COMO ORONCE FINÉ, MÉDICO E PROFESSOR DE MATEMÁTICA FRANCÊS DO SÉCULO XVI, RESOLVIA PROBLEMAS DE MEDIÇÃO DE ALTURAS UTILIZANDO UM QUADRANTE GEOMÉTRICO?

Autor: Andressa Cesana
Instituição: Universidade Federal do Espírito Santo
E-mail: andressacesana@hotmail.com

Resumo:
Objetiva-se apresentar como o autor francês Oronce Finé (1494-1555) tratou do problema de calcular a altura de um objeto vertical utilizando um quadrante geométrico. Apoia-se na concepção do quão é importante fazer pesquisa histórica em Matemática e em Educação Matemática e, na concepção de passado dos historiadores Marc Bloch e Fernand Braudel. Considerando o método, caracteriza-se como uma pesquisa qualitativa de abordagem histórica e documental. Conta com os instrumentos metodológicos: pesquisa histórica, pesquisa bibliográfica, análise documental (de obras/livros-texto) e análise de conteúdo, através da utilização de categorias. Para os resultados, faz-se uma análise do problema *medir a altura de um objeto vertical* apresentado na Geometria de Oronce Finé, de acordo com as categorias: enunciado, linguagem, ilustração, abordagem resolutiva, instrumentos e o papel da História da Matemática no ensino e aprendizagem da Matemática.

Palavras-chave: história da matemática; história da educação matemática; problemas de alturas; Oronce Finé; quadrante geométrico.

1. Introdução

Este trabalho refere-se a um resultado parcial de pesquisa de doutorado (em andamento) na qual se propõe investigar *os textos e o contexto dos problemas de medição alturas em livros do Renascimento*. Investiga-se autores que viveram nesse período cujas produções matemáticas puderam *contar* como ocorreram tais textos e contexto. A proposta aqui é apresentar como um dos autores abordados na investigação, o médico e professor de matemática francês Oronce Finé (1494-1555), tratou o problema de calcular a altura de um objeto vertical em sua Geometria, inclusa em sua obra conhecida por *Prothomatesis*.

Considerando as múltiplas relações existentes entre a História da Matemática e o ensino e aprendizagem da Matemática, é necessário destacar que problemas de medição de alturas estão presentes até hoje em livros didáticos e são, em geral, recomendados pelos programas de Matemática do ensino fundamental e médio. Para confirmar isso, com atenção especial aos problemas de medição de alturas, fez-se uma busca preliminar por eles em livros didáticos de matemática atuais (a partir de 2009). Livros esses recomendados pelo Ministério da Educação/MEC para serem adotados em escolas públicas, tanto das séries finais do ensino fundamental quanto do ensino médio. Foram consultados quatro livros didáticos de matemática, examinadas as partes que continham os tipos de problemas que se investigam neste trabalho e, os exemplos a seguir, ilustram a abordagem deles no campo da educação matemática escolar atual.

Mori e Onaga (2009) apresentam em seu livro didático dedicado ao 9° ano do ensino fundamental uma seção intitulada *Leitura +* que, segundo elas, tem objetivo de tratar de assuntos extracurriculares e interdisciplinares contando com temas relacionados à história de pessoas que contribuíram com as produções matemáticas ao longo do tempo. Em uma dessas seções do *Leitura +*, as autoras propõem o *Cálculo de alturas e distâncias inacessíveis*, contando um pouco da história de Tales de Mileto e do problema que ele resolveu: *Como calcular a altura de uma pirâmide sem medi-la diretamente?*. Mori e Onaga (2009, p. 157) concluem que pelas observações de Tales de Mileto, "ele descobriu que a sombra de uma estaca qualquer, fincada perpendicularmente ao solo, era proporcional à sombra projetada por uma pirâmide no mesmo instante". Com isso, elas mostram a relação de proporcionalidade entre os triângulos retângulos semelhantes formados a partir das sombras da pirâmide e da estaca no solo.

Constatou-se que livros didáticos do 1° ano do Ensino Médio também contemplam em seus textos vários problemas de medição de alturas. A trigonometria é tema amplo de estudo no 1° ano e, esses problemas e medição de alturas geralmente são propostos após o tópico *Trigonometria no triângulo retângulo*. O exemplo[1] a seguir é apresentado em Souza (2010) na parte de *Atividades*. Elas foram propostas depois de terem sido abordadas as relações métricas num triângulo retângulo:

> Os funcionários de uma companhia de energia elétrica irão demarcar uma circunferência ao redor de uma torre de transmissão para que sejam fixados alguns ganchos sobre ela, e posteriormente colocados estais[2], ligando os ganchos ao topo da torre. De acordo com o projeto, os estais devem ter 57,7m de comprimento cada e formar com a horizontal um ângulo de 60°.
> a) A que distância do centro da base da torre, aproximadamente, devem ser fixados os ganchos para a colocação dos estais?
> b) Qual é a altura aproximada da torre de transmissão?
> c) Calcule, aproximadamente, a área interna à circunferência a ser demarcada pelos funcionários (SOUZA, 2010, p. 280).

