ENFRENTANDO OBSTÁCULOS EPISTEMOLÓGICOS COM O GEOGEBRA

André Luiz Souza Silva
IFRJ
Andrelssilva@globo.com

Vilmar Gomes da Fonseca
IFRJ
vilmar.fonseca@ifrj.edu.br

Wallace Vallory Nunes
IFRJ
wallace.nunes@ifrj.edu.br

Resumo:
Este minicurso propõe a experimentação da criação de atos de compreensão a partir do enfrentamento a alguns dos obstáculos epistemológicos, descritos por Sierpinska, relativos ao conceito de Função. A abordagem privilegia a análise e descrição dos aspectos geométricos dinâmicos do gráfico de funções por meio do software GeoGebra.

Palavras-chave: Obstáculos Epistemológicos, Função, GeoGebra.

1. Introdução

Sierpinska (1992) destaca entre os obstáculos epistemológicos do conceito de função o entendimento da variabilidade da função.

Entendemos que a variabilidade de uma função, associada por Rezende (2003a, 2007, 2008a, 2008b) ao desenvolvimento histórico do conceito de função se dá pela observação dos aspectos e características de crescimento ou decrescimento de uma função, da velocidade com a qual esse crescimento ou decrescimento acontece, e do tipo de relação de cada elemento do domínio com o contradomínio e vice-versa. Isso inclui a caracterização do domínio, a classificação referente à injetividade, sobrejetividade e bijeção e consequentemente da existência e caracterização da função inversa.

2. Objetivos

Para este minicurso escolhemos propor a experimentação da criação de atos de compreensão a partir do enfrentamento a alguns dos obstáculos epistemológicos, descritos por Sierpinska, relativos ao conceito de função a partir de uma abordagem que privilegia aspectos geométricos. Esta abordagem é sugestão dos trabalhos de Ballejo (2009), Souza e Silva (2006) e Bazzo (2009), mas principalmente se aproveita do aspecto dinâmico do software GeoGebra e também contrapõe o privilégio algébrico constatado na análise dos livros didáticos ressaltados nos trabalhos de Rezende (2008a, 2008b, 2007, 2003a, 2003b) e Botelho (2005).

3. Atividades

Atividade 1 – **Reconhecimento e caracterização dos subconjuntos do domínio onde uma função é estritamente crescente, decrescente ou constante.**

1. Complete a tabela desta atividade a partir da movimentação do seletor no arquivo do GeoGebra.
2. Agora responda:

   a) Os intervalos onde a função é CRESCENTE estão sendo marcados sempre com a mesma cor. Que cor é essa?

   b) Isso aconteceu em todos os casos?

   c) A outra cor foi utilizada nos intervalos onde a função é DECERESCENTE?

   d) Isso acontece em todos os casos?
3. Quais destas funções não admitiram alteração de crescimento?
4. Há alguma sempre crescente?
5. Há alguma sempre decrescente?
6. Escreva para as funções de 1 a 7 os intervalos onde cada uma é crescente e onde á decrescente.
7. Um aluno disse que conseguia identificar se uma função era crescente ou decrescente pensando que um ponto do plano percorre da esquerda para direita o gráfico da função, sendo que esta função será crescente enquanto o ponto estiver subindo e decrescente no caso contrário. A definição destes conceitos aparece a seguir. Explique se este aluno está ou não correto justificando sua resposta a partir das definições abaixo.

   Definição. Uma função f é dita crescente em um subconjunto *I* de seu domínio se ao tomarmos quaisquer $x_1, x_2 \in I \subset Dom(f)$, com $x_1 < x_2$ implicar $f(x_1) < f(x_2)$.

   Definição. Uma função f é dita decrescente em um subconjunto *I* de seu domínio se ao tomarmos quaisquer $x_1, x_2 \in I \subset Dom(f)$, com $x_1 < x_2$ implicar $f(x_1) > f(x_2)$.

Nesta atividade uma reta tangente ao gráfico de cada uma das funções está sendo utilizada. Nas funções f_1 e f_2 esta reta coincidiu com o gráfico da função, mas nas outras não. Consideraremos o **coeficiente angular** da reta tangente ao gráfico de f neste ponto *P* (este coeficiente aparece assinalado junto à reta tangente ao gráfico) como a **velocidade de crescimento** de uma função no ponto $P=(x,f(x))$.

