

A MODELAGEM MATEMÁTICA EM CURSOS DE GRADUAÇÃO UTILIZANDO *SOFTWARE* ESTATÍSTICO

Oscar Luiz Teixeira de Rezende
Instituto Federal do Espírito Santo
oscar@ifes.edu.br

Luciano Lessa Lorenzoni
Instituto Federal do Espírito Santo
llorenzoni@ifes.edu.br

Resumo

Este trabalho tem o objetivo discutir a modelagem matemática na perspectiva pragmática e científica, com ênfase na construção do modelo e nos conteúdos matemáticos envolvidos, sem, no entanto, deixar de analisar a sua importância no ensino da matemática. Estudamos o fenômeno de resfriamento de uma massa de carvão vegetal empregando a lei do resfriamento de Newton e a lei zero da termodinâmica para construir a equação do modelo. Dados experimentais de tempo e temperatura e o *software* estatístico SPSS, versão 16, foram utilizados para determinar os parâmetros do modelo e o coeficiente de determinação. Após a construção do modelo, avaliamos a sua qualidade e fizemos os devidos ajustes, concluindo que ele foi adequado para representar os dados experimentais.

Palavras chave: Educação; Modelagem; Estatística.

1. Introdução

Existe um antigo provérbio chinês que diz assim: *Eu ouço e eu esqueço, Eu vejo e eu lembro, Eu faço e eu entendo.*

Esse provérbio nos oferece uma reflexão a respeito da nossa prática pedagógica como educadores e professores de matemática. Geralmente valorizamos muito a aula expositiva, o que, em certa medida, contribui para inflar o nosso protagonismo no processo de ensino-aprendizagem transformando o aluno em um mero espectador.

Se bem trabalhada pelo professor, a modelagem pode ser uma estratégia metodológica que instiga o aluno a “fazer a matemática”. Isso o leva a compreender/assimilar e interferir nos fenômenos que o cercam reduzindo a distância entre a matemática que ele pratica, enquanto personagem do mundo real, e aquelas apresentadas nas salas aulas.

Partindo do pressuposto que ensinar não é transferir conhecimento, mas criar possibilidades para a sua produção (FREIRE, 1996), os professores devem buscar ações pedagógicas para facilitar a compreensão dos seus alunos dos conceitos matemáticos e propiciar condições para uma educação menos alienada e mais comprometida com as realidades dos indivíduos e sociedades. Utilizar dados reais que são próximos ao universo de conhecimento do aluno na construção de modelos com auxílio de ferramentas computacionais e extrair desses modelos informações que facilitem a compreensão do fenômeno em estudo permite ao aluno a compreensão do significado prático desse estudo e a importância social da matemática.

Vários professores vêm pesquisando a modelagem na perspectiva da educação matemática. Bassanezi (1990, 1994, 2006), Biembengut (1990, 1999), Blum & Niss (1999) e Borba, Meneghetti & Hermini (1997, 1999) concordam que a modelagem matemática é uma estratégia de ensino em que o aluno deixa de ser um sujeito passivo na sua inserção no mundo da matemática.

Barbosa (2001) considera, de maneira sintética, que a modelagem é um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações oriundas de outras áreas, possuindo assim um caráter interdisciplinar. Bassanezi (1994) enumera cinco argumentos para a inclusão da modelagem matemática no currículo, a saber: motivação, facilitação da aprendizagem, preparação para utilizar a matemática em diferentes áreas, desenvolvimento de habilidades gerais de exploração e compreensão do papel sociocultural da matemática.

Um panorama das pesquisas realizadas em Modelagem Matemática foi apresentado por Bicudo e Klüber (2011), os quais descrevem um mosaico representativo dessa área no qual se destacam as unidades de significado, o que está sendo problematizado/interrogado, os procedimentos e as modalidades da pesquisa e as contribuições para a área.

