ASPECTOS EPISTEMOLÓGICOS DA MODELAGEM MATEMÁTICA

Leônia Gabardo Negrelli
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
leoniagn@yahoo.com.br

José Carlos Cifuentes
Universidade Federal do Paraná
jccifa@gmail.com

Resumo:
Neste artigo expomos resultados uma pesquisa na qual abordamos aspectos filosófico-epistemológicos e matemáticos subjacentes a uma interpretação do processo de modelagem matemática na educação matemática. Para o desenvolvimento da pesquisa destacamos o componente realidade em descrições do processo de modelagem matemática presentes na literatura e fizemos uma análise epistemológica desse componente, que resultou numa releitura do referido processo. Propomos uma fundamentação filosófico-epistemológica dessa releitura valendo-nos de concepções filosóficas da ciência como realismo, estruturalismo e empirismo, o que nos conduziu a uma visão da matemática na qual a concepção de matemática é relativisada. Por meio desse estudo obtivemos uma melhor compreensão do processo de modelagem matemática, da matemática envolvida nesse processo, bem como do papel da modelagem no ensino e na aprendizagem de matemática, compreensão essa indispensável em cursos de formação de professores.

Palavras-chave: Educação Matemática; Modelagem Matemática; Epistemologia; Realidade.

1. Introdução

Um objetivo específico da educação matemática, que não pode ser delegado a nenhuma outra área, é promover a formação matemática do indivíduo. Nessa formação consideramos importante e necessário superar a ideia de que a matemática é algo sempre dado (por um currículo, um programa de disciplina, um livro didático). Propomos uma discussão sobre a natureza da matemática, sobre seus métodos e conceitos, sobre a possibilidade de concepções alternativas dela, de modo especial, daquela matemática presente no processo de modelagem matemática.

A modelagem matemática como objeto de estudo no contexto da educação matemática recebe contornos diversos conforme o nível de ensino no qual ela é situada. No Ensino Fundamental, no Ensino Médio, na formação inicial de professores e na formação continuada destes pode haver uma forma distinta, mais adequada, para abordar a modelagem matemática, seja como estratégia de ensino e aprendizagem ou como conteúdo de ensino, sendo esta última possibilidade algo necessário em cursos de Licenciatura em

Matemática. Portanto, é legítimo falarmos em concepções de matemática, pressupostos filosóficos e análises epistemológicas apoiadas nas diversas formas de se fazer modelagem matemática nos referidos níveis de ensino.

A alfabetização matemática do cidadão, o estudo da realidade na qual esse cidadão está inserido e a construção de uma atitude crítica e reflexiva dele para que se utilize da matemática como ferramenta com força política são colocadas como razões para o desenvolvimento de atividades de modelagem na escola. No entanto, perguntamo-nos se somente motivações *externas* ao processo de modelagem matemática justificariam sua abordagem no âmbito da educação matemática. Não haveria motivos ligados à natureza desse processo para que a modelagem matemática seja abordada visando o ensino e a aprendizagem de matemática? Pressupomos e mostraremos que sim.

De fato, a resolução de problemas *reais*, a conscientização política, a formação do cidadão para que consiga entender e agir sobre a realidade, além da prática de um ensino mais dinâmico e significativo para o aluno são razões legítimas para que se desenvolvam pesquisas visando justificar e incentivar o emprego da modelagem matemática na escola. No entanto, em cursos de licenciatura, quando se pretende justificar o emprego da modelagem matemática no ensino-aprendizagem de matemática na Educação Básica, é imprescindível tomar também como objetos de estudo conceitos e métodos que compõem esse processo, além de possíveis filosofias para abordá-los e fundamentá-los. A partir desses pressupostos desenvolvemos uma pesquisa, que resultou numa tese de doutorado (NEGRELLI, 2008), com base na qual foi escrito este artigo. Nessa pesquisa abordamos aspectos filosófico-epistemológicos e matemáticos subjacentes a uma interpretação do processo de modelagem matemática na educação matemática.

2. Sobre o Processo de Modelagem Matemática na Educação Matemática

Muitas pesquisas sobre modelagem matemática na educação matemática estão voltadas para questões ligadas à sala de aula. São frequentes os estudos de campo que envolvem planejamento, execução e/ou análise de atividades de modelagem que tomam como referência uma descrição da modelagem composta por etapas e que, dependendo do objetivo almejado, recebe encaminhamentos variados. O foco dessas pesquisas ora está na ação do professor, ora na ação do aluno, na interação entre alunos, na interação entre aluno e professor, na conveniência ou não do uso de certos recursos tecnológicos, etc. São várias as pesquisas de modelagem e aplicações centradas na prática, ou seja, em questões didático-pedagógicas, de caráter *externo* ao processo de modelagem matemática, no sentido de que não tratam de sua constituição, de sua fundamentação, mas de seu uso e suas relações com outros componentes do ambiente escolar.

