RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS E INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Geraldo Claudio Broetto
UFES/IFES
gbroetto@gmail.com

Messenas Miranda Rocha
UFES/IFES
messenas@yahoo.com.br

Vânia Maria Pereira dos Santos-Wagner
UFES/UFRJ
profvaniasantoswagner@gmail.com

Resumo
Neste texto trazemos resultados de dois estudos de natureza qualitativa sobre resolução de problemas e investigação matemática em aulas de matemática. Na primeira pesquisa envolvemos 50 alunos de 8ª série de ensino fundamental em atividades rotineiras e não rotineiras de resolução de problemas. Concluímos que eles podem aprender a resolver problemas e melhorar seus desempenhos escolares, principalmente aqueles alunos com rendimento considerado fraco ou médio pelo professor. Na segunda investigação participaram 30 estudantes de 1º ano de ensino médio. Exploramos atividades de resolução de problemas e natureza investigativa. Os dados dos dois estudos foram coletados através de testes, questionários e tarefas. O caráter aberto das investigações surpreendeu os estudantes de ensino médio na medida em que provocou dificuldades para iniciar as mesmas. Aprendemos que é necessário incorporar atividades rotineiras de resolução de problemas e investigação matemática em aulas.

Palavras Chave: Matemática; Resolução de Problemas; Atividades Investigativas.

1. Introdução

Atualmente a pesquisa em educação matemática mostra o potencial que existe para aprendizagem e ensino de matemática ao conciliarmos na rotina escolar tarefas de resolução de problemas, de investigações matemáticas e de formulação de problemas (SINGER, ELLERTON, CAI, LEUNG, 2011). Alguns autores mostram que resolver problemas precisa se tornar algo natural e rotineiro para os estudantes em aulas de matemática se quisermos incorporar o potencial dos problemas para os processos de ensino, aprendizagem e avaliação em matemática (BRASIL, 1998, 1999; BROETTO, 2004; ONUCHIC, 1999; POLYA, 1995/1945; ROCHA, 2009; SANTOS, 1997; SANTOS-WAGNER, 2008). Ponte, Oliveira, Cunha e Segurado (1998) afirmam que é importante para o aprendizado matemático introduzir tarefas investigativas de caráter mais aberto que problemas rotineiros e desafiadores. Os autores justificam essa importância porque os alunos precisam observar, propor conjecturas e validar as mesmas com argumentos matemáticos para que possam experimentar o gosto em fazer matemática como matemáticos.

Organizamos o texto em quatro partes. Iniciamos com reflexões teóricas sobre resolução de problemas e investigação matemática. Em seguida, trazemos duas pesquisas para exemplificar os argumentos citados e mostrar como reagiram alunos de faixas etárias semelhantes de duas turmas de 8ª série (atual 9º ano) de ensino fundamental e alunos de uma turma de 1º ano do ensino médio (BROETTO, 2004; ROCHA, 2009). Finalizamos com considerações a respeito dos dois estudos.

2. A resolução de problemas

> A resolução de problemas ainda é, na minha opinião, a espinha dorsal do ensino secundário e me constrange que algo tão evidente precise ser ressaltado (POLYA, 1995/1945, p. 13).

Em 1977, o NCTM (National Council of Teachers of Mathematics) e o NCSM (National Council of Supervisors of Mathematics) já indicavam as novas diretrizes para a década seguinte. Para o NCSM, *aprender a resolver problemas é a principal razão para estudar matemática* (LESTER, 1989, p. 2) e, para o NCTM, *resolução de problemas deve ser o foco das escolas no ensino da matemática na década de 80* (LESTER, 1989, p. 2). Para a década de 90, a indicação do NCTM não mudou muito: *resolução de problemas deve ser o foco central do currículo de matemática* (LESTER, 1989, p. 3). Essas determinações favoreceram a realização de muitos estudos sobre resolução de problemas (SCHOENFELD, 1992). Nos anos 80 os trabalhos estavam mais direcionados para o ensino de estratégias de resolução de problemas, na linha de Polya. Até a década de 1980, ensinar a resolver problemas se caracterizava em apresentar problemas depois de ensinar conceitos matemáticos. Talvez por uma leitura superficial do livro "A arte de resolver problemas" de George Polya (1995/1945), muita ênfase foi dada no ensino das quatro fases de resolução de um problema proposta pelo autor (compreender o problema, estabelecer um plano para resolver o problema, executar o plano fazer um retrospecto da resolução). A resolução de problemas era vista dessa forma como um objetivo ou um fim para o ensino de matemática. Posteriormente, essa passou a ser vista como uma metodologia de ensino, isto é, deixou de ser um fim para ser um dos meios pelo qual se deveria ensinar matemática. Para Onuchic (1999), a intenção de ensinar matemática por meio de resolução de problemas é