Decorrem de nossa consideração algumas importantes caracterizações.

8. Reveja os exemplos e verifique se de acordo com os exemplos desta atividade o sinal da velocidade está associado ao crescimento da função. Ou seja, se podemos identificar pelo sinal da velocidade de crescimento quando uma função é crescente ou quando é decrescente? Se afirmativo, como?
9. A inclinação do gráfico da função está relacionada com a velocidade de crescimento. Como é esta relação?
10. Como são os gráficos das funções que têm velocidade de crescimento constante?

Importante: Para responder ao próximo item considere, por exemplo, **a** = 0 e $\varepsilon=1/2$ na função f_3, ou a = -1 ou 0 ou 1 com mesmo ε na função f_4.

11. Quando uma função tem velocidade de crescimento nula (zero) para um ponto de abscissa **a**, o que podemos observar (considere os exemplos desta atividade) com respeito ao crescimento da função nos intervalos $]a-\varepsilon,a[$ e $]a,a+\varepsilon[$ sendo ε um número real positivo arbitrário, porém próximo de zero? (Se necessário use desenhos que sirvam tanto de ilustração como de exemplo para sua argumentação).
12. E quanto aos possíveis sinais da velocidade de crescimento dessa função nos mesmos intervalos $]a-\varepsilon,a[$ e $]a,a+\varepsilon[$?

    Definição. Um valor $f(x_1)$ é dito um extremo de uma função quando em x_1 o comportamento de crescimento da função se altera. Ou seja, quando nos intervalos $]x_1-\varepsilon,x_1[$ e $]x_1,x_1+\varepsilon[$ a função tem comportamentos de crescimento diferentes.

13. Identifique, quando existir os valores extremos das funções de 1 a 7.
14. Quando função f é decrescente para todo o conjunto dos números reais esta pode assumir algum valor extremo?
15. E se estiver definida no conjunto $[a,b]$ pode assumir algum valor extremo? Se afirmativa, que valor será esse? (Ilustre se necessário)

Antes de responder a questão 17 a seguir selecione e experimente novamente o exemplo 8 da atividade fazendo n = 8.

16. O mesmo ocorre para f se isso for verdade apenas em um intervalo $[a,b]$? E num intervalo $]a,b[$? (Dica: Observe que no exemplo 8 a função não está definida para $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in □$.)

17. Faça um texto descrevendo com suas palavras como identificar:
    (a) quando uma função é crescente ou decrescente conhecendo o seu gráfico e/ou a velocidade de crescimento.
    (b) os extremos de uma função quando conhecido seu gráfico ou os intervalos onde a função é crescente ou decrescente.

Tabela item 4

Função	**No subconjunto do domínio**	**Este intervalo se apresenta na cor**	**Sinal da Veloc. de cresc.**	**No Subconjunto do domínio**	**Este intervalo se apresenta na cor**	**Sinal da Veloc. de cresc.**
f_1		vermelha				
f_2	□					
f_3	$]\quad,0[$			$]0,\quad[$		
f_4	$]\quad,-1[$			$]-1,\quad[$		
	$]\quad,1[$			$]1,\quad[$		
f_5	$]-2,\quad[$					
f_6	$]\quad,0[$			$]0,\quad[$		
	$]2{,}36,\quad[$					
f_7	$]-3{,}14\ ,\ 3{,}14[$			$]3{,}14\ ,\ 6{,}28[$		

Atividade 2 – **Injetividade, Sobrejetividade e Bijeção.**

1. Construa o gráfico das funções abaixo e, em cada caso, verifique ao movimentar a reta **s** pelo ponto **P** quantas vezes esta reta o intercepta.

a) $f(x)=x^2-5x+6$	b) $f(x)=x^4-5x^2+4$
c) $f(x)=x^3-3x+4$	d) $f(x)=2x+2$
e) $f(x)=\log(x)+1$	f) $f(x)=-x$
g) $f(x)=-\log\left(\frac{x}{3}\right)+2$	h) $f(x)=2\cdot(0{,}95)^x$
i) $f(x)=5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x+1$	j) $f(x)=\frac{2x^4}{1+e^x}+3$

