PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DA CONTAGEM E A COMPREENSÃO DE PROBLEMAS COMBINATÓRIOS: OLHARES DE PROFESSORES DO ENSINO MÉDIO.

Cristiane de Arimatéa Rocha
UFPE - Centro Acadêmico do Agreste
tiane_rocha@yahoo.com.br

Resumo:
O presente estudo analisou a compreensão de professores de matemática no Ensino Médio na resolução de problemas combinatórios com ênfase no Princípio Fundamental da Contagem (PFC). Um questionário fechado, constituído por oito problemas combinatórios, foi respondido por 11 professores de matemática que atuam no Ensino Médio. Foi a cada participante as justificativas de cada resolução. A partir da análise, constatou-se nas justificativas apresentadas a utilização do PFC como mais frequente, presente nos problemas de *arranjo, combinação, permutação* e *produto cartesiano*. Além disso, observou-se a presença de conhecimento do conteúdo de Combinatória dos professores que criticavam os enunciados dos problemas combinatórios e ainda apresentavam os elementos invariantes de problemas combinatórios.

Palavras-chave: Ensino de Combinatória; Princípio Fundamental da Contagem; Conhecimento de professores do Ensino Médio.

1. Introdução

O ensino e aprendizagem de Combinatória na Educação Básica tem sido foco de de diferentes pesquisas. De acordo com os Parâmetros Curriculares Nacionais dos anos iniciais (Brasil, 1997) o ensino e aprendizagem de Combinatória pode ser principiado já a partir desse nível de escolaridade, no entanto, apesar da presença de problemas combinatórios em alguns livros didáticos de Matemática do Ensino Fundamental e poucas práticas de professores e de cursos de formação de professores, geralmente é no Ensino Médio que o trabalho com esse conteúdo é desenvolvido e muitos dos livros didáticos deste nível o trazem apenas no 2º ano.

Fischbein (1975) indica a necessidade do ensino específico de Combinatória para o desenvolvimento da habilidade de resolver problemas combinatórios. Nesse sentido, pesquisas como Pessoa e Borba (2009), indicam que desde os anos iniciais alguns alunos já conseguem resolver esses tipo de problema (com número menor de possibilidades), mesmo assim, para que haja estratégias de resolução sistemáticas e maior abrangência de problemas resolvidos, as autoras advogam sobre a necessidade de um trabalho em sala de aula que abordem elementos invariantes e representações envolvidos em problemas dessa natureza.

Rocha e Borba (2012) em sua pesquisa analisaram, por meio de entrevistas semi-estruturadas, os conhecimentos de dois professores de Matemática que atuam no Ensino Médio têm sobre Combinatória e seu ensino. Neste artigo, indicam a necessidade da compreensão das diferenças entre os problemas combinatórios por professores do Ensino Médio no desenvolvimento de práticas de ensino e aprendizagem de Combinatória.

Atualmente, os Parâmetros Curriculares de Matemática para o Ensino Fundamental e Médio do Estado de Pernambuco (Pernambuco, 2012) identificando como expectativas de aprendizagem para o 4º até o 6º anos do Ensino Fundamental o trabalho de resolução e elaboração de problemas multiplicativos com a ideia de combinatória. No 8º ano esse mesmo documento, orienta a utilização do princípio multiplicativo, na resolução de problemas de contagem enfatizando diferentes tipos de representação como o diagrama de árvore, tabelas e esquemas. No Ensino Médio, incentiva o trabalho com os problemas combinatórios (*arranjo*, *combinação* e *permutação*) no decorrer do 1º, 2º e 3º anos, norteando a discussão a partir de alternativas ao uso de fórmulas. Apesar dessas orientações e de pesquisas, ainda é reduzido o número de alternativas para a utilização de fórmulas na resolução de problemas combinatórios.

Rocha e Ferraz (2011) ao analisarem as estratégias de resolução de problemas combinatórios por 31 professores com formação em Pedagogia (15) e em Licenciatura em Matemática (16) observaram que o tipo de representação mais utilizada nessa resolução por professores de formação de licenciatura em Matemática foi o Princípio Fundamental da Contagem.

Nesse contexto, o presente artigo visa analisar a compreensão de professores de matemática no Ensino Médio na resolução de problemas combinatórios com ênfase no Princípio Fundamental da Contagem. Para isso, foi identificado a verificação dos desempenhos dos professores por tipo de problema combinatório e por número de etapas de escolhas, a análise das justificativas apresentadas na resolução dos problemas combinatórios, a presença de invariantes dos problemas combinatórios e diferentes tipos de representações nas justificativas apresentadas pelos professores do Ensino Médio.