Menos frequentes são os estudos sobre conceitos envolvidos no processo de modelagem, sobre a natureza de seus elementos e procedimentos, os quais estariam relacionados a um caráter *interno* do processo de modelagem. Conforme MUELLER (2003), um documento de discussão internacional sobre aplicações e modelagem, está revelada uma demanda por pesquisas que visem obter uma estrutura conceitual para a modelagem, na qual termos comumente utilizados como, por exemplo, *problema* e *realidade*, tenham a devida fundamentação. Isso nos motivou a realizar o estudo com o tipo de abordagem que propusemos. Buscando referências a esse respeito na literatura encontramos alguns pontos de apoio. Um deles, já colocado por Blum e Niss e destacado por Bassanezi (2002), situa, dentre os argumentos para a inclusão de aspectos referentes à modelagem no ensino-aprendizagem de matemática, um argumento denominado *intrínseco*, segundo o qual se considera que "a inclusão de modelagem, resolução de problemas e aplicações fornecem ao estudante um rico arsenal para entender e interpretar a própria matemática em todas suas facetas" (BASSANEZI, 2002, p.37).

Bassanezi (2002), apoiado em sua grande experiência com modelagem matemática, coloca-nos esta como uma "arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real." (p.16). Essa caracterização de modelagem matemática, apesar de sintética, encerra um grande potencial de contribuição para a nossa discussão. Primeiramente por se referir à modelagem como uma arte, o que envolve a consideração de elementos como imaginação, criatividade, intuição, sensibilidade, habilidades técnicas. De acordo com Bassanezi (2002, p.85), "a formulação de um modelo matemático é geralmente a parte mais difícil de todo processo de modelagem. Mais difícil por ser uma atividade essencialmente criativa e que depende de conhecimentos adquiridos previamente".

Outras descrições do processo de modelagem matemática, em sua maioria inspiradas na visão tradicional sugerida pela Matemática Aplicada, serviram-nos de base para percebermos o destaque que merece ser dado ao componente *realidade* no referido processo. Encontramos na literatura acerca da modelagem na educação matemática descrições desse processo em etapas sendo estas caracterizadas por elementos que incluem técnicas e procedimentos que encerram em si conceitos, a nosso ver, fundamentais para o aprendizado de matemática e, mais especificamente, para o aprender a pensar matematicamente. Alguns desses conceitos são o de realidade, representação, linguagem, problema, modelo, formalização, validação.

Uma sequencia dessas etapas do processo de modelar uma situação ou problema real é exposta em (BASSANEZI, 2002). Nela a primeira etapa é a *experimentação* na qual dados referentes a uma situação de interesse são coletados para posteriormente receberem um tratamento matemático. Notemos que, nesse primeiro momento, a observação e a experiência, desempenham um papel fundamental e vão direcionar as etapas posteriores.

A segunda etapa é a *abstração* e seu objetivo é obter modelos matemáticos para a situação ou problema explorados na etapa anterior. Para isso o reconhecimento de variáveis e possíveis relações entre elas, o levantamento de hipóteses e o emprego adequado de algum tipo de linguagem é que permitirão a elaboração, primeiro de um recorte daquela situação focada inicialmente e depois a elaboração sobre esse recorte de modelos matemáticos propriamente ditos. Notemos que nesta etapa há construção de um recorte, promovido por meio da elaboração de hipóteses que realizam simplificação na situação inicial. Sobre esse recorte é que será elaborado o modelo matemático, o que sugere que ele, esse recorte, também possui um *status* de realidade, o que inferiremos em nossa discussão posterior.

A terceira etapa da descrição do processo de modelar exposta em Bassanezi, (2002) é a *resolução,* que envolve a manipulação do modelo matemático e, uma vez que representa um problema levantado, demanda a busca por alguma solução. Na quarta etapa, denominada *validação* os modelos são testados de modo a verificar se os mesmos dão conta dos fenômenos observados na primeira etapa, se as hipóteses empregadas para a produção de um recorte da situação focada inicialmente se revelaram adequadas, não produzindo simplificações excessivas, por exemplo. A quinta e última etapa é a *modificação* na qual é feito um retorno à situação inicial de modo a confrontá-la com os resultados obtidos por meio da exploração do modelo matemático. Aqui poderão ser avaliadas e modificadas, se necessário, as hipóteses que geraram a representação sobre a qual o modelo foi construído. Vemos que só nesta etapa se consolida a elaboração do modelo procurado.

Relacionamos com essa descrição do processo de modelar proposta por Bassanezi a colocação de Bean que aponta para a ideia de produção de um recorte, elaborado a partir de hipóteses e aproximações simplificadoras. Destacamos que a produção desse recorte é atividade essencial no processo de modelagem, servindo inclusive para diferenciá-lo de outros processos como a resolução de problemas. Segundo Bean (2001, p.53),

> os aspectos que distinguem a modelagem matemática de outras aplicações de matemática são as exigências das hipóteses e das aproximações simplificadoras como requisitos na criação de modelos. As demais etapas - o problema, a resolução e a verificação da matemática, a validação da solução e a decisão – valem para qualquer tipo de solução de problema envolvendo matemática.