Segundo Leite, Silva e Sousa (2011), diferentes abordagens para a utilização da modelagem matemática como instrumento pedagógico são apresentadas na literatura: na perspectiva pragmática e científica e na sociocrítica. A diferença dessas perspectivas está na forma como a modelagem é conduzida. Em linhas gerais, na perspectiva pragmática e científica, a ênfase está na construção do modelo e nos conteúdos matemáticos envolvidos; na perspectiva sociocrítica, exploram-se mais as discussões que envolvem a análise do problema abordado.

Propomo-nos, neste trabalho, apresentar um procedimento de modelagem baseado na perspectiva pragmática e científica com o objetivo de construir um modelo matemático que seja capaz de representar um fenômeno real com base em uma amostra de dados experimentais. Para construir e analisar a qualidade do modelo desenvolvido, utilizamos procedimentos estatísticos.

Nessa abordagem, supõe-se que o aluno de graduação já tenha um nível de formalismo matemático acumulado, com conhecimentos básicos de cálculo e estatística, e que esteja em condições de entender os conteúdos matemáticos utilizados e a importância de um modelo matemático na análise de fenômenos reais.

2. A equação do modelo

Bassanezi (2006), um dos pioneiros da modelagem na educação matemática no Brasil, afirma que “a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-lo interpretando suas soluções na linguagem do mundo real”.

Vamos estruturar a construção do modelo tendo por referência a sua definição e as etapas metodológicas apresentadas na figura 1.

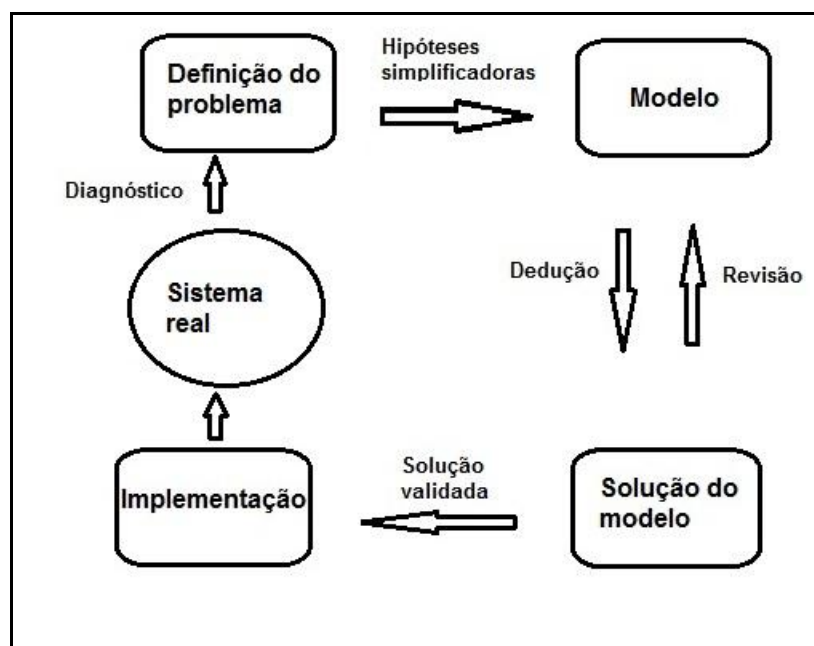


Figura 1 - Etapas metodológicas de construção de um modelo matemático.

Fundamentados em um sistema real (realidade a ser abordada), devemos definir claramente qual o nosso problema e a que perguntas procuramos responder. Isso é de fundamental importância como estratégia para afastar as possíveis dificuldades que poderão interferir numa escolha adequada do conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam o problema real.

Os fenômenos do mundo real a serem modelados são, em geral, complexos e com um número considerável de detalhes, o que induz a necessidade de hipóteses simplificadoras para restringir e isolar o problema num contexto em que seja representado pelas relações matemáticas, sem perder, no entanto, seus aspectos relevantes.

Após a construção do modelo e das relações que dele podem ser extraídas, devemos validar o modelo. Nesta etapa, o modelo e as hipóteses que a ele foram atribuídas devem ser comparados com os valores reais para avaliar se as respostas obtidas estão coerentes com o sistema real. Só então a solução deve ser implementada.