O professor Paiva (2009), no terceiro capítulo da sua obra para o 1º ano do ensino médio, trata da geometria plana (triângulos e proporcionalidade) onde são propostos vários

[1]Vale ressaltar que há uma figura com o caráter meramente ilustrativo para este problema.
[2]Os estais são os cabos que estarão ligados pelos ganchos fixados na circunferência até o topo da torre.

problemas de calcular a altura de um objeto. Seguem dois exemplos desses problemas pelo autor:

> - “Um cabo de aço de 10m de comprimento é esticado no topo de um poste a um ponto de um terreno plano e horizontal, de modo que o ângulo entre o cabo e o solo mede 30°. Calcule a medida do poste” (PAIVA, 2009, p. 76).
> - Um estudante posicionou-se a 50m de distância de um prédio e colocou, a 16cm de seus olhos, uma haste vertical de 20cm de comprimento tal que a haste e o prédio ficassem sob o mesmo anglo visual. A partir dessa situação, o jovem calculou a altura do prédio. Qual é essa altura, em metros? (PAIVA, 2009, p. 77).

Já no livro didático de Dante (2010), para o 2° ano do Ensino Médio, o primeiro capítulo intitulado *Trigonometria: resolução de triângulos quaisquer*, contém vários problemas de medição de alturas, inclusive com questões de vestibulares. Esse primeiro capítulo do livro apresenta-se como uma revisão de conteúdos do 1° ano.

Neste trabalho tem-se por base a concepção do quão importante é fazer pesquisa histórica em Matemática e em Educação Matemática e, na concepção de conhecimento de passado do historiador Marc Bloch (2001) quando menciona que a própria definição de passado revela a impossibilidade de sua mudança, no entanto, não há como negar que ele é algo em desenvolvimento, que se transforma e aperfeiçoa. Além disso, tomou-se por base principal a concepção de história de Fernand Braudel (2009). Para ele, a história nunca parou de depender de condições sociais concretas, ela é filha de seu tempo e, o papel do historiador é importantíssimo para que métodos e programas da história tenham respostas mais precisas e mais seguras, já que depende das reflexões, do trabalho e das experiências vividas.

Vale ressaltar que como crítico, o trabalho histórico não pode ser realizado unilateralmente. Observou-se, por exemplo, que alguns estudos sobre autores e obras desde o Renascimento sinalizam a inter-relação existente entre a Matemática e a Arquitetura, assim como a influência que a Matemática exerceu e ainda exerce sobre outras áreas do conhecimento. Enfim, o aporte teórico desta pesquisa fundamentou-se em pensadores que compreenderam que produções humanas não são realizadas e nem são construídas isoladamente.

Tanto a pesquisa de doutorado quanto o trabalho aqui proposto, caracterizam-se como pesquisas qualitativas de abordagem histórica e documental. Contam, portanto, com os seguintes instrumentos metodológicos: pesquisa histórica, pesquisa bibliográfica e análise documental (de obras/livros-texto[3]) e análise de conteúdo, através da utilização de categorias. No caso da análise de conteúdo, toma-se por fundamento a proposta de Laurence Bardin (1977), a qual se refere a um método empírico que depende do tipo de "fala" a que se dedica e do tipo de interpretação que se pretende como objetivo.

Para os resultados parciais de pesquisa, analisa-se o problema *medir a altura de um objeto vertical* apresentado na Geometria de Oronce Finé, levando em conta as categorias de análise: enunciado, linguagem, ilustração, abordagem resolutiva, instrumentos e o papel da História da Matemática no ensino e aprendizagem da Matemática.

A principal fonte histórica deste trabalho é uma obra intitulada *Aritmetica, Geometria, Cosmografia, e Oriuoli, Et gli Specchi*[4] de Oronce Finé. A parte *Aritmetica, Geometria, Cosmografia, e Oriuoli* foi traduzida para o italiano por Cosimo Bartoli e a parte *Et gli Specchi* pelo Cavalero Ercole Bottrigaro. Neste artigo, considerando o autor e a obra, especial atenção é dada aos seguintes aspectos: resumo biográfico, a construção do seu principal instrumento de medida: o quadrante geométrico e, a matemática presente em um problema de medir altura.

2. Orontio Fineo[5]

Orontio Fineo (1494-1555)[6] ou, Oronce Finé[7], nasceu em Dauphiné, uma região do sudeste da França. Na época de seu nascimento essa era uma região semi-independente da

---

[3]O livro de Oronce Finé, analisado neste trabalho, foi produzido de alguma forma para o ensino. Foi escrito dedicado a pessoas com títulos nobres e, quanto à matemática utilizada para resolver os problemas apresentados, não era tão valorizada, ficava na maioria das vezes implícita, sobressaindo-se o processo de resolução com enfoque prático. Optou-se por compreender esse livro numa concepção proposta por Shubring (2003). Em seu estudo o autor considera o termo *textbook* ou *livros-texto* para um livro destinado ao uso no ensino, independente do nível.