2. O ensino e aprendizagem de Combinatória no Ensino Médio

A Base Curricular Comum de Matemática de Pernambuco com a intenção de consolidar noções combinatórias no Ensino Médio sugere a ampliação de "estratégias básicas de contagem, evitando-se o ensino restrito a uma extensa lista de fórmulas que não apresentem significado para o aluno" (PERNAMBUCO, 2008, p.111).

Nessa mesma direção, o Guia Nacional do Livro Didático do Ensino Médio (PNLEM 2012) recomenda para o bom ensino de Combinatória no Ensino Médio o desenvolvimento da:

> ... capacidade para escolher diferentes técnicas de contagem e usá-las de modo eficiente na resolução dos problemas. É prejudicial um ensino que habitue o aluno a sempre tentar resolver qualquer problema de contagem com o uso somente de fórmulas (BRASÍLIA, 2011, p.29).

Nesse contexto, verificou-se nos documentos curriculares oficiais do Ensino Médio a indicação do trabalho de Combinatória com problemas diferenciados e a não resolução de problemas apenas com a utilização de fórmulas, incentivando no ensino e aprendizagem de Combinatória a criatividade na elaboração da resolução e a exploração da percepção do aluno.

Dessa maneira, Rocha e Borba (2012) defendem que antes do ensino de Combinatória se formalizado, o que geralmente acontece no Ensino Médio, outras práticas devem ser integradas ao Ensino Fundamental para que haja uma melhor compreensão dessa temática por alunos e professores.

Por isso é importante ressaltar que as diferentes formas de organizar e resolver problemas combinatórios geram estratégias que não são apenas aplicáveis à Combinatória, auxiliando na aprendizagem de técnicas gerais de resolução de problemas. Todavia, para isso, se faz necessário conhecer as características de cada um dos tipos de problemas combinatórios e, além disso, conhecer as especificidades.

Pessoa e Borba (2009), os problemas combinatórios e a compreensão de alunos do Ensino Fundamental ao Ensino Médio, propuseram uma classificação na qual foi incluído o *produto cartesiano*, aos problemas que são trabalhados explicitamente no Ensino Médio, *arranjo*, *permutação* e *combinação*. Essas autoras, fundamentadas na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1986), apresentaram a discussão dos os diferentes significados a partir de situações-problema, invariantes do conceito e tipos de representações. Com base nessa discussão organizou-se uma sistematização no Quadro 1 a seguir.

Quadro 1: Problemas Combinatórios e seus Invariantes e Representação

	Situação-Problema	Tipo de Representação	Invariantes
COMBINAÇÃO	Na Olimpíada Brasileira de Matemática, o grupo vencedor era composto por 8 alunos. Sabendo que poderão ser formados diferentes grupos com 4 desses alunos para representar o Brasil na Olimpíada Mundial, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?	**Divisão como um processo de redução de agrupamentos repetidos** $\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$	Ordenação de elementos de um mesmo conjunto **não** gera novas possibilidades; Há escolhas de subgrupo de elementos
ARRANJO	Em uma final de natação estilo livre, 7 nadadores estão disputando os 4 primeiros lugares. Sabendo que os nadadores concorrem ao primeiro, segundo, terceiro e quarto lugares, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?	**Princípio Fundamental da Contagem** $7 \times 6 \times 5 \times 4$	Ordenação de elementos de um mesmo conjunto gera novas possibilidades; Há escolhas de subgrupo de elementos;
PERMUTAÇÃO	A revista Fi-Fi-Fi deseja fotografar 4 artistas sentados em um sofá, com espaço para todos. Sabendo que todos os artistas podem mudar de lugar no sofá de modo que seja possível tirar diferentes fotos, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?	**Princípio Fundamental da Contagem** $4 \times 3 \times 2 \times 1$	Ordenação de todos elementos de um mesmo conjunto;
PRODUTO	No restaurante “Sabor Divino” Marina quer comprar seu almoço. Ela pode escolher entre 3 tipos diferentes de salada, 2 tipos diferentes de arroz, 4 tipos diferentes de carne e 3 tipos diferentes de feijão. Sabendo que ela precisa escolher um tipo de cada opção: salada, arroz, carne e feijão, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?	**Princípio Fundamental da Contagem** $3 \times 2 \times 4 \times 3$	- Dado dois (*ou mais*) conjuntos disjuntos: se temos n elementos para escolher no primeiro, p elementos no segundo para escolher um elemento de cada temos n x p possibilidades

Nesse quadro a representação escolhida foi o Princípio Fundamental da Contagem como tipo de representação para a resolução dos diferentes tipos de problemas combinatórios. A escolha pelo tipo de representação se deve pelo grande número de possibilidades dos problemas. Em outros problemas, com número menor de possibilidades podem ser utilizadas representações como a árvore de possibilidades, listagem, diagrama, quadros, e o uso de fórmulas, entendendo seu uso como uma das possíveis representações para um problema combinatório e não a única.