A situação problema que vamos modelar diz respeito ao resfriamento de uma massa de carvão vegetal produzida em um forno de carbonização. O processo de produção do carvão vegetal é muito importante para a indústria do aço, o que tem produzido pesquisas visando o desenvolvimento de técnicas que mitiguem os impactos ambientais e maximizem a sua produção. Uma dessas técnicas diz respeito ao resfriamento da massa de carvão.

Para que a temperatura da massa de carvão seja reduzida, são utilizados dois agentes de remoção de calor: o resfriamento natural e o vapor de água a uma determinada temperatura. Segundo Nogueira et al. (2005), Perry et al. (1988) e Shields (1982), o uso de vapor de água como vetor de transporte de energia térmica traz grandes vantagens. A água é uma das substâncias disponíveis na natureza com baixa agressividade química e com grande capacidade de transportar energia.

Uma vez que resfriamento é entendido como a perda de calor do carvão, podemos, em princípio, modelar o fenômeno utilizando a lei de resfriamento de Newton, que diz o seguinte: *a taxa de perda de calor de um corpo é proporcional à diferença de temperatura entre o corpo e a sua vizinhança.*

Complementando a lei de resfriamento de Newton, a lei zero da termodinâmica estabelece que dois corpos em contato térmico tendem a atingir o equilíbrio termodinâmico entre si, ou seja, atingir a mesma temperatura de equilíbrio. Também é sabido que, quanto maior for a diferença de temperatura entre eles, mais rapidamente se processará a troca de

calor, o que implica uma maior variação de temperatura dos corpos. É por essa razão que o cafezinho numa xícara esfria mais rápido em um dia frio de inverno que em um dia quente de verão.

Baseando-nos no que foi exposto, podemos representar o resfriamento da massa de carvão pela seguinte equação:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_v) \quad (1)$$

em que:

T = temperatura ($^{\circ}\text{C}$) da massa de carvão no instante t ;

T_v = temperatura ($^{\circ}\text{C}$) do vapor d'água ; e

k = constante que expressa as propriedades físicas e químicas da massa de carvão a ser resfriada.

Na equação (1), a taxa de variação da temperatura da massa de carvão varia numa proporção direta à diferença entre a temperatura da massa de carvão, em um determinado instante, e a temperatura do vapor de água. O valor negativo do coeficiente de k na equação é para indicar que a temperatura da massa de carvão está diminuindo com o tempo.

Reescrevendo a equação (1) e integrando ambos os membros na variável tempo, tem-se:

$$\frac{dT}{T - T_v} = -k dt$$

$$\int \frac{dT}{T - T_v} = \int -k dt$$

$$\ln(T - T_v) = -kt + k_0$$

$$T(t) - T_v = e^{k_0} \cdot e^{-kt}$$

$$T(t) - T_v = C \cdot e^{-kt}$$

O que conduz a equação:

$$T(t) = T_v + C \cdot e^{-kt} \quad (2)$$

Considerando a condição inicial em que a temperatura da massa de carvão é $T(0) = T_0$ e aplicando esse valor na equação (2), obtém-se:

$$T(0) = T_v + C \cdot e^{-k \cdot 0}$$

$$T_0 - T_v = C$$

Substituindo o valor de C na equação (2), obtém-se a equação (3):

$$T(t) = T_v + (T_0 - T_v)e^{-kt} \quad (3)$$

Este modelo funcional representa a variação da temperatura da massa de carvão em relação ao tempo no processo de resfriamento.

3. Construção e avaliação do modelo

O modelo foi construído utilizando os dados experimentais da tabela 1, coletados por Reis (2009), que desenvolveu o protótipo de um forno de carbonização e analisou dois métodos para otimizar o tempo de resfriamento do carvão produzido: o natural e com o uso de vapor de água.