> de passar de um papel de atividade limitada de engajar os alunos, depois da aquisição de certos conceitos de determinadas técnicas, para ser tanto um meio de adquirir novo conhecimento como um processo no qual pode ser aplicado àquilo que previamente havia sido construído (p. 208).

Para Santos (1994, 1995), Lester (1994), Cai (2003) e outros pesquisadores, aprender matemática via problemas não descarta ensinar matemática para resolver os mesmos no final de aulas nem ensinar paralelamente técnicas e estratégias de resolução de problemas. Ou seja, para estes autores ensinar matemática envolve resolver problemas sempre na rotina escolar no início, durante e ao final das aulas de acordo com os objetivos de ensino de matemática e domínio de conteúdos matemáticos do professor. Portanto, cabe ao professor selecionar problemas adequados que possibilitem a construção de outros conceitos matemáticos. Assim, professor e alunos sistematizam no final os conceitos matemáticos que foram construídos e compreendidos com a tarefa de resolver estes problemas se desejam ensinar matemática via resolução de problemas (SANTOS, 1997; SANTOS-WAGNER, 2008). Este olhar diferenciado para a resolução de problemas como um meio para ensinar e aprender matemática já vinha sendo trabalhado desde os anos 80 por alguns pesquisadores e professores em sala de aula em outros países. Beatriz D' Ambrósio (1989) já comentava que:

> ... a resolução de problemas é encarada como uma metodologia de ensino em que o professor propõe ao aluno situações problemas caracterizadas por investigação e exploração de novos conceitos. Essa proposta, mais atual, visa à construção de conceitos matemáticos pelo aluno através de situações que estimulam a sua curiosidade matemática (p. 16).

Além desse foco, resultados de pesquisas sobre resolução de problemas apontavam para a necessidade de considerar o conceito de metacognição, que trata de como selecionamos e controlamos estratégias adotadas na realização de alguma tarefa complexa como a resolução de um problema (SANTOS, 1994, 1995; SCHOENFELD, 1992). Para Santos (1994) a metacognição envolve o pensar sobre o pensamento e o gerenciar do mesmo. A metacognição também auxilia a compreensão de conceitos matemáticos e a aquisição de processos mais complexos de raciocínio, pois oferece ao indivíduo possibilidades de ser desafiado a construir (e/ou reconstruir) seu próprio conhecimento e analisar e gerenciar os mesmos. Então, quando buscamos conscientemente analisar e avaliar um plano que utilizamos na resolução de um determinado problema, ou mesmo as estratégias usadas na resolução, nós estamos envolvidos em atividades e ações metacognitivas. Estes processos são complexos e nem todas as pessoas desenvolvem os mesmos naturalmente e precisam ser ensinados (GAROFALO; LESTER, 1985; SANTOS, 1994, 1995; SCHOENFELD, 1992).

Um dos grupos de pesquisa pioneiros sobre resolução de problemas no Brasil é o GTERP – Grupo de Trabalho e Estudos em Resolução de Problemas da Unesp-Rio Claro/SP (ONUCHIC, 1999; ONUCHIC; ALLEVATTO, 2009; ONUCHIC; ALLEVATO, 2011). O foco atual de interesse do GTERP é denominado de *metodologia de ensino-aprendizagem-avaliação através da resolução de problemas*. Essa denominação foi criada pelo próprio grupo e pretende ser uma atualização do anteriormente defendido *ensino-aprendizagem através da resolução de problemas*. Essa mudança foi motivada pelo reconhecimento de que a avaliação deve ser contínua e formativa, além de ser incorporada mais ao desenvolvimento de processos do que um julgamento de resultados obtidos com processos (ONUCHIC; ALLEVATO, 2011). Segundo a concepção de ensino-aprendizagem-avaliação desenvolvida pelo GTERP, chamada também de forma pós-Polya de ver a resolução de problemas,

> pretende-se que, enquanto o professor ensina, o aluno, como um participante ativo, aprenda, e que a avaliação se realize por ambos. O aluno analisa seus próprios métodos e soluções obtidas para os problemas, visando sempre à construção de conhecimento (ONUCHIC e ALLEVATO, 2011, p. 81).