Esses diferentes significados, representações e invariantes dos problemas combinatórios refletem na compreensão dos alunos e nas escolhas de ação dos professores.

Portanto, observamos que os problemas combinatórios possuem aspectos comuns (alguns tipos de representações), mas também diferentes invariantes que podem enfatizados no ensino de Combinatória. Conhecer essas particularidades traz subsídios para a escolha problemas que permitam a construção desse tipo de raciocínio nos alunos, além de discutir sobre as diferentes estratégias de resolução.

De acordo com Carvalho (2007) o *Princípio Fundamental da Contagem* (PFC) ou *Princípio Multiplicativo* é definido por: Se uma decisão D1 pode ser tomada de p modos e, qualquer que seja esta escolha, a decisão D2 pode ser tomada de q modos, então o número de maneiras de se tomarem consecutivamente as decisões D1 e D2 é igual a p.q (CARVALHO, 2006, p.3).

Em pesquisa realizada em três coleções de livros didáticos de Matemática do Ensino Médio, Sabo (2007) identificou que apesar deste princípio ser enunciado nos livros didáticos é apresentado, geralmente, apenas para eventos compostos por duas etapas sucessivas e independentes (conforme a definição acima) e geralmente sua versão mais ampliada aparece apenas nos exercícios propostos por cada coleção, não sendo abordadas justificativas para ampliação do PFC para problemas de várias etapas. Esse autor afirmou também que o livro didático 'é um fator determinante na elaboração dos conceitos de contagem pelos professores nas aulas de matemática' (SABO, 2007, p.18).

Nesse sentido, a compreensão dos professores sobre como os alunos identificam e utilizam o número de etapas de escolhas nos problemas combinatórios e como os professores discutem e introduzem essa noção de escolha no Princípio Fundamental da Contagem é importante para a discussão de práticas que visem à construção de conceitos relacionados.

Em pesquisas realizadas com professores e licenciandos de Matemática, reforçam a importância da reflexão sobre práticas, da investigação sobre as salas de aula e da identificação das diferentes facetas dos conhecimentos dos professores. Shulman (2005) defende a formação de uma base de conhecimentos na qual se articulam os domínios do conteúdo, os domínios pedagógicos do conteúdos, entre outros. Nesse contexto, identificamos alguns estudos que tratam desses conhecimentos em relação ao ensino e aprendizagem de Combinatória.

Rocha (2006), em sua dissertação, analisou a construção do conhecimento de Combinatória em duas turmas de licenciandos em Matemática, dividida em dois momentos: um dedicado à observação de uma turma de licenciandos durante uma prática tradicional de ensino de Combinatória e outro, relativo à utilização do Ciclo da Experiência de Kelly. A pesquisa evidenciou o papel do Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo como ―uma das bases para fundamentar dentro do ponto de vista pedagógico a classe de problemas de contagem abordada pela Análise Combinatória (ROCHA, 2006, p.96).

Pinheiro e Sá (2007) apresentaram uma pesquisa realizada com 20 professores de Ensino Médio de Belém do Pará, com o objetivo de determinar a prática pedagógica utilizada no trabalho de ensino de Combinatória no Ensino Médio. Foi utilizado um questionário fechado no qual se verificou a presença de questionamentos direcionados aos procedimentos metodológicos desenvolvidos durante as aulas ministradas pelos participantes dessa pesquisa. Apesar de alguns dos docentes possuírem especialização, os autores indicaram que a ferramenta principal para a elaboração das aulas foi o livro didático, utilizando em sua maioria a prática estruturada a partir de métodos formais para as aulas de Combinatória. Já os que apresentam menos tempo lecionando Combinatória (quatro professores), indicaram que partiam de uma situação-problema para, em seguida, formalizar os conceitos. Pinheiro e Sá (2007) observaram a forte incidência da apresentação de fórmulas e, a seguir, aplicações das mesmas no ensino de Combinatória.

Sabo (2010) em sua investigação se propõe a identificar os saberes do professor do Ensino Médio, em relação ao ensino e à aprendizagem de Análise Combinatória por meio de entrevistas semi-estruturadas com seis professores subdividida em quatro etapas, sendo uma delas com foco na prática do professor (planejamento, preparação de aula, livro didático, atitudes dos alunos e avaliação).

Sabo (2010) verificou que alguns professores valorizam a memorização e a aplicabilidade de fórmulas. Além disso, a importância de formações continuadas e das trocas entre colegas de profissão como possíveis modificadores favorecendo a construção dos saberes profissionais. Sabo (2010) apresentou algumas situações diferentes: ―alguns professores disseram valorizar o uso do Princípio Fundamental da Contagem em detrimento do emprego da fórmula, e outros valorizam o uso das fórmulas, mas não mostraram saber justificar e validar sua origem (SABO, 2010, p. 187).