Concordamos com Bean no que diz respeito às exigências postas por ele. Em outro momento esse autor apresenta uma caracterização da modelagem matemática e de cinco seus componentes, apontando alguns dos tipos de pensamento que cada um exige. Para ele, "as descrições de modelagem enfatizam aspectos como a motivação e a utilidade da matemática para analisar e descrever situações e problemas da vida sócio-cultural do aluno." (BEAN, 2003, p.1).

O primeiro componente da caracterização da modelagem matemática apresentada por Bean (2003) é a *problematização*, por meio da qual o modelador reconhece um problema, apropria-se dele formulando uma questão diretriz e objetivos para investigá-lo. A *investigação* será, então, o segundo componente. Ao realizá-la o modelador seleciona características do fenômeno que lhe interessam e se mostram pertinentes na construção do modelo matemático. O que o modelador faz de fato é formular hipóteses e aproximações simplificadoras que delimitam e operacionalizam a investigação. Feito isso se procede com a *formulação do modelo*, no que consiste o terceiro componente dessa descrição do processo de modelagem. Estabelecidos os parâmetros, as características e as relações entre as características do fenômeno, esses são relacionados aos conceitos, propriedades e técnicas matemáticas, o que resultará na elaboração de um modelo. O quarto componente é a *verificação* que envolve critérios objetivos, relativos à validação dos procedimentos matemáticos empregados, e critérios subjetivos, que atuam na decisão sobre a adequação ou não do modelo ao problema considerado. O quinto e último componente dessa descrição é o *fechamento* que ocorre por meio de uma ação, em resposta ao problema investigado. Bean salienta que esses componentes são "interdependentes e interpenetram-se. No pensamento do modelador, um componente sempre pede um outro, de acordo com a dinâmica da construção do modelo". (BEAN, 2003, p. 10).

Anastácio (1990) também chegou a uma configuração de modelagem após um estudo por meio do qual buscou saber o que é modelagem matemática. Segundo essa autora, a modelagem se configura como

> um processo através do qual, a partir de problemas e de aspectos da realidade vivida pelos participantes do processo de ensino e aprendizagem da matemática, chega-se à construção de um modelo matemático. A aplicação de técnicas e teorias matemáticas leva a soluções que podem, ou não, ter correlatos na realidade vivida. A questão de se trabalhar a realidade vivida parece, então como um aspecto fundamental que é necessário enfocar. [...] A realidade é o mundo, entendido como horizonte de relações no qual o ser humano vive e se situa. (ANASTÁCIO, 1990, p.94)

Para Biembengut e Hein (2003) a modelagem é um meio de interação entre matemática e realidade que permite "representar uma situação 'real' com 'ferramental' matemático (modelo matemático) [e] envolve uma série de procedimentos". (p. 13). Entre as etapas que permitem descrever esses procedimentos estão a *interação,* na qual é feito o delineamento de uma situação que se pretende estudar, e a *matematização*, onde a partir da classificação de informações, da seleção de variáveis e símbolos apropriados para descreverem relações entre elas em termos matemáticos, é formulado um problema referente àquela situação focada inicialmente. A etapa seguinte é a *elaboração de um modelo matemático* para a situação-problema representada.

Ubiratan D'Ambrosio, um dos precursores no debate acerca da modelagem na educação matemática brasileira, coloca-nos, em D'Ambrosio (1986), que o processo de modelagem serve de base para estratégias que visem à capacitação do indivíduo para analisar globalmente a realidade na qual ele ocupa uma posição e age. Por meio da modelagem definem-se estratégias de ação sobre essa realidade. Vemos também nessa descrição do processo de modelagem a realidade como elemento fundamental. O que D'Ambrosio sugere então como início do processo de modelagem é a elaboração de uma representação (em termos de linguagem matemática), de um recorte da realidade considerada inicialmente. Para a produção desse recorte utilizamos hipóteses e aproximações simplificadoras, adotamos fundamentos teóricos, agimos segundo nossas concepções, segundo as teorias que sustentam nossa visão de mundo, ou seja, construímos um "exemplo que representa o papel de realidade" (BACHELARD, 2000, p. 12). Isso nos sugere, seguindo Bachelard, que é possível visualizar no componente realidade no processo de modelagem algo construído e sobre o que se formulará um problema que será abordado e resolvido matematicamente.

As descrições do processo de modelagem matemática que apresentamos trazem componentes básicos que podemos encontrar em várias outras descrições elaboradas e/ou adaptadas desse processo. Essas descrições também trazem momentos que podemos citar como característicos do processo de modelagem. A *construção* de uma realidade a ser modelada é um desses momentos.

3. O Componente *Realidade* no Processo de Modelagem Matemática

Vimos que uma atitude característica de descrições do processo de modelagem matemática na Educação Matemática é tomar a realidade como ponto de partida. Mas em que consiste essa realidade? Ou ainda, de que realidade trata a modelagem matemática? Em um primeiro momento, podemos entender que ela trata da realidade composta por elementos de natureza econômica, física, social, política, psicológica, etc., cuja existência podemos supor, de um ponto de vista realista[1]. À modelagem matemática interessa transpor um problema dessa realidade para a matemática com a finalidade de compreendê-la através da resolução desse problema, como já colocou Bassanezi (2002).