Esse olhar integrado para ensino-aprendizagem-avaliação já vinha sendo defendido por outros pesquisadores há algum tempo (LESTER, 1989; SANTOS, 1994, 1995, 1997). De acordo com esses pesquisadores apenas quando ocorrem mudanças nos tipos de aulas, papéis de professor e alunos em sala, tipos de tarefas matemáticas e procedimentos de avaliação é que existem possibilidades concretas de que ensino, aprendizagem e avaliação sejam integrados e interligados, onde um interfere diretamente no outro. Professores precisam usar outros procedimentos avaliativos além de provas e testes tradicionais. Porque todos na sala de aula, professor e alunos, têm conhecimentos, direitos e responsabilidades de questionar e apreciar as tarefas desenvolvidas nos processos de ensinar, aprender e avaliar. Ou seja, é necessário que o professor compreenda e aceite que ao avaliar se seus alunos aprenderam ou não, que ele está também avaliando se ele ensinou ou não matemática. Portanto, ao avaliar a aprendizagem dos alunos, está se avaliando também o ensino do professor e os procedimentos avaliativos usados.

3. Atividades de investigação matemática

As investigações matemáticas são parte do que alguns autores designam por "actividade matemática", o que corresponde a identificar aprender Matemática com fazer

Matemática (PONTE; OLIVEIRA, CUNHA, SEGURADO, 1998, p. 15, grifos dos autores). Eles seguem dizendo que:

> Um conceito muito próximo de investigação matemática é o de resolução de problemas. Os dois termos são usados muitas vezes de modo indistinto. Ambas as noções se referem a processos matemáticos complexos e ambas envolvem actividade fortemente problemática. A resolução de problemas envolve uma grande variedade de tarefas, tanto de cunho mais fechado como mais aberto, tanto relativas a situações puramente matemáticas como referentes a situações da vida real. "Actividades investigativas" ou "investigações matemática" designam, no contexto deste projeto, um tipo de actividade que dá ênfase a processos matemáticos tais como procurar regularidades, formular, testar, justificar e provar conjecturas, refletir e generalizar. São actividades de cunho aberto, referentes a contextos variados (embora com predominância para os exclusivamente matemáticos) que podem ter como ponto de partida uma questão ou uma situação proposta quer pelo professor, quer pelos alunos (PONTE; OLIVEIRA; CUNHA; SEGURADO, 1998, p. 15).

Durante a realização de uma aula com tarefas de investigação devemos trabalhar basicamente em três etapas: i) inicia-se a atividade apresentando à turma oralmente e por escrito a tarefa; ii) pedimos aos alunos que façam observações livres e as registrem individualmente ou em pequenos grupos e iii) coordenamos uma discussão com a turma sobre os resultados e conclusões obtidas. Os autores sinalizam que é preciso planejar essas aulas para acontecerem em aulas de horário duplo, pois uma hora aula de 40 ou 50 minutos torna-se inapropriada para que as três etapas sejam trabalhadas. Em aulas de investigação o papel do professor como mediador é fundamental, pois segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2005):

> Existe, por vezes, a ideia de que, para que o aluno possa, de fato, investigar, é necessário deixá-lo trabalhar de forma totalmente autônoma e, como tal, o professor deve ter somente um papel de regulador da atividade. No entanto, o professor continua a ser um elemento-chave mesmo nessas aulas, cabendo-lhe ajudar o aluno a compreender o que significa investigar e aprender a fazê-lo (p. 26).