Neste trabalho apropriamos os dados em que foi resfriado 1.032kg de carvão a uma temperatura inicial de 479,60°C. O agente de remoção de calor utilizado foi 50 kg/h de vapor de água a uma temperatura constante de 112°C.

Tabela 1 - Dados coletados por Reis (2009) durante período de resfriamento da massa de carvão com vapor de água.

<i>Tempo</i> (h)	<i>Temp.</i> (°C)	<i>Tempo</i> (h)	<i>Temp.</i> (°C)	<i>Tempo</i> (h)	<i>Temp.</i> (°C)	<i>Tempo</i> (h)	<i>Temp.</i> (°C)	<i>Tempo</i> (h)	<i>Temp.</i> (°C)
0,00	479,60	24,00	243,50	48,00	85,40	72,00	53,60	96,00	30,30
1,00	465,90	25,00	234,70	49,00	87,50	73,00	51,50	97,00	29,80
2,00	451,70	26,00	224,10	50,00	87,60	74,00	49,80	98,00	28,90
3,00	439,80	27,00	215,30	51,00	86,00	75,00	47,80	99,00	28,50
4,00	427,50	28,00	204,60	52,00	84,30	76,00	45,70	100,00	28,60
5,00	416,30	29,00	196,40	53,00	83,10	77,00	43,80	101,00	28,90
6,00	402,70	30,00	184,60	54,00	80,90	78,00	43,80	102,00	28,40
7,00	392,50	31,00	178,40	55,00	78,60	79,00	41,80	103,00	28,10

8,00	383,50	32,00	165,80	56,00	76,80	80,00	40,60	104,00	27,40
9,00	374,20	33,00	156,30	57,00	75,10	81,00	39,90	105,00	26,90
10,00	361,80	34,00	147,30	58,00	78,40	82,00	37,90	106,00	25,80
11,00	350,80	35,00	136,80	59,00	77,90	83,00	35,70	107,00	25,00
12,00	341,00	36,00	128,70	60,00	77,60	84,00	34,80	108,00	25,30
13,00	331,70	37,00	118,40	61,00	76,50	85,00	34,10	109,00	23,60
14,00	320,70	38,00	107,40	62,00	75,40	86,00	34,50	110,00	22,50
15,00	311,30	39,00	105,60	63,00	73,20	87,00	33,90	111,00	21,90
16,00	301,40	40,00	102,40	64,00	72,50	88,00	33,80	112,00	21,50
17,00	293,60	41,00	100,20	65,00	70,40	89,00	33,70	113,00	20,90
18,00	305,60	42,00	97,50	66,00	69,50	90,00	33,50	114,00	20,50
19,00	298,50	43,00	95,40	67,00	65,40	91,00	32,70	115,00	20,40
20,00	287,50	44,00	92,60	68,00	63,20	92,00	32,50	116,00	20,30
21,00	278,60	45,00	90,50	69,00	60,50	93,00	32,10	117,00	20,20
22,00	267,40	46,00	89,60	70,00	58,40	94,00	31,80	118,00	20,20
23,00	254,80	47,00	87,50	71,00	55,40	95,00	30,20	119,00	20,20

Na tabela 1 observamos que, desde a 117ª hora, a temperatura da massa de carvão se estabilizou, entrando em equilíbrio térmico com a temperatura ambiente, o que indica o fim do processo.

Como ressaltado anteriormente, o modelo matemático escolhido para descrever o processo de resfriamento da massa de carvão foi baseado na lei de resfriamento de Newton, representada pela equação (3), $T(t) = T_v + (T_0 - T_v)e^{-kt}$.

Substituindo os valores da temperatura do vapor de água e da temperatura inicial do carvão vegetal na equação (3), tem-se:

$$T(t) = 112,00 + (479,60 - 112)e^{-kt}$$

$$T(t) = 112,00 + 367,60e^{-kt} \quad (4)$$

A equação (4) representa o modelo que descreve o processo de resfriamento do carvão nas condições definidas no trabalho de Reis (2009), cujo parâmetro a ser determinado é k . Para calcular o parâmetro desconhecido k e avaliar a qualidade do

modelo, será utilizado o *software* estatístico SPSS (*Statistical Package for the Social Sciences*) versão 16.