Porém, onde reside o *problema* que será transposto para a matemática? Na realidade? Acreditamos que não. Há um momento intermediário entre a realidade e o modelo, no processo de modelagem matemática, que consiste numa problematização que implica em outra realidade que denominaremos *realidade intermediária*, que ainda não é o modelo. É um recorte de uma situação daquela realidade inicial, propiciado pela elaboração de hipóteses e aproximações simplificadoras, a partir do qual se formulará o problema. Para que a problematização ocorra são necessárias abstrações, situando o problema em um outro plano que já não é o da realidade da qual se tratou inicialmente. A problematização pressupõe uma seleção de elementos daquela realidade inicial, composta por elementos existentes fora da mente do indivíduo, numa visão platonista, e que são passíveis de serem captados por ele de alguma forma, com o auxílio dos sentidos.

Essa percepção da realidade, seguindo Poincaré (1946), vem acompanhada de certos parâmetros de seleção como homogeneidade, simplicidade, regularidade, dentre outros, que, no fundo, têm um caráter de estrutura matemática, que será parte da ontologia dessa realidade intermediária. Uma escolha de elementos seria o passo inicial na elaboração da realidade intermediária, o que implica numa simplificação da realidade enfocada inicialmente, destacando elementos essenciais e descartando os periféricos, para que se possa, posteriormente, compor uma representação da mesma utilizando diversas linguagens, desde a natural, a natural enriquecida com elementos gráficos, até a

[1] Realismo, para nós, é o que, na sua versão mais simples, Kant chama de realismo empírico: o reconhecimento da existência das coisas independentemente do conhecimento que temos delas.

matemática. Há aqui um caráter aproximativo devido a limitações impostas pela linguagem. A linguagem natural, a linguagem natural enriquecida com figuras e esquemas, a linguagem algébrica, trazem diferentes níveis de complexidade que permitirão aproximações em maior ou menor grau com a realidade inicial.

> Na verdade, a linguagem convencionada permite uma simulação da realidade, contendo implicitamente uma simplificação da realidade. [...] Por outro lado, a formulação simplificada do contexto real global permite formular detalhes que seriam difíceis, quase impossíveis de serem destacados numa linguagem natural. O jogo de dois aspectos aparentemente contraditórios na reformulação do problema [...] está na essência do método científico e [...] deve ser um dos principais componentes do processo educacional. (D'AMBROSIO, 1986, p.65).

No processo de modelagem matemática temos então uma realidade inicial (dada), uma realidade intermediária (construída, e que será modelada) e o modelo. A realidade intermediária tem mais *status* de realidade do que de modelo. Para os nossos propósitos é conveniente ressaltar que esse processo de simplificação pode implicar na explicitação de estruturas dadas pelas relações envolvidas nos fenômenos em estudo. Essa visão estruturalista nos conduzirá ao estabelecimento de uma ontologia da realidade intermediária. Partindo de uma realidade inicial, considerada como dada, chegamos a uma realidade intermediária, que é construída, e sobre a qual se elaborará um modelo.

Notemos que, em função dessa referência filosófico-epistemológica, a modelagem matemática pode ser vista como uma atividade criadora: construir as situações limites adequadas por meio das hipóteses e aproximações simplificadoras. Podemos então dizer que a realidade intermediária está constituída de estruturas. Seguindo o processo de simplificação, a partir da representação daquilo que se elaborou por meio das hipóteses simplificadoras, uma nova representação será procurada ao se *substituir* a linguagem natural por uma linguagem matemática mais adequada rumo à elaboração do que chamaremos de modelo.

> A obtenção do modelo matemático pressupõe, por assim dizer, a existência de um dicionário que interpreta, sem ambigüidades, os símbolos e as operações de uma teoria matemática em termos da linguagem utilizada na descrição do problema estudado, e vice-versa. Com isto, transpõe-se o problema de alguma realidade para a Matemática onde será tratado através de teorias e técnicas próprias desta Ciência; pela mesma via de interpretação, no sentido contrário, obtém-se o resultado dos estudos na linguagem original do problema. (BASSANEZI, 2002, p.25).

A questão de se substituir a linguagem natural por uma linguagem matemática, o que poderíamos denominar transições de linguagem na modelagem matemática, não é algo trivial e neste momento não aprofundaremos nisso. Notemos que o que será modelado matematicamente não é aquela realidade inicial, mas uma representação da mesma, construída, não dada. Essa representação constitui uma nova realidade, a realidade intermediária, como já introduzida, sobre a qual informações serão explicitadas, problemas serão formulados e resolvidos. A resolução de um problema nessa realidade intermediária pode não ter um correspondente naquela realidade inicial, afinal, "os problemas como são tratados normalmente, são proposições sobre representações e não sobre o fato real", conforme já nos colocou D'Ambrosio (1999).