Portanto, devemos ressaltar a importância do papel do professor como mediador nessa fase inicial quando a turma tem pouca ou nenhuma experiência com essas atividades investigativas. Essas tarefas são distintas de atividades regulares de aulas e livros didáticos. Fora isso, elas têm um caráter aberto, e exigem posturas diferenciadas de professor e alunos durante o desenvolvimento da mesma e nos diálogos entre professor e alunos. Enfim, *investigar é procurar conhecer o que não se sabe* (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2005, p. 13). E alunos precisam ser motivados a trabalhar com estas tarefas. Essas atividades têm como características que: i) na formulação e apresentação da situação problemática não está explicito o caminho a seguir ou resposta a encontrar; ii) as hipóteses levantadas pelos alunos poderão gerar uma nova problemática; iii) deverão ser atividades que sejam desafiadoras e que possam despertar o interesse dos alunos; iv) devem proporcionar nos alunos a experiência da descoberta. Ou seja, aqui também seguimos argumentos sugeridos anteriormente por Polya (1995/1945) e outros pesquisadores. Durante a execução dessas tarefas o aluno passa a compartilhar as suas hipóteses e desenvolve uma característica muito importante que é a de se comunicar matematicamente. Segundo Love[1] (1988, citado por PONTE; OLIVEIRA; CUNHA; SEGURADO, 1998, p. 15), nesse tipo de atividade os alunos devem ter a oportunidade de: *a) identificar e iniciar os seus próprios problemas; b) expressar as suas próprias ideias e desenvolvê-las ao resolver problemas; c) testar suas ideias e hipóteses de acordo com experiências relevantes; d) defender racionalmente as suas ideias e conclusões e submeter as ideias dos outros à critica ponderada.*

As atividades investigativas matemáticas permitem que o aluno desenvolva e faça matemática de fato como os matemáticos, por serem abertas e diferirem de tarefas usuais como exercícios, problemas rotineiros e não rotineiros. Portanto, essas se caracterizam, igualmente, pelo estímulo que fornecem ao aluno para este justificar e provar as suas afirmações, explicitando matematicamente as suas argumentações perante os seus colegas e o professor. As capacidades de argumentação e prova são dois aspectos destacados da capacidade de comunicar matematicamente (PONTE; OLIVEIRA; CUNHA; SEGURADO, 1998). Enfim, *o aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. Esse é, precisamente, um dos aspectos fortes das investigações* (PONTE; BROCARDO; OLIVEIRA, 2005, p. 23).

É importante que o professor saiba conduzir as etapas de uma aula de investigação matemática e mostrar aos alunos que várias outras questões podem surgir a partir das observações que eles realizam. Ou seja, o professor tem que mostrar abertura e flexibilidade em seus procedimentos de ensino. Com este comportamento e atitude o professor estará propiciando aos alunos perceberem que nem sempre em matemática tudo está pronto e acabado, e estará fornecendo outros olhares sobre a disciplina de matemática para eles.

4. Contexto do estudo sobre resolução de problemas em turmas de 8ª série

[1] LOVE, E. Evaluating mathematical activity. In D. Pimm (ed.), **Mathematics, teachers and children**: a reader. London: Hodder & Stoughton, 1988, p. 249-262.

A coleta de dados da pesquisa foi realizada no período de outubro a dezembro de 2003, tendo alunos de duas turmas de 8ª série do Ensino Fundamental e seus respectivos professores de matemática como sujeitos de pesquisa. Cinquenta e um alunos participaram da pesquisa, sendo vinte e cinco de uma turma da escola CEOA, localizada no município de Vila Velha/ES, e vinte e seis de uma turma da escola EMPG-UFES, localizada no município de Vitória/ES. O trabalho investigou se existia relação entre a capacidade de resolver problemas de matemática de alunos de duas turmas da 8ª série do Ensino Fundamental e o desempenho escolar dos mesmos nessa disciplina. Além disso, planejamos e realizamos uma intervenção baseada no conceito de metacognição, e na hipótese de que os alunos, ao participarem desse processo de ensino, melhorariam seu desempenho na resolução de problemas não rotineiros. Duas pesquisas serviram como referência e inspiração: Lester (1989) e Schoenfeld (1992), além de Polya (1945/1995). Antes da instrução, realizamos entrevistas com os professores de matemática das duas turmas e aplicamos um teste contendo apenas problemas rotineiros para os alunos. Pedimos a esses professores que classificassem o rendimento escolar em matemática dos seus alunos utilizando os conceitos “fraco”, “médio”, “bom” e “excelente” e comparamos essas respostas com o resultado obtido no referido teste. Observamos uma forte relação entre a capacidade de resolver problemas rotineiros com a classificação obtida junto aos professores (BROETTO, 2004; 2012).