O uso do SPSS se deve a alguns recursos do *software*, como a interface de entrada de dados que permite criar variáveis com informações agregadas e operar as variáveis já existentes para determinar novas variáveis, o que facilita a sua utilização nas várias etapas de processamento das informações.

Com uma boa estruturação do banco de dados, o *software* faz cálculos de regressão utilizando modelos predeterminados ou permitindo ao usuário criar o próprio modelo, diferentemente de alguns outros *softwares* em que essa opção não se apresenta. Para avaliar a qualidade do modelo, será utilizado o procedimento estatístico coeficiente de determinação, definido pela equação (5):

$$R^2 = 1 - \frac{SQR}{SQT} \quad (5)$$

Em que:

SQR = Soma dos quadrados dos resíduos

SQT = Soma dos quadrados totais

O coeficiente de determinação mede a percentagem de variação da variável dependente que pode ser explicada pelo modelo de regressão.

O *software* foi executado e apresentou como resposta os seguintes valores: $k = 0,59$ e $R^2 = 0,769$.

O modelo ajustado é, então, definido pela equação:

$$T(t) = 112,00 + 367,60e^{-0,59t} \quad (6)$$

O valor do coeficiente de determinação, $R^2 = 0,769$, está bem abaixo de 1 (ideal).

Concluimos que, estatisticamente, o modelo não foi adequado para representar os dados experimentais. Na figura 2, observamos este fato: as temperaturas obtidas pelo modelo ajustado se afastam das temperaturas experimentais à medida que o tempo passa.

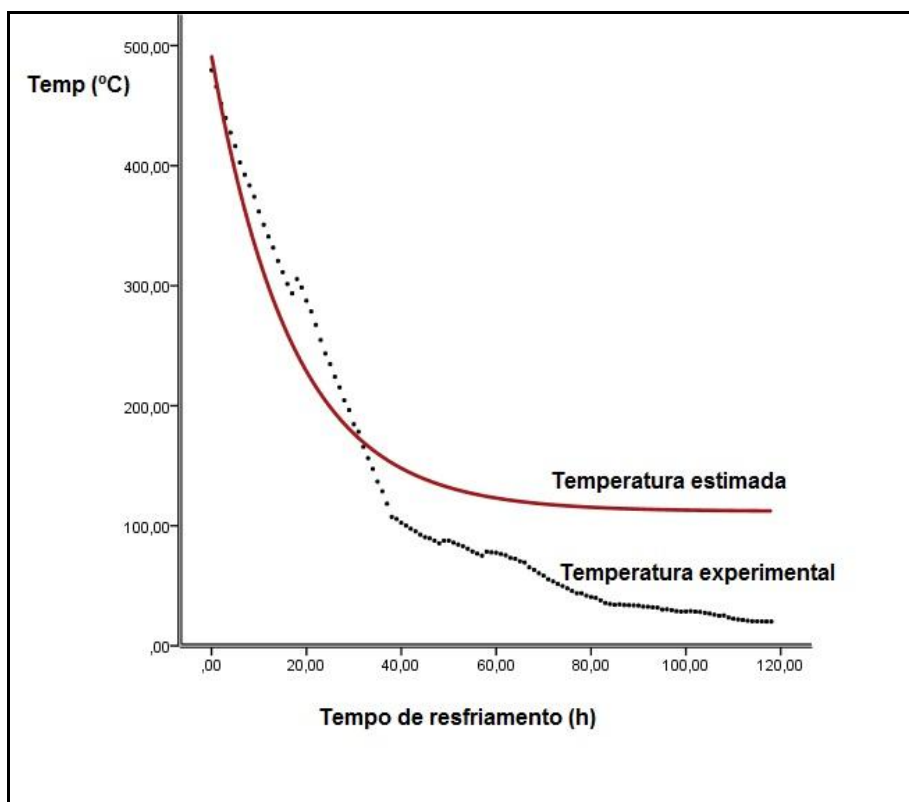


Figura 2 - Comportamento das temperaturas obtidas experimentalmente e por meio do modelo matemático ajustado em função do tempo.