[4]Traduzida por: *Aritmética, Geometria, Cosmografia, e Relógios, e os Espelhos*. Disponível em: <http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECHOdocuViewfull?mode=imagepath&url=/mpiwg/online/permanent/library/P9R3M8SW/pageimg&viewMode=images>. Acesso em: 15 jun. 2010

[5]Salvo mencionado o contrário, esta primeira seção compreende uma tradução/adaptação do inglês para o português, realizada pela autora deste trabalho, da biografia de Orontio Fineo apresentada pelos matemáticos John O'Connor e Edmund F. Robertson, autores do site intitulado *The MacTutor History of Mathematics archives*. Disponível em: <http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fine.html>. Acesso em: 20 jun. 2010.

[6]Nasceu no dia 20 de dezembro de 1494 e morreu no dia 08 de agosto de 1555, em Paris, França.

[7]Briançon, a cidade de nascimento de Finé, ficava nessa região de Dauphiné. Sendo assim, o nome de Oronce Finé foi escrito em latim como Orontius Finaeus Delphinatus (ou, como aparece em uma das obras analisadas desta pesquisa, aquela publicada na Itália: Orontio Fineo del Delfinato). O último desses nomes, Delphinatus (ou Delfinato), indica então que ele veio de Dauphiné. Na tradução para o francês, além do sobrenome Finé, é provável que duas outras formas existam, quais sejam: Finee ou Fine. No entanto, especialistas sobre a região Dauphiné explicam que Finé é a forma que se esperaria naquela região.

França, assim chamada porque o país era governado pelo filho mais velho do rei da França, a quem foi dado o título de delfim.[8]

Antes de obter seu diploma de medicina, Finé editou livros de matemática e astronomia numa tipografia de Paris. Entre os textos que foram editados, destacam-se: *Theoricae Novae Planetarum* de Peurbach, que trata da teoria dos epiciclos dos planetas de Ptolomeu, e o *Tractatus de Sphaera* de Sacrobosco, um livro de astronomia em quatro capítulos. O primeiro livro de autoria de Finé, foi publicado em 1526, e apresenta o *equatorium*, um instrumento no qual ele estava muito interessado e trabalhou em toda a sua vida, escrevendo mais quatro textos sobre isso. O instrumento podia ser usado para determinar as posições dos planetas. Finé foi nomeado para a cadeira de matemática no Collège Royal em Paris, em 1531, e ensinou lá a partir deste momento até a sua morte.

O trabalho mais importante produzido por Finé, quase exatamente na época em que ele foi nomeado para a cátedra de matemática no Collège Royal, é conhecido como *Protomathesis*. Parece mais com uma coleção de obras independentes, para cada parte tem uma folha de rosto própria com datas geralmente um ou dois anos antes do que todo o trabalho ter aparecido em 1532. Apesar de parecer que os volumes desta obra foram publicados separadamente, é improvável que este tenha sido o caso. A primeira parte trata da aritmética, particularmente com números inteiros, frações comuns e frações sexagesimais. Este último tópico foi importante para as partes posteriores da astronomia do *Protomathesis*. A segunda parte aborda a Geometria em dois volumes. O texto inicia com a definição de Geometria similar a axiomática dos Elementos de Euclides, mas depois ele passa a considerações mais práticas de medição do comprimento, altura, área de superfície, e volumes. Nesta parte Finé usa a aproximação $\frac{22}{7}$ para o cálculo de π. O segundo volume da Geometria cobre tópicos do que se pode classificar hoje como de trigonometria, mas somente em um nível elementar.

Destaca-se que o fato da principal fonte primária de investigação deste trabalho, a *Aritmetica, Geometria, Cosmografia, e Oriuoli, Et gli Specchi*, ser uma edição italiana de 1587, a pesquisa exigiu primeiramente um trabalho de tradução das partes do texto que interessavam, de acordo com os objetivos propostos, o que demandou cuidado minucioso

[8]Neste trabalho utilizar-se-á sempre, a título de padronização em referência a Orontio Fineo, seu nome traduzido para o francês, Oronce Finé ou, simplesmente Finé, com exceção dos casos das citações, que serão mantidos os nomes originais do autor assim como aparecem nas folhas de rostos das obras pesquisadas.

de uma tradutora de italiano principalmente pelo fato de ser uma obra escrita em italiano antigo.

3. Uma síntese do processo de fabricação do quadrante geométrico por Oronce Finé

Oronce Finé tinha predileção por um instrumento de medida, o quadrante geométrico, por isso é importante detalhar a construção desse instrumento e como ele foi utilizado por Finé para resolver problemas de alturas. No entanto, o autor menciona outros instrumentos de medidas que podiam ser utilizados para resolver problemas práticos, como por exemplo, o quadrante num quarto de círculo, o esquadro e o báculo.