Essas pesquisas apontaram dificuldades dos professores e de futuros professores na resolução desses problemas e na explicitação de práticas relativas ao ensino desse conteúdo e auxiliam nos debates relativos a formação de professores em relação ao ensino de

Combinatória, principalmente na discussão e análise dos dados encontrados nessa investigação.

3. Método

Para realização dessa pesquisa foi elaborado um teste composto por oito problemas combinatórios (2 de *produto cartesiano*(PC1 e PC2), 2 de *arranjo* (A1 e A2), 2 de *combinação* (C1 e C2) e 2 de *permutação* (P1 e P2)). Na intenção de observar se mudanças no número de etapas para resolver os problemas exercem influência considerável no desempenho dos sujeitos nesses problemas foram controlados o número de etapas de escolha por tipo de problema, os problemas 1, 3, 5 e 7 possuem apenas 4 etapas de escolha, enquanto que os problemas 2, 4, 6 e 8 possuem 5 etapas de escolha. A ideia por traz dessa preferência se justifica pela comparação das dificuldades de resolução entre os diferentes tipos de problemas.

O teste foi fechado apresentando alternativas para serem escolhidas e justificadas. Cada problema tinha apenas uma alternativa correta. Essa escolha justifica-se porque para se trabalhar problemas combinatórios com um maior número de etapas gera um grande número de possibilidades e desejava-se observar as justificativas apresentadas e não os cálculos em cada problema. Observe o exemplo a seguir:

1. *(PC1) No restaurante "Sabor Divino" Marina quer comprar seu almoço. Ela pode escolher entre 3 tipos diferentes de salada, 2 tipos diferentes de arroz, 4 tipos diferentes de carne e 3 tipos diferentes de feijão. Sabendo que ela precisa escolher um tipo de cada opção: salada, arroz, carne e feijão, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?*

a) 3 + 2 + 4 + 3 *b) 3 x 2 x 4* *c) 4 x 3 x 2 x 1* *d)* $\frac{3 \times 2 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$

e) 3 x 2 x 4 x 3 *f) Nenhuma das respostas anteriores*

*Justifique:*____

Na alternativa apresenta-se uma adição incorreta; na b uma multiplicação inadequada com base no enunciado do problema; na c uma multiplicação com base no uso adequado/ ou inadequado do *Princípio Fundamental da Contagem* (a noção de fatorial); na d uma divisão incorreta, que no caso dos problemas do tipo de Combinação será correta; e) o uso correto do PFC e na alternativa f) a possibilidade de marcar nenhuma das anteriores.

Entre alternativas propostas para as questões foram levados em consideração possíveis dificuldades que se registram nas estratégias utilizadas por alunos em diversos níveis de escolarização, como: a escolha da operação devido a palavras específicas encontradas no enunciado e a seleção, dos números, também citados no enunciado para operar; além de estratégias com a observação inadequada de invariantes relativos ao tipo de problema.

Para a análise tornou-se fundamental a observação da justificativa exposta pelos sujeitos disposta sempre ao final de cada problema, observando os argumentos e representações utilizados. Nas demais disposições das alternativas no teste foram alteradas a ordenação de sua apresentação.

Os participantes da pesquisa foram professores de formação inicial em Matemática e que atualmente ensinam Matemática no Ensino Médio. Foram analisados os protocolos de resposta e justificativas apresentados por 11 professores ao resolver o teste proposto. Os professores foram codificados de PEM1 a PEM11, respectivamente e atuam há no mínimo 6 anos em Escolas Públicas de Pernambuco.

Na etapa de análise procurou-se investigar o desempenho dos professores de Ensino Médio na resolução dos problemas combinatórios, os aspectos invariantes de cada situação foram explicitados pelos professores, e a presença do princípio Fundamental da Contagem na resolução dos professores, além das estratégias por questão, a variação do tipo de representação utilizada (uso de fórmulas, uso de árvores ou diagramas, menção a listagens, desenhos, observação de regularidades, adição e multiplicação, princípio fundamental da contagem).

4. Análise de Resultados

Para este estudo, foi feito o levantamento acerca dos acertos totais dos professores no teste aplicado por problema. Esses acertos e erros foram organizados no Quadro 2 no qual o 1 representa acerto do problema e 0 representa o erro.

