (Reimpr.) Rio de Janeiro, RJ: LTC, 2011.

OLIVEIRA, L. C. B. **Como funcionam os recursos-meta em aula de Álgebra Linear?** 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontificia Universidade Católica, São Paulo, 2005. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/luis_carlos_barbosa.pdf> Acesso em: 06 Ago. 2012.

ROBERT, A.; ROBINET, J. Prise en compte du meta en didactique des mathematiques. **Cahier de DIDIREM**, Université Paris, v. 21, september 1993. Disponível em: <http://www.irem.univ-paris-diderot.fr/up/CDD_21_-_A.Robert_et_J_.Robinet_-_Prise_en_compte_du_meta_en_didactique_des_math%c3%a9matiques_.pdf> Acesso em: 05 Dez. 2012.

ROGALSKI, M. L'enseignement de l'algebre lineaire en primiere annee de DEUG A. **Gazette Des Mathématiciens**, nº 60, avril 1994.

POOLE, D. **Álgebra Linear**. São Paulo, SP: Cengage Learning, 2011.

SILVA, C. E. **A noção de base de um espaço vetorial é trabalhada como "ferramenta explícita" para os assuntos de ciência da computação?** 2005. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2005. Disponível em: <http://www.pucsp.br/pos/edmat/ma/dissertacao/carlos_eduardo_silva.pdf > Acesso em: 06 Ago. 2012.

STRANG, G. **Álgebra linear e suas aplicações.** São Paulo, SP: Cengage Learning, 2009.