O modelo apresentou um melhor ajuste dos dados no início do processo. À medida que o tempo passava, o ajuste piorava. Deparamo-nos, então, com uma fase muito importante no processo de modelagem: aquela em que devemos verificar se o modelo representa bem a realidade ou se novos ajustes devem ser feitos, ou até mesmo se devemos descartar o modelo atual.

Ao analisarmos o comportamento das temperaturas na figura 2, consideramos prematuro descartar o modelo, pois se observa a existência de um padrão de diferença crescente, em módulo, entre as temperaturas obtidas pelo modelo e aquelas obtidas experimentalmente.

Para avaliarmos a diferença, criamos uma nova variável denominada *erro*, em °C, que, a cada tempo, guarda a diferença, em módulo, das temperaturas, equação (7):

$$\text{erro} = |\text{temp. ajustada} - \text{temp. experimental}| \quad (7)$$

Como o erro apresenta um comportamento crescente, escolhemos dois modelos funcionais com essa característica para ajustar os dados: o modelo linear, equação (8), e o modelo exponencial, equação (9).

$$\text{erro}(t) = at + b \quad (8)$$

$$\text{erro}(t) = be^{at} \quad (9)$$

Calculando os parâmetros a e b e o coeficiente de determinação dos modelos, com o uso do SPSS, obtêm-se os resultados apresentados na tabela 2.

Tabela 2 - Os parâmetros e os coeficientes de determinação dos modelos ajustados ao erro.

Modelo	a	b	R^2
Linear	0,64	18,3	0,794
Exponencial	0,015	19,8	0,520

Os coeficientes de determinação estão bem abaixo de 1, indicando que os modelos ajustados não foram muito bons.

Mesmo com o coeficiente de determinação indicando que nenhum dos dois modelos ajustou bem a variação do *erro*, optamos pelo modelo linear, que apresentou um resultado um pouco melhor.

Ainda que o modelo linear não tenha se mostrado muito bom para representar o *erro*, optamos por incorporá-lo ao modelo baseado na lei de resfriamento de Newton, por meio da operação de subtração, criando o novo modelo, equação (10).

$$T(t) = 112,00 + 367,60e^{-kt} - (0,64t + 18,3)$$
$$T(t) = 93,70 + 367,60e^{-kt} - 0,64t \quad (10)$$

Utilizando o SPSS, determinamos: $k = 0,043$ e $R^2 = 0,974$. O modelo ficou, então, definido pela equação (11)

$$T(t) = 93,70 + 367,60e^{-0,043t} - 0,64t \quad (11)$$

O coeficiente de determinação $R^2 = 0,974$ está bem próximo de 1, indicando que o modelo da equação (11) se mostrou adequado estatisticamente para ajustar os dados experimentais de temperatura do processo de resfriamento da massa de carvão.

Na figura 3, observamos o comportamento da variável temperatura estimada pelo modelo e obtida experimentalmente.