Os modelos podem ser considerados teorias sobre a realidade intermediária em estudo e eles usualmente se apresentam através de conjuntos de equações que descrevem essa realidade e, enquanto teorias, reforçamos que eles requerem de uma linguagem adequada para sua formulação. Uma vez elaborado um modelo matemático, nele são exploradas relações matemáticas conhecidas de situações anteriormente vivenciadas, são desveladas relações ainda encobertas e outras, que se mostrarem pertinentes, podem ser estabelecidas. Obtêm-se assim elementos de uma teoria matemática que pode auxiliar no estudo daquela realidade inicial. Elementos dessa teoria podem ter sido motivados por essa realidade. Outros, porém podem ter sua origem em conjecturas resultantes da manipulação da linguagem utilizada na elaboração das próprias hipóteses simplificadoras, por exemplo. Essas conjecturas podem ser verdadeiras no âmbito da realidade intermediária na qual elas foram criadas, e não o serem na realidade inicial na qual elas serão interpretadas, o que nos traz à tona a questão da relação entre modelo e verdade, entre verdade e realidade.

Isso significa que a manipulação do modelo, que é uma das atividades que compõem a modelagem matemática, e de especial interesse para o ensino, pode ser desvinculada, em parte, da realidade tomada inicialmente como objeto de estudo. Embora seja enfatizado que a modelagem é um processo que "culmina com a solução efetiva do problema real e não com a simples resolução formal de um problema artificial" (D'AMBROSIO, 1986, p. 11), ela também precisa valorizar o tratamento de questões puramente matemáticas, que podem não ter relação com a realidade inicial.

O acesso ao conhecimento matemático é uma das funções da modelagem matemática na educação matemática, que não pode apenas se preocupar em ajudar a resolver problemas reais, como já colocamos. Por meio da modelagem matemática pode-se aprender matemática, aprender a pensar matematicamente, a identificar bases filosóficas e epistemológicas de determinadas abordagens, além de conhecer a fecundidade e as limitações de conceitos e métodos matemáticos.

A partir da identificação e da caracterização do componente realidade no processo de modelagem que o apresentou como passível de ser decomposto em dois, a realidade inicial e a realidade intermediária, propomos a seguir uma releitura do processo de modelagem na qual destacamos as três primeiras etapas: a consideração de uma realidade inicial, a construção de uma realidade intermediária e a elaboração de modelos para situações-problema identificadas nesta última.

Naturalmente essas três etapas não dão conta de todo o processo de modelagem matemática que envolve também a solução de problemas, a validação do modelo, ou seja, o confronto dessa solução com a realidade na qual o problema foi levantado, o aperfeiçoamento do modelo conforme ele se mostre limitado ou surjam outras possibilidades de abordagem do mesmo. Enfim, se tomarmos como referência a descrição do processo de modelar apresentada por Bassanezi (2002), vemos que existem outras etapas que não foram objeto deste estudo.

4. Releitura e Fundamentos Filosóficos do Processo de Modelagem Matemática

Vimos que no processo de modelagem matemática podemos assumir a existência *a priori* de uma *realidade inicial*, mas cuja verdade nos é possível alcançar apenas através de representações parciais dadas pelos recortes que constituem o que chamamos de *realidade intermediária*. Podemos entender por realidade inicial o mundo exterior enquanto ser e não enquanto aparecer. Podemos entender por realidade intermediária o que Dewey nos coloca como realidade. “Na sua fórmula mais breve, a realidade [intermediária] torna-se existência, qual gostaríamos que fosse depois que analisamos seus defeitos e decidimos quais devem ser eliminados”. (DEWEY *apud* ABBAGNANO, 2003, p. 833) Dewey ainda chama de ‘realidade plena’ o que nós entendemos por realidade inicial.

As hipóteses e aproximações simplificadoras é que permitirão o surgimento de um recorte da realidade inicial, a realidade intermediária, que é a que será modelada. Ou seja, a realidade intermediária é uma representação recortada da realidade inicial que será modelada matematicamente. O que tem *estrutura*, pensada até como um conceito matemático, é a realidade intermediária e não a realidade inicial.

Para exemplificar a releitura mencionada do processo de modelagem podemos citar a cubagem da madeira apresentada em Biembengut e Hein (2003). Do interesse em se calcular a metragem cúbica de madeira que se obterá de um tronco de árvore após o corte da mesma, simplificações são feitas de modo a converter o tronco (realidade inicial) em um objeto tratável matematicamente (a realidade intermediária) e sobre o qual um modelo matemático é elaborado.

Segundo esses autores, no processo de modelagem que leva ao cálculo do volume de madeira, o madeireiro "'aproxima' primeiro o tronco (de cone) a um cilindro". (BIEMBENGUT; HEIN, 2003, p.110). Notemos que ao supor que o tronco da árvore possui a forma de um tronco de cone, já se adotou uma hipótese simplificadora, embora isso não seja apontado pelos autores. A partir do comprimento desse tronco de cone (realidade intermediária) e da média dos raios das bases representadas por círculos, faz-se uma nova aproximação, agora a um prisma reto de base quadrada cuja fórmula para cálculo do volume (que é mais simples que a fórmula para o cálculo do volume de cilindro) pode constituir um primeiro modelo matemático que auxiliará na obtenção do volume de madeira procurado. Uma melhor aproximação pode ser obtida considerando-se um prisma reto de base hexagonal para se obter o modelo matemático procurado ou, ainda, considerando-se o tronco como um cilindro. Cada um dos modelos apresenta diferentes tipos de simplificações e pode, de acordo com as atividades do madeireiro, ser útil para diversos fins, como sugerem Biembengut e Hein.