Nesta seção apresenta-se resumidamente uma sequência de ações para a construção do quadrante geométrico por Oronce Finé. Levando em conta o objetivo principal deste texto, serão omitidas algumas citações diretas traduzidas da obra autor e, na maior parte das vezes, serão propostos apenas breves comentários da autora deste trabalho de como as ações podem ter sido desenvolvidas pelos indivíduos que necessitavam construir o instrumento, isso a partir das instruções dadas por Finé. Intenta-se também mencionar possíveis caminhos e conhecimentos matemáticos que podem ser mobilizados no processo dessa construção.

A Figura 1 é a ilustração dada por Fineo (1587, p. 239) para o seu quadrante geométrico.

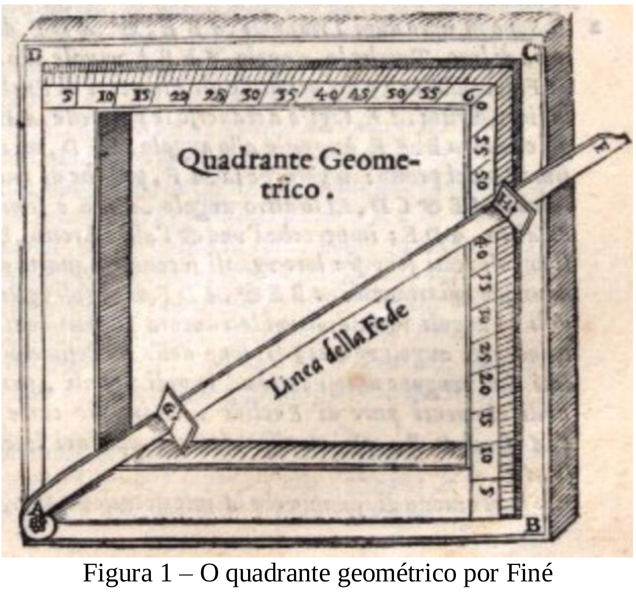

Figura 1 – O quadrante geométrico por Finé
Fonte: Fineo, 1587, p.239

A primeira instrução proposta por Fineo (1587, p. 238, tradução nossa) é:

> Munir-se primeiramente de quatro réguas feitas de alguma madeira duríssima que tenham entre si o mesmo comprimento e a mesma largura. Dispô-las de maneira que formem ângulos retos com suas faces (ou terminações ou cabeças), que devem ter ao menos meio pé de largura e o comprimento seja dois ou três cubiti/côvados[9], ou a medida pode variar de acordo com o fabricante. Ao colocá-las juntas deve-se ter o cuidado de fazê-lo de tal modo que formem um plano e, em esquadro com suas faces e superfícies.

Cabem aqui duas análises. Uma do ponto de vista instrumental a fim de discutir o tipo de material usado para a elaboração do quadrante e outra, do ponto de vista didático, abordando a intencionalidade provável e os conceitos matemáticos implícitos nas instruções para a confecção do instrumento.

No caso da primeira instrução, a seleção do tipo de material é importante quando se leva em conta o uso do instrumento, pois, para os artesãos do século XVI ele tinha um fim prático. Dessa forma, era preciso levar em conta a durabilidade, maleabilidade e resistência do material a ser usado na sua construção. A qualidade *duríssima* indica certamente condição necessária para que o instrumento seja eficiente no momento do manuseio, ou seja, para o instrumento funcionar corretamente.

Mesmo que pudesse ser usado para ensinar Matemática, no contexto social em que estava sendo proposto, o quadrante geométrico não era ferramenta didática voltada especificamente para *educação escolar*. No entanto, há de se destacar os vários conceitos matemáticos subentendidos no processo de construção de um quadrante geométrico. A partir da primeira instrução, fornecida por Finé e citada anteriormente, pode-se elencar: ângulos, perpendicularismo, figuras planas (quadrado), face e superfície. Além disso, o autor sugere uma unidade de medida aproximada para as dimensões das réguas de madeira (tanto para o comprimento quanto para a largura das peças) de modo a tornar simples e adequado o manuseio do instrumento.

Fineo (1587) sugere também que a escolha da face para se fazer o traçado dos segmentos do instrumento seja a mais limpa do quadrado feito de madeira (polida). Os passos agora seguem com o objetivo de fazer as marcações no instrumento. Deve-se então definir o quadrado ABCD e o segmento oblíquo CE (diagonal do quadrado ABCD, sendo o ponto E coincidente com o ponto A), que servirá de base para serem traçados os segmentos paralelos que indicarão as futuras medidas.

---

[9]A tradução de cubiti do italiano para o português é côvados. Segundo o dicionário online Priberam, côvado era uma antiga medida de comprimento equivalente a 0,66m. Disponível em <http://www.priberam.pt/dlpo/definir_resultados.aspx?pal=c%F4vados>. Acesso em 11 nov. 2011.