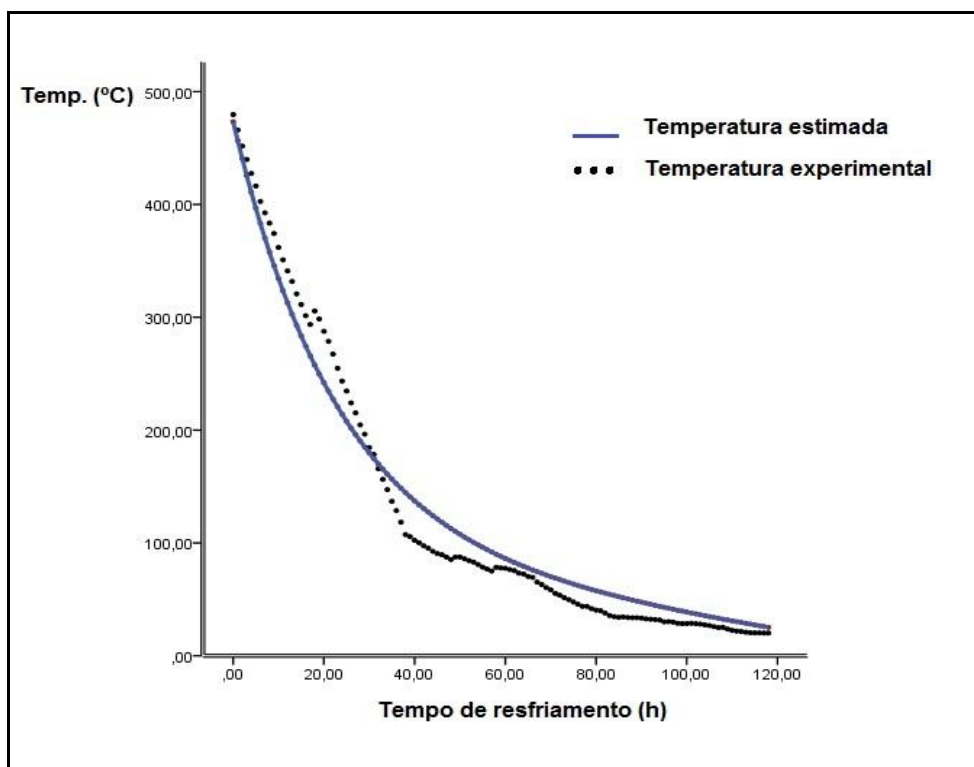


Figura 3 - Representa o comportamento da variável temperatura estimada pelo modelo e obtida experimentalmente.

Neste trabalho não tivemos o propósito de analisar o resfriamento da massa de carvão com base no modelo construído, mas o de construir o modelo e avaliar a sua qualidade baseando-nos exclusivamente em métodos estatísticos. Entretanto, é importante ressaltar o que diz Bassanezi (2009), ao afirmar que a aceitação ou não de um modelo depende muito mais de fatores que condicionam o modelador, incluindo seus objetivos e os recursos disponíveis, do que o simples confronto com os dados experimentais.

4. Considerações finais

A intenção do trabalho foi apresentar a modelagem matemática na perspectiva pragmática e científica, adotando, no problema, as etapas de construção de um modelo apresentadas na figura 1.

O fenômeno natural abordado foi o resfriamento da massa de carvão vegetal. Como hipóteses simplificadoras, consideraram-se apenas as variáveis, a temperatura e o tempo de resfriamento da massa de carvão, as únicas diretamente relacionadas com o problema.

Ao analisarmos as características físicas do resfriamento por meio dos dados experimentais, entendemos que o modelo matemático, para descrever tal fenômeno, seria a lei de resfriamento de Newton. No entanto, o coeficiente de determinação indicou que o modelo não representou bem o comportamento dos dados experimentais, o processo de resfriamento foi mais rápido com a utilização do vapor de água e o modelo não conseguiu representar bem esse fenômeno. O resultado mostrou a existência de um erro, com um comportamento crescente em função do tempo, entre o modelo baseado na lei de resfriamento de Newton e os dados experimentais.

Com base nessa observação, um novo modelo foi construído, incorporando ao modelo baseado na lei de resfriamento de Newton o erro.

O novo modelo mostrou-se adequado para descrever a variação da temperatura da massa de carvão no processo de resfriamento, pois apresentou o coeficiente de determinação próximo de 1.

Entendemos que o percurso metodológico utilizado para construir e avaliar o modelo é importante no contexto do ensino-aprendizagem da matemática, pois conduz a um encadeamento de raciocínios lógicos que, mediante um conjunto de premissas, deriva um consequente, o modelo.