Em seguida ao teste contendo problemas rotineiros também foi aplicado um teste contendo apenas problemas não rotineiros, antes do processo de instrução. Durante oito aulas, foram abordadas técnicas para resolução de problemas, e os alunos foram estimulados a trabalharem em equipe na resolução de problemas não rotineiros. Em seguida, aplicamos um novo teste para avaliar a eficácia da instrução em termos da melhoria do rendimento dos alunos. Observamos que alguns alunos melhoraram seu desempenho na resolução de problemas não rotineiros após a instrução, principalmente aqueles considerados fracos ou médios pelo professor. O processo de instrução para resolver problemas não rotineiros com ênfase no desenvolvimento da metacognição (LESTER, 1989; SCHOENFELD, 1992) foi produtivo para todos os alunos, em especial para aqueles considerados fracos ou médios pelo professor. Comparando o resultado obtido nos três testes aplicados, verificamos que os alunos que mais se beneficiaram do processo de instrução foram os alunos considerados fracos ou médios pelo professor.

Outra possível leitura dos dados obtidos na pesquisa é que alunos considerados fracos ou médios, quando avaliados por meio de problemas não rotineiros seriam beneficiados em relação a um processo de ensino-aprendizagem-avaliação baseado em problemas rotineiros. Além de uma melhoria em termos de notas, também podemos destacar uma melhoria qualitativa, principalmente no que diz respeito a arriscar uma resolução. Percebemos que os problemas não rotineiros provocaram na maioria dos alunos, inclusive naqueles considerados fracos ou médios, uma vontade de pelo menos tentar resolver o problema, o que será exemplificado em dois exemplos. No primeiro exemplo, temos o aluno U1, considerado médio pelo professor, tentando resolver o problema abaixo:

Um caracol empreendeu a subida de uma pilha de dez tijolos. Ele consegue subir quatro tijolos em uma hora. Todavia, como o esforço é muitíssimo penoso, tem de dormir a hora seguinte, durante a qual escorrega três tijolos. De quanto tempo necessitará para chegar ao topo da pilha?

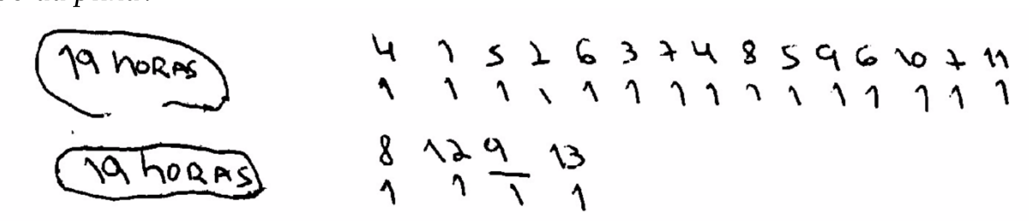

Figura 1 - Resolução do aluno U1

Notamos que o aluno entendeu a questão, adotou uma estratégia adequada, mas falhou apenas na resposta final. Obteve 19 horas quando a resposta correta é 13 horas. Em uma escala de 0 a 4 (Escala de Rasch. Mais detalhes, ver Broetto, 2004), atribuímos sua nota como 3. No segundo exemplo, trazemos o aluno I1, também considerado médio pelo professor, apresentando a seguinte tentativa para o problema abaixo:

Esta manhã, após minhas aulas, eu desci a escada, pois o elevador estava quebrado. Eu já havia descido 7 degraus quando vi o professor Zizoloziz começando a subir a escada. Continuei no meu passo usual, cumprimentei o professor quando ele passou e, para minha surpresa, faltando 4 degraus para eu acabar de descer, o professor tinha chegado ao topo da escada. "Enquanto eu desço um degrau, ele sobe dois, pensei". Quantos degraus tem a escada?