Em relação aos conceitos matemáticos requisitados para a construção do quadrante, além dos já mencionados, destacam-se outros: paralelismo, segmento de reta, segmento oblíquo (linha obliqua CE) e proporcionalidade entre segmentos.

O autor orienta a necessidade da divisão dos segmentos BC e CD em doze partes iguais, mas não deixa claro como realizar esse passo, nem mesmo que as divisões devem ser feitas no segmento interno (dos três paralelos já evocados antes).

Para fazer as divisões no lado CD, conforme pode-se ver na Figura 1, é necessário recorrer ao *Teorema de Tales*, cujo resultado trata das partes proporcionais estabelecidas por duas retas transversais em um conjunto de retas paralelas. Assim, sabe-se que é possível traçar, utilizando apenas régua não graduada e compasso, segmentos congruentes entre si.

Para prosseguir a construção, após a divisão do segmento CD em doze partes iguais, o autor propõe o alinhamento da régua usando os pontos A e cada um dos obtidos com a divisão do segmento CD em doze partes iguais a fim de obter segmentos de retas transversais às paralelas, que constituirão a organização da segunda escala do instrumento e, devem atingir apenas o primeiro intervalo que foi obtido anteriormente através da construção dos três segmentos paralelos tomando como referência cada um dos segmentos BC e CD.

Observa-se que após fazer todo esse processo em uma das doze divisões do lado CD do quadrado, não será preciso repeti-lo para o lado BC. De fato, bastará transferir com o compasso o tamanho (abertura) do segmento obtido da subdivisão anterior, formando doze novos segmentos contíguos no lado BC. Num processo análogo, Fineo (1587) indica uma nova divisão, obtendo cinco segmentos de mesma medida, em cada um dos doze segmentos construídos no processo anterior, tanto em BC quanto em CD. Por isso conclui que nesta subdivisão encontrar-se-ão sessenta segmentos.

A explicação que segue na obra de Finé procura elucidar a *régua* ou *linha de fé*:

> Fabrica-se finalmente uma régua, a guisa de demonstração, como uma parte da linha do astrolábio[10], puxada igualmente na espessura e na largura, e plana, a qual chamaremos AF, que seja pelo menos tão longa quanto a oblíqua AC, e ainda dos quatro cantos a esquadro da mira da fé, se acomodem duas miras furadas diametralmente e os tais furos sejam muito pequenos sobre essa linha da fé como nos apresentam as letras G e H, na figura da pagina 239. Que essa linha ou régua se acomode de tal forma no centro A que se possa levar para cima e para baixo livremente, e que a linha da fé AF, puxada por meio da mira do ponto

[10]Foi o instrumento matemático astronômico mais conhecido. Segundo Smith (1958), astrolábio é um nome grego e significa a tomada nas estrelas. Por isso, qualquer instrumento para medição de ângulos pelo qual uma estrela foi “tomada” por referência estava-se, estritamente falando, de um astrolábio.

> A, ou qualquer das divisões dos lados acima citados possam da mesma forma conduzir-se com facilidade e para maior compreensão dos fatos supracitados, eis a figura do supracitado quadrante geométrico (Fineo, 1587, p. 239, tradução nossa).

Na sequência, Finé (1587) exibe então a ilustração do seu quadrante geométrico (Figura 1) e, com a citação anterior contendo o esclarecimento sobre a *linha de fé*, finaliza o Capítulo II[11] do seu segundo livro, da Geometria. Percebe-se que a *linha de fé* é essencial ao instrumento porque servirá como uma mira no momento da medição da altura de algum objeto, isso ratifica todo o processo minucioso de construção, de forma mais precisa possível, com a finalidade de obtenção de um instrumento realmente eficiente. Enfim, a construção do quadrante geométrico é necessária no contexto que o autor propõe para a resolução de problemas práticos de medição, pois é um instrumento que possibilita executar inúmeros modos de medição, e é para Finé, como já mencionado, o melhor deles.

4. Como Oronce Finé utilizou o quadrante geométrico para medir alturas?

De acordo com os propósitos deste trabalho e também por sua delimitação, escolheu-se para exemplificar um problema de medir altura que foi tratado na parte da Geometria da obra *Prothomatesis*. Cada um dos 33 capítulos do segundo livro da sua Geometria representa um problema prático de medição, tanto de altura, quanto distância ou de profundidade.

O sétimo capítulo do segundo livro intitula-se *Como se medem, com o quadrante geométrico, as linhas retas que estejam sobre o plano do terreno formando ângulos com o quadrante*. Esse capítulo trata então de resolver um problema de altura utilizando-se o quadrante geométrico. A Figura 2 exibe uma ilustração que o autor utiliza para ajudar na compreensão do problema. A frase do título do problema, *formando ângulos com o quadrante*, indica que Finé propõe o cálculo de mais de uma altura, no caso, três alturas, considerando os ângulos que o quadrante faz com a torre. No caso, pela ilustração, vê-se que são indicadas três situações diferentes.

[11] Intitulado "Como se faz o quadrante geométrico comodíssimo para medidas das linhas retas".