Quadro 2: Acertos por questão dos participantes

	PEM1	PEM2	PEM3	PEM4	PEM5	PEM6	PEM7	PEM8	PEM9	PEM10	PEM11
PC1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
PC2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
A1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
A2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
C1	1	1	1	**0**	1	1	1	1	1	1	1
C2	1	1	1	**0**	1	1	1	1	1	1	1
P1	1	**0**	1	1	1	**0**	1	1	1	1	1

P2	1	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1

LEGENDA: PC: Produto Cartesiano; **A**: Arranjo; **C:** Combinação**; P:** Permutação;

1: 4 etapas de escolha; **2:** 5 etapas de escolha;

Como se pode observar a partir do Quadro 2, os professores do Ensino Médio obtiveram um grande número de acertos. A média geral de acertos foi de aproximadamente 7,45 (sendo a média máxima atingida 8). Em relação ao desempenho por tipo de problema observa-se que o problema de *Permutação* com menor índice de acertos, seguidos pelo problema do tipo *Combinação*. Verifica-se ainda no quadro 5 que os professores PEM 2 e PEM 6 erraram os problemas do tipo *Permutação* e apenas o professor PEM 4 os problemas do tipo de *Combinação*.

7. A revista Fi-Fi-Fi deseja fotografar 4 artistas sentados em um sofá, com espaço para todos. Sabendo que todos os artistas podem mudar de lugar no sofá de modo que seja possível tirar diferentes fotos, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) 4 x 4
b) 4 x 3 x 2 x 1
c) $\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 4}$
d) 4 + 3 + 2 + 1
e) 4 + 4
X Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: Um enunciado com certo grau de subjetividade na interpretação. Faltam dados para potencializar uma resposta objetiva.

Figura 1: Protocolo retirado de PEM 2 no problema 7(P1)

Os erros encontrados na permutação foram a partir de criticas ao enunciado da questão, como se pode observar na Figura 1 acima que critica o grau de subjetividade do enunciado. Já o erro obtido nos problemas de *Combinação* foi em relação a presença do invariante da ordenação como verifica-se na Figura 2 a seguir.

5. Na Olimpíada Brasileira de Matemática, o grupo vencedor era composto por 8 alunos. Sabendo que poderão ser formados diferentes grupos com 4 desses alunos para representar o Brasil na Olimpíada Mundial, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) $\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$
b) 8 x 4
c) 8 + 4
d) 4 x 3 x 2 x 1
X 8 x 7 x 6 x 5
f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: TEMOS 8 POSSIBILIDADES PARA ESCOLHER O 1º DOS QUATRO ALUNOS. DA MESMA FORMA 7 PARA O 2º, 6 PARA O 3º E 5 PARA O QUARTO ALUNO. LOGO O PRODUTO DESSES VALORES (8x7x6x5) DETERMINARÁ O RESULTADO.

Figura 2: Protocolo retirado de PEM 4 no problema 5 (C1)

Nesse problema o professor compreende a situação proposta como uma situação em que a ordem gera novas possibilidades, tratando-o como um problema de arranjo. Essa é uma dificuldade recorrente em alunos e professores dos diferentes níveis. Rocha (2011) verificou em entrevistas com 6 professores dos diferentes níveis (2 dos anos iniciais, 2 dos anos finais e 2 dos Ensino Médio) que apenas um professor do Ensino Médio não teve dificuldade em diferenciar problemas de *arranjo* e *combinação*, os demais professores entrevistados tiveram.

Constata-se ainda que o número de etapas não foi uma dificuldade que se apresentou entre os professores do Ensino Médio, pois não houve diferença entre as medias de acertos dos problemas 1(PC1), 3(A1), 5(C1), 7(P1) que possuem apenas 4 etapas de escolha e a média de acertos dos problemas 2(PC2), 4(A2), 6(C2), 8(P2) que possuem 5 etapas de escolha. Acredita-se que isso se deve ao fato de não haver mudanças entre os contextos apresentados em cada tipo de problema.

Observa-se que o número de etapas de escolha não foi considerado difícil pelos professores nessa pesquisa, já que não discutiam sobre a aprendizagem dos alunos e sim, apenas sobre a resolução dos problemas proposto. Pode-se ainda verificar no Quadro 5, de maneira geral que os professores não sentiram dificuldades para assinalar a alternativa adequada, contudo destacou-se que os erros cometidos ocorreram sempre aos pares e no mesmo tipo de problema. Assim, reforça a ideia que a diferença do número de etapas para a resolução do problema influenciou a decisão dos professores. Por outro lado, o número de etapas pode ser um fator que dificulte a compreensão dos alunos em relação aos problemas combinatórios.

Como não há variação de contextos entre os problemas combinatórios do mesmo tipo, observa-se uma tendência por parte dos professores de repetição de justificativa e de estratégia de resolução. No entanto, ao se analisar as diferentes justificativas propôs-se a seguinte classificação daquelas que foram apresentadas pelos professores de matemática que participaram da pesquisa:

J1 - Utilização do Princípio Fundamental da Contagem;

J2 – Referência a utilização de Fórmulas;

J3 – Utilização do nome dos problemas (nomenclatura).