> Observamos que o madeireiro 'paga' pelo tronco, como se fosse um prisma de base quadrangular, corta-o como um prisma de base hexagonal e 'ganha' efetuando seus cálculos a partir do cilindro, pois o tronco é transformado em madeira e lenha. (BIEMBENGUT; HEIN, 2003, p.111-2).

Diante do exemplo que expusemos, é importante percebermos que quando se apreende parte da realidade visando a elaboração de um modelo matemático o que se passa a ter é uma nova realidade intermediária, que possui alguma correspondência com a realidade da qual se partiu, porém funciona segundo regras que nela podem ser válidas ou não. Também no início o que se tem é a realidade que se conseguiu captar, e não a totalidade da realidade existente. Ou seja, uma realidade não dada, mas de alguma forma construída. Nossa intenção foi analisar de um ponto de vista filosófico e epistemológico o próprio processo de modelagem matemática, inicialmente de situações não matemáticas, que são as típicas, e nessa análise identificar as etapas nas quais a matemática intervém e qual sua relação com a linguagem matemática. Percebemos que a matemática não intervém apenas no modelo matemático elaborado senão também na construção da realidade intermediária, pois essa realidade está constituída por estruturas, sendo elas objetos matemáticos, afinal lidam com relações, regularidades, simetrias, etc.

No caso da modelagem matemática como ferramenta para o ensino de matemática a questão pode ser mais complexa uma vez que, na busca de abordagens mais adequadas a cada nível de ensino, as situações estudadas podem ser bastante artificiais. Mesmo sendo artificiais essas realidades trazem um potencial para o estudo da matemática envolvida no processo de modelagem matemática, seja ela na forma de conteúdos escolares, seja em termos de pensamento matemático que pode ser adquirido ou aperfeiçoado.

As condições para aceitação de teorias (modelos) estão atreladas a crenças, pressupostos ou posições filosóficas que sustentam tais condições. Para uma discussão acerca de alguns desses pressupostos relembraremos aspectos principais de dois posicionamentos filosóficos que nos permitem visualizar sob que bases poderíamos propor uma discussão acerca das condições para a aceitação de modelos matemáticos obtidos por meio do processo de modelagem descrito anteriormente, no qual a elaboração de uma realidade intermediária a ser modelada constitui etapa importante e decisiva. As posições que trataremos são a dos realistas e a dos não realistas, nas versões próprias da teoria da ciência do século XX. Nessas versões a denominação realismo científico para os realistas é a mais adequada.

Para um realista (científico) uma teoria científica, um modelo no nosso caso, é um relato verdadeiro, ou aproximadamente verdadeiro, de como o mundo é. Uma teoria é aproximadamente verdadeira, segundo Dutra (2003), quando não se acredita que o conhecimento avançou suficientemente para atingir a verdade. Os realistas assumem uma concepção de verdade como correspondência, entre a teoria ou modelo e a realidade inicial que supostamente descreve, e sustentam a existência das entidades postuladas por suas teorias, mesmo que elas sejam inobserváveis. Por exemplo, uma teoria da microfísica que trata de "elétrons, prótons e nêutrons, etc.; se ela é aproximadamente verdadeira, então, segundo o realista científico, tais entidades realmente existem e são da maneira como a teoria as descreve." (DUTRA, 2003, p. 16). No nosso caso, os objetos construídos na teoria cuja existência real é afirmada pelos realistas são objetos da realidade intermediária, uma vez que são os constructos teóricos. Se eles existem ou não na realidade inicial dependerá de sua observabilidade que, por sua vez, depende da teoria que a sustenta.

Em oposição aos realistas estão os não realistas, ou anti-realistas, para os quais uma teoria científica é, no máximo, um bom instrumento de predição, que pode funcionar bem empiricamente, mesmo não se aproximando da verdade. Para os anti-realistas a aceitação de uma teoria pressupõe que ela dê conta dos fenômenos, ou seja, dos observáveis. Desse modo uma condição do anti-realista para que uma teoria seja aceita é que ela seja adequada empiricamente. O conceito de 'adequação empírica' desempenha para os anti-realistas o mesmo papel que desempenha o conceito de 'verdade' ou 'verdade aproximada' para os realistas. Para os realistas a verdade é uma forma de acesso à realidade. A concepção de verdade subjacente a essa corrente filosófica é a correspondencial, segundo a qual uma afirmação numa teoria seria verdadeira se ela expressa um fenômeno que ocorre na realidade.