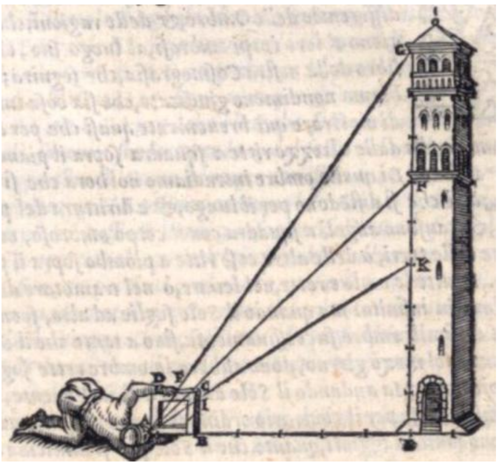

Figura 2 – Ilustração de como usar o quadrante geométrico para medir alturas de objetos verticais
Fonte: Fineo, 1587, p. 253.

Observa-se que, para resolver o problema, o medidor deve estar com o quadrante geométrico mirando à uma certa distância e se posicionar em direção à base da torre, além disso, são feitas três marcações distintas utilizando a *linha de fé*. Para compreender melhor, apresentar-se-ão os passos propostos por Finé e em seguida serão feitas explicações complementares ao texto original. Em primeiro lugar, Fineo (1587, p. 251, tradução nossa) propõe: "tomada a título de demonstração uma linha reta, cujo comprimento deva ser medido, que seja EG ou EH ou ainda EK para o comprimento e na direção da torre EKHG que esteja sobre um plano proposto AE na perpendicular, ou em prumo".

Segue instruindo:

> Acomoda-se então sobre o mesmo plano que lhe está em torno, o quadrante ABCD, de forma que os lados BC e CD, compartilhadas em partes, se voltem diretamente para essa linha proposta, pois que isto parece ser sempre necessário. Posto então o olho no ponto A, levanta-se ou abaixa-se esta linha contanto que o raio de visão de A, passando pelas miras, chegue ao final da linha proposta. Feito isso, observa-se a interseção dessa linha, isto é se ela baterá no lado BC ou no lado CD, visto que ela não poderá chegar a outro lugar.
>
> Diga-se, então que ela bata primeiramente no lado CD, isto é, no ponto F, e seja a linha a ser medida EG, então essa linha EG será maior do que o comprimento do plano AE e corresponderá na mesma proporção a AE, que o lado AD à parte intersectada DF. Como que se DF será 40 das partes das quais cada lado é igual a 60, porque o 60 corresponde ao 40 de *sesquialtera* isto é, 40 mais sua metade, não diferentemente, a linha EG abraçará uma vez e meia a linha AE. Logo se o comprimento AE, for, por exemplo, igual a 18 cúbitos, a linha EG considerada será de 27 cúbitos. E isto se demonstra desse modo, porque os dois triângulos ADF e AEG são de ângulos iguais, por isso que o ângulo DAF é igual ao ângulo AGE, pelo 29 do primeiro livro dos Elementos de Euclides. E da mesma forma, o ângulo AFD é também igual ao ângulo EAG, visto que tanto o ângulo ADF como o ângulo AEG são retos e iguais entre si. São então de ângulos iguais os triângulos ADF e AEG, cujos lados então que estão de frente aos ângulos iguais estarão mediante a 4 enquanto que o de 6 os mesmos elementos entre eles proporcionais. Logo, como o lado AD corresponde à parte intersectada DF assim será a proposta linha EG ao comprimento do plano AE. (Fineo, 1587, p. 251-252, tradução nossa).

Os passos acima são bem detalhados por Finé, e, mais ainda, estão muito bem justificados matematicamente levando em conta a possibilidade de medir a altura EG utilizando-se da semelhança entre os triângulos ADF e AGE. Pretende-se a seguir explicar alguns pontos que poderão gerar algum tipo de dúvida para o leitor em relação à leitura das instruções contidas na citação anterior.

Primeiro, fica claro observar que a medida AE (do vértice do quadrante geométrico, do qual parte a *linha de fé*, até a base da torre) é acessível. Neste caso considerado acima, o objetivo é obter a medida da altura EG, da base ao cume da torre.

Outro item interessante é quando se utiliza a mira do quadrante geométrico, isto é, a *linha de fé*, então, o autor, supondo que ela seja mirada no topo da torre e intersecta o lado CD do quadrante no ponto F, afirma que tal segmento EG será maior do que o segmento AE. De fato, isso só pode ocorrer por ser assumida a seguinte propriedade geométrica de desigualdades nos triângulos: "Se dois ângulos de um triângulo não são congruentes, então os lados opostos a eles não são congruentes e o maior deles está oposto ao maior lado" (Dolce e Pompeu, 2005, p. 55). Como, por hipótese, a mira com a "linha de fé" intersecta o lado CD até atingir o topo da torre, o ângulo $E\hat{A}G$ é maior do que 45°. Considerando que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180°, que o triângulo AGE é retângulo em $A\hat{E}G$ = 90°, tem-se que a soma dos outros dois ângulos $E\hat{A}G + A\hat{G}E$ = 90° e, como o ângulo $E\hat{A}G$ é maior do que 45°, o ângulo $A\hat{G}E$ será menor do que 45°. Sendo assim, $E\hat{A}G > A\hat{G}E$, e, portanto, como afirma Finé, EG > AE, ou seja, o segmento EG será maior do que o segmento AE.