Considerou-se ainda na análise as críticas aos enunciados dos problemas propostos apresentadas pelos professores e a presença nas justificativas de elementos dos invariantes dos problemas combinatórios. No Quadro 3 apresenta-se a presença dessas justificativas por professores e pelo tipo de problemas combinatórios.

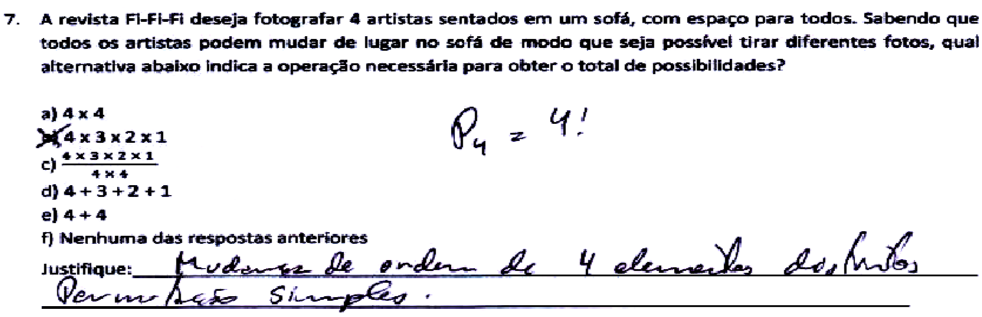
Quadro 3: Análise das justificativas apresentadas pelos participantes da pesquisa

	PEM1	PEM2	PEM3	PEM4	PEM5	PEM6	PEM7	PEM8	PEM9	PEM10	PEM11
PC1	J1	J1	J1	J1 i	J1	J1	J1	J1	*	J1	J1
PC2	J1	J1	J1	J1 i	J1	J1	-	J1		J1	J1
A1	J1	J1 i	J1	J1	J2 i		J1	J1	J1 i	J3	árvore
A2	J1	J1 i	J1	J1	J2 i		-	J1	-	J3	árvore
C1	J2	i	J2 i	**J1**	J2 i	J3	J2 i	J2	J1 i	J3 i	J3
C2	J2	i	J2 i	**J1**	J2 i	J39	J2 i	J2	-	J3 i	J3
P1	J1	*	J1, J2	J1	J1, J2	*	J2 i	J2 *	J1 i	J3	J1
P2	J1	*	J1, J2	J1	J1, J2	*	-	J2	-	J3	J1

Legenda: * - critica ao enunciado ; i - presença de invariantes

A partir do Quadro 3, observa-se maior frequência justificativa J1 que se refere a utilização do *Princípio Fundamental Contagem*, e que esta se faz presente em todos os tipos de problemas combinatórios no *produto cartesiano*, no *arranjo*, na *combinação* e na Permutação, evidenciando o papel dessa representação na resolução desses tipos de problema. No problema de *combinação* (C1 e C2) constata-se maior frequência na justificativa J2 por meio da utilização da fórmula. Seguida da justificativa J3 com uso da nomenclatura.

A justificativa 3 (nomenclatura) também ocorre em outros tipos de problema como observa-se na Figura 3 a seguir, mas nesse protocolo o professor PEM 7 utiliza a nomenclatura, mas apresenta ainda a questão da ordenação que significa a explicitação de um invariante da Permutação e ainda a presença da fórmula e fatorial apresentando formas de representação variadas e um bom domínio do conteúdo de Combinatória.


7. A revista Fi-Fi-Fi deseja fotografar 4 artistas sentados em um sofá, com espaço para todos. Sabendo que todos os artistas podem mudar de lugar no sofá de modo que seja possível tirar diferentes fotos, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) 4 x 4
b) 4 x 3 x 2 x 1
c) $\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 4}$
d) 4 + 3 + 2 + 1
e) 4 + 4
f) Nenhuma das respostas anteriores

$P_4 = 4!$

Justifique: Mudança de ordem de 4 elementos distintos Permutação Simples.

Figura 3: Presença de Nomenclatura(J3) no problema 7 (P1) de Permutação do Professor PEM 7

Outros professores mencionaram a possibilidade de uso de outras estratégias como: árvore de possibilidades (PEM11), fórmulas, etc. Vale destacar que essa multiplicidade de estratégias, ao longo do teste, se tornou mais frequente nos problemas de *combinação*. Na Figura 3, observa-se que a necessidade de expor os invariantes é bastante presente nas justificativas referentes aos problemas de *combinação* (6). Embora ocorram a explicitação dos invariantes nos demais tipos de problemas de *arranjo* (3), *permutação* (2) e *produto cartesiano* (1).