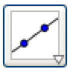
2. O que podemos dizer das imagens dos números 1 e 4 de uma função *f* sabendo que a reta **s** interceptou o gráfico dessa função nos pontos de abscissas 1 e 4? (experimente o subitem (a) do item anterior)
3. Reveja o subitem (b) do item 2 e responda quantos são os elementos do domínio que têm imagem 4 quando uma reta **s** (y = 4) intercepta o gráfico dessa função f três vezes.
4. Quando o gráfico de uma função *f* for interceptado duas vezes por uma reta **s** podemos afirmar que há dois elementos do domínio com mesma imagem? Dê um exemplo ou contraexemplo que justifique sua resposta.
5. Uma função é dita injetiva se todos os elementos do domínio têm imagens diferentes, ou seja, se para quaisquer $x_1 \neq x_2$ do domínio temos que $f(x_1) \neq f(x_2)$. Quais são as funções do item 2 que são injetivas? **Justifique com argumentos geométricos e algébricos suas respostas.**
6. Lembrando que uma função é dita sobrejetiva quando os conjuntos contra domínio e imagem coincidem, determine o contra domínio de cada uma das funções do item 2 para que aquelas funções sejam sobrejetivas. **Justifique com argumentos geométricos e algébricos suas respostas.**
7. Sabendo que uma função é dita uma bijeção quando é injetiva e sobrejetiva quais são as funções do item 2 que são bijeções?
8. Um professor disse a outro que uma função é uma bijeção se por qualquer ponto M de seu gráfico existirem as retas r e s, tais que r é perpendicular ao Eixo Ox e s é perpendicular ao Eixo Oy e ambas possuem apenas o ponto M como interseção com o gráfico dessa função. Construa um ponto sobre o gráfico das funções do item 2 e verifique se o critério desse professor está correto. No caso afirmativo **explique este argumento geométrico de identificação de uma função bijetora.**

Atividade 3 – **O Gráfico da Função Inversa**

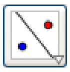
1. Movimente com o mouse o seletor e siga as instruções que aparecerão durante o movimento. Pare sempre que for solicitado, lendo os textos e fazendo as devidas observações junto à figura que se transforma com o movimento do seletor.
2. Agora que você já viu como são as coordenadas dos Pontos A e C, e como estas se relacionam, considere a definição abaixo, e siga as etapas da atividade.

Definição. Dados uma reta r e um ponto P, dizemos que P' é um ponto simétrico à P com relação à reta r se são iguais às distâncias de P e P' à reta r a reta PP' é perpendicular à r.

3. Use a definição acima, e as propriedades do quadrado ABCD para mostrar que, A e C são pontos simétricos com relação à reta r.
4. O fato dos pontos $A=(x_A,y_A)$ e $C=(y_A,x_A)$ serem simétricos com relação a uma reta r é um caso particular, que só vale se esta reta é a reta de equação y = x. Para mostrar que isto é verdade faça seguinte construção:

   (i) Construa com a ferramenta  uma reta, e com a ferramenta  um ponto.

   (ii) Renomeie a reta para "s" e o ponto para "P".

   (iii) Com a ferramenta  construa o simétrico P' (renomeie se necessário) de P com relação à reta s.

   (iv) Exiba os rótulos de P e P'.

   (v) Compare as coordenadas de P e P' e responda se elas têm mesma relação que as de A e C do início da atividade.

5. Movimente livremente a reta r e o ponto P para verificar que dois pontos simétricos com relação a uma reta têm coordenadas trocadas, ou seja, $x_P = y_{P'}$ e $y_P = x_{P'}$, se, e somente se, a reta tem equação y = x.
6. Façamos uma observação: Até o momento apresentamos de duas maneiras um ponto simétrico com relação a uma reta r. No caso geral o ponto simétrico de um ponto P com relação a essa reta é obtido tomando-se na perpendicular à r que contém P, o ponto P' cuja distância coincide com a de P à r. No caso particular apresentado no início da atividade o ponto C simétrico de A foi construído como o quarto vértice de um quadrado que tinha A como vértice e dois outros vértices na reta de equação y = r. Verificamos no item 3, que nessa construção C satisfaz as condições da definição de ponto simétrico. As perguntas que precisamos responder são: Por que C foi construído

assim? Que propriedade entre C e A ganhamos nesta construção? Esta propriedade é geral?