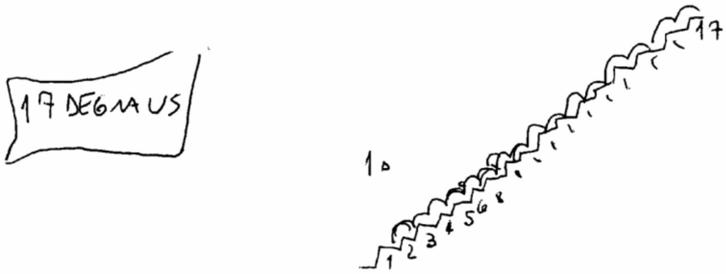

Figura 2 - Resolução do aluno I1

Apesar da estratégia adotada pelo aluno não tê-lo favorecido chegar à resolução correta, consideramos o esboço de uma tentativa um grande avanço para um aluno considerado médio, principalmente pela grande dificuldade apresentada pelo problema, que apenas um aluno conseguiu resolver corretamente (a resposta é 22 degraus), e pelo fato dele ter deixado em branco grande parte das questões do teste contendo apenas problemas rotineiros. Em relação à duração do processo de instrução e à convivência com as turmas como um todo, consideramos que, apesar de breves, os encontros mostraram-se muito promissores, e nos fizeram acreditar que é possível incluir muitos daqueles alunos que são excluídos por um sistema de avaliação cuja forma e conteúdo são tradicionais. Observamos também que o fator "novidade" pode ter uma influência nos resultados obtidos. Pesquisas futuras poderão avaliar se os resultados se mantêm quando a exposição aos problemas não rotineiros é mais longa, ou encontrar um ponto de equilíbrio entre problemas rotineiros e problemas desafiadores.

5. Contexto do estudo sobre atividades de investigação matemática em turma de 1º ano de ensino médio

Essa pesquisa ocorreu durante nove meses em 2008 em uma turma de ensino médio de escola da rede estadual no município de Baixo Guandu (ES). Trabalhamos com dois professores que atuaram nessa turma com 30 estudantes. Conduzimos uma intervenção pedagógica em aulas com atividades de resolução de problemas e de natureza investigativa para explorar conceitos matemáticos. Aqui focalizamos nas estratégias de um estudante nessas atividades.

Realização de uma tarefa de investigação matemática. Durante as aulas de maio de 2008 em que trabalhamos com inequações do 2º grau, verificamos que alguns estudantes erravam exatamente as inequações, no momento em que tinham de desenvolver os produtos notáveis, como, por exemplo, a inequação do tipo $(x+4)^2 \geq 0$. Percebemos que boa parte deles apresentava como solução $x^2 + 16 \geq 0$, que é um resultado diferente do resultado correto do produto notável. Conversando um pouco com eles sobre a resolução desses produtos notáveis, constatamos que muitos deles não lembravam como resolviam esses cálculos algébricos. Foi a partir disso que tivemos a ideia de realizar uma segunda tarefa de investigação matemática com a turma. Pensamos em investigar as relações numéricas entre linhas e colunas do triângulo de Pascal. Queríamos que eles observassem que existem relações entre as linhas desse triângulo e os coeficientes numéricos dos produtos notáveis. Encontramos no trabalho de Camargo (2006) uma experiência com alunos de 8ª série com atividade de natureza investigativa sobre o triângulo de Pascal. Assim, propusemos à turma esta segunda tarefa de investigação matemática. Escrevemos no quadro a relação a seguir e propusemos aos alunos que verificassem a relação entre os coeficientes numéricos dos produtos notáveis e as linhas correspondentes do triângulo de Pascal.

Produtos Notáveis	*Triângulo de Pascal*
$(a+b)^0 = 1$	1
$(a+b)^1= a + b$	1 1
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$	1 2 1
$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2b + 3\,ab^2 + b^3$	1 3 3 1

A ideia era despertar nesses alunos a curiosidade e incentivá-los a buscar relações entre esses números que estavam dispostos em forma de um triângulo. As observações a seguir foram registradas pelo aluno A13 e foram compartilhadas com a turma, como é sugerido pelos pesquisadores que usam atividades investigativas citados neste texto:

a) Na segunda coluna há uma sequência de números de 1 em 1;

b) Os números que estão nas linhas começando do 1 ao 14641 são as potências do número 11, veja: $11^0=1$ $11^1= 11$ $11^2= 121$ $11^3=1331$ e $11^4=14641$;

c) A primeira coluna repete sempre o número 1, e na última transversal a direita também aprecem somente número 1;

d) Na segunda transversal há uma sequência de 1 em 1 em sequência;

e) As transversais vão se repetindo nas colunas em número e ordem.

Figura 3 - Resolução do aluno A13

f) Há uma soma dos números acima para obtermos os números abaixo.

Justificando o processo de construção das linhas. 1) Como podemos escrever uma linha seguinte, a partir dos números da linha anterior?