Esse exemplo tratado por Finé para resolver um tipo de problema de medição de altura permite que se faça uma inter-relação entre História da Educação Matemática e História da Matemática. De fato, como já mencionado, esse tipo de problema faz parte da História da Educação Matemática, já que foi tratado em livros de caráter didático ao longo do tempo, mesmo que com objetivos de abordagens distintos. Por outro lado, a História da Matemática se faz presente considerando que conceitos e propriedades matemáticas eram exigidos tanto no processo de construção de um instrumento de medida (como é o caso do quadrante geométrico), quanto nos passos para a resolução do problema, de modo que atualmente, as ferramentas matemáticas evoluíram sendo distintas no processo de resolução do mesmo tipo de problema.

5. Resultados Parciais da Pesquisa: revisitando Oronce Finé e uma análise das categorias

O trabalho de Oronce Finé teve grande repercussão na época de publicação, tanto que sua obra mais importante, a *Protomathesis*, foi publicada em latim em 1532, na mesma época em que ele assumiu cadeira de lente na Faculdade Real de Paris, além de ter sido traduzida e publicada em 1587 por Cosimo Bartoli, 55 anos após a primeira aparição, a qual é a obra italiana em que se faz a análise principal nesta pesquisa. Sem contar que o próprio Bartoli publicou uma obra em 1564, em que o seu primeiro livro segue a mesma sequência proposta por Oronce Finé. Há também uma edição francesa que foi traduzida e publicada por Oronce Finé em 1556. Ela trata da sua Geometria prática, uma parte da *Protomathesis*.

É notável mencionar que tomando por referência a Geometria de Oronce Finé, em especial, seu texto que trata da construção dos instrumentos, percebe-se a articulação que existe entre a construção e o uso dos instrumentos. De fato, o texto não pode ser classificado como um manual do tipo *faça você mesmo* e pode-se observar que ele estava destinado a um público detentor de conhecimentos não apenas da Geometria implícita à construção do instrumento, mas também da prática do ofício. As ações para a construção do quadrante geométrico são apresentadas em forma de instrução, exigindo do leitor que ele cumpra as tarefas, porém, é preciso que se saiba executá-las.

Apresenta-se uma análise sobre o problema de encontrar a altura de um objeto, especificamente na obra de Fineo (1587), segundo algumas categorias:

- Quanto ao enunciado: fornece apenas um título geral para o problema. Exemplo: “Como se medem, com o quadrante geométrico, as linhas retas que estejam sobre o plano do terreno formando ângulos com o quadrante” (p. 251).
- Quanto à linguagem do problema: utiliza uma linguagem natural, como se fosse um diálogo, é retórica. O uso do simbolismo matemático fica a cargo da nomenclatura utilizada para referência de um segmento de reta, como por exemplo, “[...] seja a linha a ser medida EG, então essa linha EG será maior do que o comprimento do plano AE [...]” (p. 251), e também para o caso de indicação de um ângulo. De fato, Fineo (1587, p. 251) afirma que “[...] e da mesma forma, o ângulo AFD é também igual ao ângulo EAG, visto que tanto o ângulo ADF como o ângulo AEG são retos e iguais entre si [...]”.

- Quanto às ilustrações: para cada problema apresenta uma ilustração que simula a realidade. Cada ilustração é rica em detalhes, demonstrando não apenas um esquema explicativo, mas, a imagem da situação que o problema/capítulo apresenta incluindo o objeto a ser medido, o instrumento e uma paisagem.
- Quanto à abordagem resolutiva: a maior preocupação do autor é realmente de *transmitir* as instruções passo a passo para quem deseja resolver um problema como o do tipo apresentado anteriormente. A fundamentação matemática existe, mas, está implícita. Além disso, a apresentação de um exemplo numérico corrobora com a ideia de esclarecer cada um dos passos de resolução do problema. Como ferramentas matemáticas, Finé utiliza-se da semelhança de triângulos e também de uma propriedade geométrica de desigualdade triangular, no entanto, sem dar justificativas, como já mencionado.
- Quanto aos instrumentos: propõe o uso do quadrante geométrico, o instrumento preferido de Finé, dedicando um capítulo especial para tratar da construção do mesmo, apesar de considerar ainda em sua obra outros instrumentos de medida como o quadrante num quarto de círculo, o esquadro e o báculo.
- Quanto ao papel da História da Matemática no ensino e aprendizagem da Matemática: a construção deste trabalho tem inspirações nas teorias sobre abordagem histórica tanto da matemática quanto da educação matemática. Pode-se compreender a história da matemática como um estudo das produções passadas desta ciência, ou, vista a partir de uma proposta educacional de ensino ou pesquisa, determinante em vários processos, como o de promover uma historiografia que, com ferramentas do presente, forneça uma percepção do passado como orientação para o futuro. Este trabalho coaduna com essa perspectiva, repousando sobre estudos comparativos da produção científica de um determinado período. D'Ambrosio (1999, p. 97) ratifica a relevância da história imersa na educação quando afirma que