1. No restaurante "Sabor Divino" Marina quer comprar seu almoço. Ela pode escolher entre 3 tipos diferentes de salada, 2 tipos diferentes de arroz, 4 tipos diferentes de carne e 3 tipos diferentes de feijão. Sabendo que ela precisa escolher um tipo de cada opção: salada, arroz, carne e feijão, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) 3 + 2 + 4 + 3

b) 3 x 2 x 4

c) 4 x 3 x 2 x 1

d) $\frac{3 \times 2 \times 4 \times 3}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$

~~e)~~ 3 x 2 x 4 x 3

f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: De cada ítem deve ser escolhido uma unidade. Então a maneira de escolher cada ítem varia conforme sua quantidade. Por exemplo, se tem 2 tipos diferentes de arroz, podemos escolher o arroz de duas maneiras. Portanto, o produto entre as quantidades de cada ítem determina o total de possibilidades.

Figura 4: Presença dos invariantes do problema 1 (PC1) de Produto Cartesiano do Professor PEM 4

Observa-se na Figura 4 a explicitação do invariante do Produto cartesiano: a noção de escolha. Além disso, o professor PEM 4 expõe os diferentes conjuntos que compõem o número de possibilidades total a partir da utilização do PFC.

5. Na Olimpíada Brasileira de Matemática, o grupo vencedor era composto por 8 alunos. Sabendo que poderão ser formados diferentes grupos com 4 desses alunos para representar o Brasil na Olimpíada Mundial, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

~~a)~~ $\frac{8 \times 7 \times 6 \times 5}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$

$\binom{8}{4} = \frac{8.7.6.5}{4.3.2.1}$

b) 8 x 4

c) 8 + 4

d) 4 x 3 x 2 x 1

e) 8 x 7 x 6 x 5

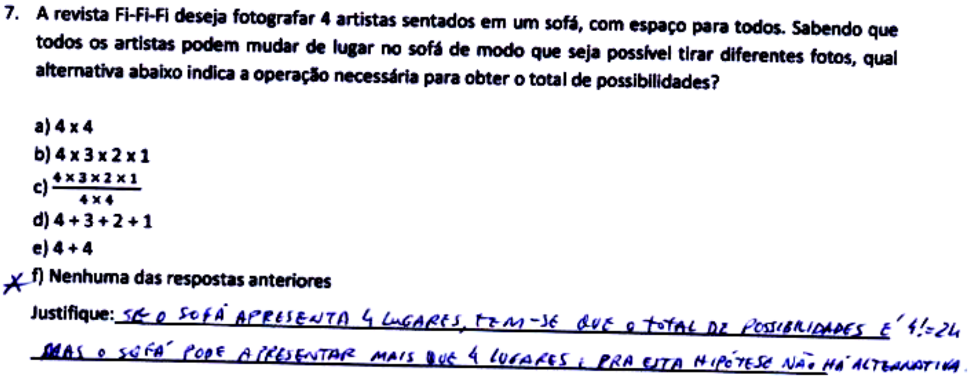
f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: Escolha de 4 em 8, sem importar a ordem de escolha.

Figura 5: Presença dos invariantes do problema 6 (C1) de Combinação do Professor PEM 7

Na figura 5 há a explicitação dos invariantes de ordenação quando esta representa não representa novas possibilidades (*combinação*). O fato de surgirem várias situações nas quais os elementos invariantes dos problemas combinatórios pode ser creditado entre outros fatores a experiência desses professores especificamente no Ensino Médio. Shulman (2005) indica a experiência como uma das fontes do conhecimento do professor. Esse fato é reforçado na pesquisa de Rocha (2011) quando em entrevistas os professores de formação em Matemática que atuavam no Ensino Fundamental e no Ensino Médio apresentaram diferenças tanto em relação a utilização de nomenclaturas dos problemas combinatórios, quanto na presença de invariantes.

Os enunciados dos problemas de Permutação foram criticados por três professores (PEM2, PEM3 e PEM 8) e apenas um professor (PEM 9)criticou o enunciado do problema de Produto Cartesiano. Na figura 6 apresenta-se um exemplo dessa crítica.



7. A revista Fi-Fi-Fi deseja fotografar 4 artistas sentados em um sofá, com espaço para todos. Sabendo que todos os artistas podem mudar de lugar no sofá de modo que seja possível tirar diferentes fotos, qual alternativa abaixo indica a operação necessária para obter o total de possibilidades?

a) 4×4
b) $4 \times 3 \times 2 \times 1$
c) $\frac{4 \times 3 \times 2 \times 1}{4 \times 4}$
d) $4 + 3 + 2 + 1$
e) $4 + 4$
X f) Nenhuma das respostas anteriores

Justifique: SE O SOFÁ APRESENTA 4 LUGARES, TEM-SE QUE O TOTAL DE POSSIBILIDADES É 4!=24 MAS O SOFÁ PODE APRESENTAR MAIS QUE 4 LUGARES; PRA ESTA HIPÓTESE NÃO HÁ ALTERNATIVA.