Na relação do modelo com a realidade intermediária há um certo realismo: acredita-se que as entidades que são descritas na teoria *realmente* existem na realidade intermediária. No processo de modelagem matemática, os modelos são teorias que refletem a realidade intermediária. Logo, a verdade deles só pode estar em relação com essa realidade e não com a realidade inicial. Mesmo não havendo uma relação de verdade entre o modelo e a realidade inicial a percepção dessa limitação pode ser útil do ponto de vista da construção do conhecimento. Por exemplo,

> se atentarmos para as ciências empíricas, logo constataremos o fato de que elas lançam mão de teorias que são falsas do prisma correspondencial. [...] [Elas] utilizam-se de leis, hipóteses e teorias que sabidamente não reproduzem a realidade. Há teorias, até, que mesmo após terem sido abandonadas, como falsas, ainda hoje podem ser usadas para captar o real de maneira aproximada; é o que se dá, por exemplo, com o sistema de Ptolomeu: suas predições, dentro de limites que lhe são próprios, permanecem sendo aceitáveis. (DA COSTA, 1997, p. 128).

Buscando uma fundamentação filosófica para a realidade intermediária, apoiamo-nos do estruturalismo. Lacerda Araújo (2003, p.133) justifica o uso do estruturalismo em ciência da seguinte maneira:

> A possibilidade de se fazer ciência, de se formalizar, ou seja, de encontrar as estruturas universais, inconscientes e variantes, caracteriza o método estruturalista. A estrutura não é pura forma já que resulta de uma investigação objetiva; cumpre assim, uma finalidade analítica. [...] ao permitir a compreensão da totalidade [...] fornece, além de uma explicação analítica, uma visão crítica da realidade.

Na visão de Granger estrutura é "um conjunto de elementos quaisquer, portanto abstratos, entre os quais (ou entre alguns de seus subconjuntos) tiverem sido definidas relações igualmente abstratas."(ABBAGNANO, 2003, p.376). Na visão de Levi-Strauss estrutura é "algo que constitui a *ordem* ou a *substância* da realidade em exame e, portanto, determina necessariamente todas as suas determinações, de tal forma que as torna infalivelmente previsíveis." (p.377) Com base nessas duas visões o *estruturalismo* pode ser tido como "todo método ou processo de pesquisa que, em qualquer campo, faça uso do conceito de *estrutura*." (p. 377-8). Para Barthes, conforme Lacerda Araújo (2003, p. 120)

> ...o estruturalismo não é uma escola, mas uma atividade de decomposição e composição do real, para fazer aparecer no objeto decomposto o inteligível. Este inteligível é o intelecto humano acrescentado ao objeto, portanto, a história, a cultura, o valor humano. Inquirir o psiquismo, a sociedade primitiva, a arte, a literatura, [isto é, uma realidade inicial] para neles descobrir invariantes universais responsáveis pelo sentido e pela forma, esta é a finalidade do método estruturalista.

A abordagem estruturalista trouxe elementos explicativos importantes para o desenvolvimento de nosso estudo acerca do processo de modelagem matemática. No desenvolvimento da matemática podemos visualizar uma antecipação do estruturalismo representada pelas contribuições de Hilbert nos finais do séc XIX, enfatizando a matemática, em particular a geometria, como o estudo das relações e não das coisas. Em seguida, com o grupo Bourbaki, o caráter estruturalista da matemática é acentuado com a concepção de matemática como a teoria das estruturas, que tem se revelado promissora na reconstrução da matemática do séc. XX.

Segundo Lévi-Strauss, a noção de estrutura não se refere à realidade empírica, mas aos modelos (no nosso caso, a realidade intermediária) construídos em conformidade com esta. Assim sendo, ele coloca algumas condições para que os modelos sejam concebidos como estruturas, dentre elas a de que uma modificação qualquer em um elemento do sistema acarreta uma modificação de todos os outros. Essa condição reflete o caráter relacional das estruturas. Outra condição é a de que se pode prever de que modo reagirá o modelo em caso de modificação de um de seus elementos. Além disso, o modelo deve ser construído de tal modo que seu funcionamento possa explicar todos os fatos observados. A função explicativa revela o caráter aproximativo do modelo (LÉVI-STRAUSS *apud* LACERDA ARAÚJO, 2003, p.129).