> as práticas educativas se fundam na cultura, em estilos de aprendizagem e nas tradições, e a história compreende o registro desses fundamentos. Portanto, é praticamente impossível discutir educação sem recorrer a esses registros e a interpretações dos mesmos. Isso é igualmente verdade ao se fazer o ensino das várias disciplinas. Em especial da Matemática, cujas raízes se confundem com a história da humanidade.

Percebe-se aí a forte ligação entre a prática educativa de matemática e a história da matemática. Além disso, pesquisas em educação matemática vem apontando a história da matemática como uma contribuição importante para a prática pedagógica do professor. Não se referindo à simples utilização da história da matemática como motivação ao desenvolvimento do conteúdo, mas, englobando "elementos cujas naturezas estão voltadas a uma interligação entre o conteúdo e sua atividade educacional" (BARONI; NOBRE, 1999, p. 132).

Entende-se assim que não há como desvincular um tipo de pesquisa histórica como o desta pesquisa, que envolve história de problemas matemáticos, da Educação Matemática.

Levando em conta as intenções deste trabalho, de elaborar uma trajetória histórica de problemas de medição de alturas, coaduna-se também com a ideia de que para que os conhecimentos matemáticos sejam amplamente abordados faz-se necessária a busca pela história de tais conhecimentos e/ou conceitos, sendo que a compreensão deles implica também, como menciona Certeau (2010), na compreensão da relação entre o lugar de produção social, a prática e a escrita. Dessa forma, na produção deste trabalho de cunho histórico, na área de matemática, procura-se construir uma sequência de releituras do passado, que contemple lacunas e seja útil para a Educação Matemática ou algo semelhante.

6. Referências

1. BARONI, Rosa L. S.; NOBRE, Sergio. A pesquisa em história da matemática e suas relações com a educação matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em educação matemática: concepções & perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

2. BARDIN, Laurence. **Análise de Conteúdo**. Lisboa/Portugal: Edições 70, 1977.

3. BLOCH, Marc Leopold Benjamin. **Apologia da história, ou, O ofício do historiador.** Rio de Janeiro: Jorge Zahar Editora, 2001.

4. BRAUDEL, Fernand. **Escritos sobre a história**. Tradução de J. Guinburg e Tereza Cristina Silveira da Mota. São Paulo: Perspectiva, 2009.

5. CERTEAU, Michel de. **A Escrita da História**. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2010.

6. D'AMBRÓSIO, Ubiratan. A História da Matemática: questões historiográficas e

políticas e reflexos na Educação Matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida Viggiani (Org.). **Pesquisa em educação matemática: concepções & perspectivas**. São Paulo: Editora UNESP, 1999.

7. DANTE, Luiz Roberto. **Matemática: contexto e aplicações**. São Paulo: Ática, 2010. (Ensino Médio, v. 2).

8. DOLCE, Osvaldo; POMPEO, José Nicolau. **Geometria Plana**. 8. ed. São Paulo: Atual, 2005. (Fundamentos de Matemática Elementar, v. 9).

9. FINEO, Orontio. **Aritmetica, Geometria, Cosmografia, e Orivoli, EtgliSpecchi.** Venetiá: Presso Francesco Franceschi Senese, 1587. Disponível em: http://echo.mpiwg-berlin.mpg.de/ECHOdocuViewfull?mode=imagepath&url=/mpiwg/online/permanent/library/P9R3M8SW/pageimg&viewMode=images. Acesso em: 15 jun. 2010.

10. MORI, Iracema; ONAGA, Dulce Satiko. **Matemática: ideias e desafios**. 9° ano. Manual do Professor. 15 ed. reform. São Paulo: Saraiva, 2009.

11. O'CONNOR, John; ROBERTSON, Edmund F**. *The MacTutor History of Mathematics archives:*** Indexes of Biographies: Oronce Fine, 2005. Disponível em: http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Biographies/Fine.html. Acesso em: 20 jun. 2010.

12. PAIVA, Manoel. **Matemática Paiva**. 1. ed. São Paulo: Moderna: 2009. (Ensino Médio, v. 1).

13. SMITH, David Eugene. **History of mathematics**. New York: Dover Publications, Inc., 1958. (Special topics of elementary mathematics, v. II).

14. SOUZA, Joamir Roberto de. **Novo olhar: matemática**1. ed. São Paulo: FTD, 2010. (Coleção Novo Olhar, v. 1).