Figura 6: Critica ao enunciado do problema 7 (P1) de Permutação do Professor PEM 8

As críticas apresentadas se concentram na disposição dos artistas no sofá e na quantidade de lugares. É interessante que hajam críticas, pois elas podem justificar possíveis erros cometidos pelos alunos e ainda representa a capacidade desses professores em sugerir alternativas para a prática efetiva de problemas para suas aulas. Rocha e Ferraz (2011) também observaram que a capacidade de criticas ao enunciado dos problemas em outro grupo de professores de matemática.

5. Considerações Finais

Em face de críticas feitas aos enunciados de alguns problemas constituintes do teste, principalmente os de permutação sem repetição pode-se especular que efeitos danosos para o ensino de combinatória podem estar ocorrendo nas salas de aula de Matemática devido a inadequadas elaborações de problemas e equivocadas interpretações dos mesmos por parte dos educadores.

Com a ordem estabelecida para a apresentação dos problemas foi possível perceber que nos pares do mesmo tipo a generalização dos procedimentos ficou privilegiava, embora não se tenha observado explicitação contundente de uma repetição de procedimento para todos os outros tipos de problemas. Mesmo assim, ainda constatamos um bom número de uso do PFC como possível estratégia para a resolução.

No tocante às questões de combinação especificamente observou-se ainda com certa frequência a recorrência à fórmula para a justificativa da resposta, contudo a identificação dos elementos invariantes nesse tipo de questão pôde ser evidenciado justamente pela exposição da fórmula ou de outra forma de representação utilizada pelo professor.

6. Agradecimentos

Ao colega pesquisador Ademilson do Nascimento Rodrigues com quem divido a autoria do trabalho de pesquisa e as professoras da disciplina de Tópicos de Combinatória na Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica da UFPE Profª.Dr. Rute Elisabete de Souza Rosa Borba e Profª. Dr. Cristiane dos Santos Azevedo Pessoa que contribuíram na elaboração do método e nas discussões acerca do ensino e aprendizagem de Combinatória.

7. Referências

BRASÍLIA. Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica. **Guia de livros didáticos: PNLD 2012** - Matemática, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais,** 3 Matemática. Brasília: 1997.

______. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio)**. Brasília: MEC, 2000.

CARVALHO, P.C.P. **Métodos de Contagem e Probabilidade**. 2006. Disponível em: http://www.de.ufpe.br/~leandro/APOSTILA_CONTAGEM.pdf

FISCHBEIN, Efraim. **The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children**. Reidel: Dordrecht, 1975.

PERNAMBUCO. Secretária de Educação. **Base Curricular Comum para as Redes públicas de Ensino Pernambuco:** Matemática. Recife: SE, 2008.

______. Secretaria de Educação. Pârametros Curriculares de Matemática da Educação Básica. Recife: SE, 2012.

PESSOA, C. & BORBA, R. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **ZETETIKÉ** – Cempem – FE – Unicamp, v. 17, jan-jun, 2009.

PINHEIRO, C.A.M.; & SÁ, P.F. O ensino de análise Combinatória: a prática pedagógica predominante segundo os docentes. **Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática**, Belo Horizonte, 2007.

ROCHA, J. de A. **Investigando a Aprendizagem da Resolução de Problemas Combinatórios em Licenciandos em Matemática**. Recife, 2006. 140f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências) – Universidade Federal Rural de Pernambuco, 2006.

ROCHA, C.A. e FERRAZ, M.C. A compreensão de professores com diferentes formações sobre o ensino de problemas combinatórios. **Anais do XIII CIAEM**. Recife, 2011

ROCHA, C.A. **Formação dos professores e o Ensino de Combinatória: diversos olhares, diferentes conhecimentos**. Dissertação. Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica. UFPE, Recife, 2011.

ROCHA, C.A. & BORBA, R. Expectativas e perspectivas docentes sobre ensino e aprendizagem de combinatória no Ensino Médio. **Anais do 3º Sipemat**. Fortaleza, 2012.

SABO, R.D. **Saberes docentes: a análise combinatória no Ensino Médio**.208f. Dissertação. Mestrado em Educação Matemática. São Paulo: PUC/SP, 2010.

______. **Análise de livros didáticos do Ensino Médio:** um estudo dos conteúdos referentes à. combinatória. Monografia (Especialização em Educação Matemática) Fundação Santo André, 2007

SHULMAN, L.S. Conocimiento y enseñanza: fundamentos de la nueva reforma. In: **Profesorado. Revista de currículum y formación del profesorado**. V 9,2, 2005 (p.1-30)

VERGNAUD, G. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das Matemáticas Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica**, *1*, 1986, p 75-90.