Do nosso ponto de vista, todo o processo de modelagem, desde a escolha do problema até a construção efetiva do modelo, contribui para que os alunos se apropriem, de modo mais natural, dos conceitos matemáticos ali tratados e observem que a matemática está inserida na sua realidade. Com isso, eles são convidados a “fazer matemática”, tornando-se mais autônomos e atuantes na sua relação de aprendizagem com a matemática.

5. Referências

BARBOSA, J. C. **Modelagem na Educação Matemática: contribuições para o debate teórico**. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24., 2001, Caxambu. Anais... Rio Janeiro: ANPED, 2001. 1 CD-ROM.

BASSANEZI, R. C. **Modelagem como metodologia de ensino de matemática**. In: Actas de la Séptima Conferencia p. 130-155, 1990.

BASSANEZI Interamericana sobre Educación Matemática. Paris: UNESCO, R. Modeling as a teaching-learning strategy. **For the learning of mathematics**, Vancouver, v. 14, n. 2, p. 31-35, 1994.

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática: uma nova estratégia**. Ed. Contexto 3ª ed. São Paulo, 2006.

BICUDO, M. A. V., KLÜBER, T. E. Pesquisa em Modelagem Matemática no Brasil: a caminho de uma metacompreensão. **Cadernos de Pesquisa** V.41 N.144 Set./Dez. p. 904-927, 2011.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelação Matemática como método de ensino-aprendizagem de Matemática em cursos de 1º e 2º graus.**, 1990. 210p. (Dissertação, Mestrado). Rio Claro: IGCE/UNESP.

BIEMBENGUT, M. S. **Modelagem Matemática & implicações no ensino-aprendizagem de matemática**. Blumenau: Editora da FURB, 134p, 1999.

BLUM, W., NISS, M. Applied mathematical problem solving, modelling, applications, and links to other subjects – state, trends and issues in mathematics instruction. **Educational Studies in Mathematics**, Dordrecht, v. 22, n. 1, p. 37-68, 1991.

BORBA, M. C., MENEGHETTI, R. C. G., HERMINI, H. A. Modelagem, calculadora gráfica e interdisciplinaridade na sala de aula de um curso de ciências biológicas. **Revista de Educação Matemática da SBEM-SP**, [São José do Rio Preto, SP], n. 3, p. 63-70, 1997.

BORBA, M. C., MENEGHETTI, R. C. G., HERMINI, H. A. Estabelecendo critérios para

avaliação do uso de Modelagem em sala de aula: estudo de um caso em um curso de ciências biológicas. In: BORBA, M. C. **Calculadoras gráficas e educação matemática**. Rio de Janeiro: USU, Ed. Bureau, 1999. p. 95-113 (Série Reflexão em Educação Matemática).

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia: Saberes necessários à prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

LEITE, M. B. Ferreira; SILVA, G. H. Jorge; SOUSA, L. Fernandes. Modelos matemáticos para o crescimento da população do estado de São Paulo e a exploração de diferentes taxas de crescimento. **Ciência & Educação**, Campinas, SP. V. 17, n.4, p. 927-940, 2011.

NOGUEIRA, L. A. H.; ROCHA, C. R.; NOGUEIRA, F. J. H.; MONTEIRO, M. A. G. **Eficiência energética no uso de vapor – Manual prático**. [S.l.]: ELETROBRÁS PROCEL e EFFICIENTIA/FUPAI, 2005.

PERRY, R. H.; GREEN, D. W.; MALONEY, J. O. **Perry's chemical engineers' handbook**. 7th edition. New York: McGraw-Hill Book Company, 1988.

REIS, H.O. **Resfriamento de fornos de carbonização por meio de injeção de vapor d'água**. 2009. 139p. Dissertação (Mestrado em Engenharia Agrícola)- Universidade Federal de Viçosa, Viçosa, MG.

SHIELDS, C. D. **Boilers type**; characteristics and functions. New York: MacGraw Hill, 1982.