7. Descreva uma maneira de obter o gráfico da função inversa de uma função f sabendo que esta admite tal inversa e conhecendo-se apenas o seu gráfico. Faça sua descrição de duas maneiras: primeiro sem utilizar o software e depois o utilizando.
8. Com auxílio do software, construa a reta r de equação y = x, o gráfico das funções abaixo e em cada uma delas um ponto P_i ($i =$nome da respectiva função) e seu simétrico P_i' com relação à reta r. Construa o lugar geométrico LG_i de P_i' com relação à P_i.
9. Movimente P_i e verifique que seu simétrico percorre o lugar geométrico LG_i construído no item 9. Com base nos itens anteriores sabendo que P_i têm coordenadas $\left(x, f\left(x\right)\right)$ determine as coordenadas de P_i'.
10. O lugar geométrico LG_i é a curva obtida pela reflexão da curva do gráfico da função f_i. Quando podemos dizer que esta curva é o gráfico da função inversa da função f_i?
11. Quais os lugares geométricos do item 9 que são gráficos das respectivas funções que os originaram?
12. Faça um resumo explicitando uma forma de determinar o gráfico da função inversa de uma função quando esta admite uma função inversa. Justifique ainda a seguinte afirmativa: “Para uma função qualquer dado o seu gráfico é sempre possível determinar uma curva simétrica a este gráfico, mas nem sempre esta curva é o gráfico da função inversa.”

4. Resultados Esperados

Esperamos que o minicurso ofereça aos participantes a oportunidade de criar suas próprios instrumentos para o ensino de função considerando o enfrentamento aos obstáculos epistemológicos e as potencialidades do software GeoGebra.

5. Referências

BALLEJO, C. C. O uso de software no ensino de funções polinomiais no ensino médio. Trabalho de conclusão de curso (licenciatura em Matemática) UFRGS. Porto Alegre, 2009

BAZZO, B. O uso dos recursos das novas tecnologias, planilha de cálculo e o *GeoGebra* para o ensino de função no ensino médio. IX Congresso Nacional de Educação – III Encontro Sul Brasileiro de Psicopedagogia, 2009.

BOTELHO, L. M. L. Funções Polinomiais na Educação Básica: Uma Proposta. Monografia (Especialização em Matemática) - Instituto de Matemática, UFF, 2005.

REZENDE, W.M. Dos Escolásticos às Novas Tecnologias: Uma contribuição para o Ensino da Função Quadrática. VI Seminário de Pesquisa em Educação Matemática do Estado do Rio de Janeiro, 2008a.

__________. Galileu e as Novas Tecnologias no Estudo das Funções Polinomiais no Ensino Básico. IV Colóquio de História e Tecnologia no Ensino da Matemática, Rio de Janeiro, 2008b.

_________. O Ensino de Cálculo: Dificuldades de Natureza Epistemológica. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade de São Paulo. São Paulo, 2003a.

__________. Proposta de emersão das idéias básicas do Cálculo no ensino básico de matemática. Projeto de Pesquisa. Universidade Federal Fluminense, Pró-Reitoria de Pesquisa e Pós-Graduação, Niterói, 2003b.

__________. Um Mapeamento do Ensino de Funções Reais no Ensino Básico. IX – Encontro Nacional do Ensino Médio (Comunicação Científica). Belo Horizonte, 2007.

SIERPINSKA, A. On understanding the notion of function. In: Dubinsky, E.; Harel, G. (Org.) The concept of function: Elements of Pedagogy and Epistemology. Nova York: Notes And Reports Series Of The Mathematical Association Of America, 1992. v. 25, p. 25-58.

SOUZA, A. R.; SILVA, G. A. Desenvolvimento e analise de uma metodologia para o ensino de função quadrática utilizando os softwares “parábola” e “oficina de funções”. Cempem, FE, Unicamp, jan.Jun/2006, v. 14 – n. 25.