5. Resultados da Pesquisa

Revelamos por meio deste estudo que numa discussão acerca de concepções e fundamentos epistemológicos para o processo de modelagem matemática na educação matemática não se faz necessário, nem conveniente, adotarmos um único posicionamento, mas promovermos o diálogo entre diferentes filosofias que sustentam as diversas concepções. De modo especial, não é produtivo adotar a posição de que a matemática é somente construída, ou ao contrário, descoberta; que a realidade é dada, ou ao contrário, elaborada. Por meio de uma abordagem interna do processo de modelagem matemática, ou seja, de uma abordagem de sua natureza, seus procedimentos, apresentamos pressupostos e fundamentos para uma caracterização do componente realidade presente nesse processo. Na busca dessa caracterização realizamos uma reconstrução epistemológica do processo de modelagem que nos levou a uma nova forma de ver a própria matemática envolvida nesse processo. Ao situarmos o componente realidade numa descrição do processo de modelagem matemática como ele comumente é visto na educação matemática pudemos perceber seu potencial para o estudo de questões referentes às diferentes formas de concepção da própria matemática encontradas em diversas etapas de seu desenvolvimento histórico. Ao caracterizarmos esse componente realidade no processo de modelagem matemática a partir de uma análise epistemológica do mesmo mostramos que sua construção é feita com base em pressupostos geralmente não explicitados, mas que estão intimamente ligados ao aspecto estrutural que a própria matemática possui em seu estado atual de desenvolvimento. Ao fazermos uma releitura do processo de modelagem matemática à luz da análise epistemológica realizada mostramos que esse processo pode ser decomposto em etapas de modo que a construção de uma realidade intermediária, situada entre a realidade focada inicialmente e o modelo matemático que se busca elaborar, é uma etapa fundamental. Considerando a realidade inicial como dada, apoiamo-nos no realismo e ao atribuir um caráter estrutural a um recorte dessa realidade, a realidade intermediária, apoiamo-nos no estruturalismo. Com essa releitura revelamos importantes facetas do componente realidade, não exploradas em leituras usuais do processo de modelagem matemática, e que podem ser essenciais quando se toma o ensino e a aprendizagem de matemática como objetivo da modelagem matemática, principalmente em cursos de formação de professores.

Referências

ABBAGNANO, N. *Dicionário de filosofia*. São Paulo: Martins Fontes, 2003.
ANASTÁCIO, M. Q. A. *Considerações sobre a modelagem matemática e a educação matemática*. (Dissertação). Mestrado em Educação Matemática UNESP – Rio Claro 1990.
______. Concepções de realidade e de matemática no processo de modelagem matemática: alguns apontamentos. In: CONFERÊNCIA NACIONAL SOBRE MODELAGEM NA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 5., 2007. *Anais*.... Ouro Preto: UFOP, 2007. p. 24-34. 1 CD-ROM.
ARAÚJO, J. de L. *Cálculo, tecnologias e modelagem matemática: as discussões dos alunos*. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2002.
BACHELARD, G. *O novo espírito científico*. 3.ed. Rio de Janeiro: Tempo Brasileiro, 2000.
BASSANEZI, R. C. *Ensino-aprendizagem com modelagem matemática*: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BEAN, D. O que é modelagem matemática? *Educação matemática em revista*, São Paulo, ano 8, n. 9/10, p. 49-57, abr, 2001.
______. Modelagem na Perspectiva do Pensamento. In: CONFERÊNCIA NACIONAL DE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 3., 2003. *Anais*... Piracicaba: UNIMEP, 2003. 1 CD-ROM.
BIEMBENGUT, M. S. *Modelagem matemática & implicações no ensino-aprendizagem de matemática*. Blumenau: Editora da FURB, 1999.
BIEMBENGUT, M. S.; HEIN, N. *Modelagem matemática no ensino.* 3. ed. São Paulo: Contexto, 2003.
______. Princípios de metamodelagem matemática. In: SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, *2.* 2003. *Anais...* Santos, 2003, 1 CD ROM.
BLUM, W. ; NISS, M. Applied mathematical problem solving, modelling, aplications, and links to other subjects – state, trends and issues in mathematics instruction. *Educational Studies In mathematics*, Dordrecht, v. 22, n. 1, p. 37-68, feb. 1991.
DA COSTA, N. C. A . *Introdução aos fundamentos da matemática.* 3. ed. São Paulo: Hucitec, 1992.
______. *O conhecimento científico*. São Paulo: Discurso Editorial, 1997.
D'AMBROSIO, U. *Da realidade à ação*: reflexões sobre educação e matemática. 4. ed. São Paulo: Summus, 1986.
______. *Dos fatos reais à modelagem*: uma proposta de conhecimento matemático. 1999. Disponível em: http://vello.sites.uol.com.br/modelos.htm. Acesso em 07/2004.
DUTRA, L. H. de A. *Introdução à teoria da ciência.* 2.ed. Florianópolis, Ed. UFSC, 2003.
LACERDA ARAÚJO, I. *Introdução à filosofia da ciência*. 3.ed. Curitiba. Ed. UFPR, 2003.
LAKATOS, I. *Matemáticas, ciencia y epistemología*. 2. ed. Madrid: Alianza Editorial, 1987.
MUELLER I. *Discussion document* da ICMI (International Commission on Mathematical Instruction). study 14 – Applications and modelling in mathematics education. In: CONFERÊNCIA NACIONAL DE MODELAGEM E EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**,** n. 3, 2003, Piracicaba. **Anais...** Piracicaba: UNIMEP, 2003. 1 CD-ROM
NEGRELLI, L. G. *Uma reconstrução epistemológica do processo de modelagem matemática para a educação (em) matemática*. 2008, 94 fs. Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação. Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2008.
POINCARÉ, J. H. *Ciencia y método*. 2. ed. Buenos Aires: Espasa-Calpe Argentina S. A, 1946.
SILVEIRA, E. *Modelagem matemática em educação no Brasil*: entendendo o universo de teses e dissertações. (Dissertação) Mestrado em Educação. UFPR, 2007.