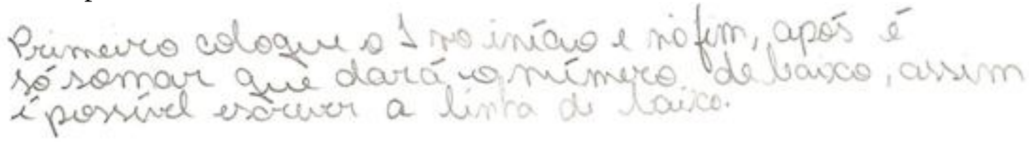

Figura 4 - Resolução do aluno A13

Generalizando uma conjectura. 2) Procure estabelecer uma relação (ou fórmula) para encontrar a soma de qualquer linha desse triângulo.

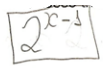

Figura 5 - Resolução do aluno A13

Verificamos que algumas das observações do aluno A13 são semelhantes às de outros alunos no momento em que ele relata sobre a localização do 1 no triângulo, e quando efetua algumas somas para projetar os elementos de uma outra linha. Gostaríamos de considerar uma observação bem criativa desse estudante, quando relata que de 1 ao 14.641 são as potências do número 11. Acreditamos que alguns estudantes começaram a ter um olhar mais criterioso, desenvolveram algumas observações que não são de alunos que simplesmente buscam informações simples, mas sim de quem conseguia encontrar padrões. Esse fato evidencia que o estudante A13 já estava desenvolvendo um olhar mais crítico, quando realizou essa atividade investigativa no triângulo de Pascal na procura de regularidades numéricas. Porém, quando tentou justificar a formação da linha seguinte do triângulo, em que escreveu "*Primeiro coloque o 1 no início e no fim, após é só somar que dará o número de baixo, assim é possível escrever a linha de baixo*", ele não deixou claro que seria a soma dos números da linha anterior. Contudo, quando recorremos à figura acima, compreendemos que ele estava dizendo que seria a soma dos números acima. No momento em que o aluno A13 tentou estabelecer uma relação para encontrar a soma dos elementos de qualquer linha desse triângulo, ele simplesmente escreveu a fórmula sem nenhuma justificativa. Cremos que ele fez isso porque o enunciado em questão dizia que poderia ser simplesmente uma fórmula. Pedimos para que ele tentasse justificar, mas ele não relatou nada. Depois dos estudantes compartilharem conosco e com os colegas o que tinham observado nos números no triângulo de Pascal e respondido aos outros questionamentos, nós passamos para outra etapa de aula. Nesta fase final, mostramos para a turma as relações que existem entre os coeficientes numéricos dos produtos notáveis e as linhas correspondentes do triângulo de Pascal.

Mudanças de comportamento e aprendizagem dos alunos foram evidenciadas pelo papel diferenciado que os alunos passaram a assumir nestas tarefas investigativas, onde eles tiveram que compreender que não lhes seriam dirigidas perguntas diretas. Logo nas primeiras atividades os alunos manifestavam uma grande dependência do professor, mas conseguiram evoluir e se tornaram mais independentes em outras tarefas investigativas e atividades matemáticas rotineiras e outras com alguma abertura (ROCHA, 2009). Consideramos, portanto, que eles desenvolveram alguma autonomia em relação ao professor. Evidenciamos uma melhoria gradativa na forma de comunicar suas ideias quer seja oralmente ou por escrito. Os alunos foram adquirindo certa criatividade e destreza na procura por determinados padrões e relações numéricas.

6. Considerações finais

Se inserirmos no ensino de matemática estratégias e habilidades de resolução de problemas e de investigação matemática, isso poderá favorecer que o aluno melhore seu desempenho e sinta prazer em aprender matemática. Se as tarefas não motivam os alunos a resolvê-las, porque são exercícios repetitivos como os de aulas e livros ou são tarefas desafiadoras demais para eles, os professores precisam observar que desequilíbrios surgiram nas escolhas dessas tarefas (SANTOS, 1994, 1995, 1997). Se os professores focalizam excessivamente nos procedimentos e nas quatro fases de resolução de problemas destacadas por Polya (1995/1945) isso também fica sem auxiliar a aprendizagem dos alunos em problemas mais desafiadores e não rotineiros. Além dessas reflexões, alguns professores apontam excessivamente para os erros dos alunos ou para as respostas deixadas em branco na resolução de problemas, sem pensar nos efeitos negativos que tal atitude pode trazer para os alunos e o desejo deles de aprender matemática (GÓMEZ-CHACÓN, 2003).

7. Referências

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais** (5ª a 8ª séries): terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental – matemática. Brasília:MEC/SEF, 1998.

BRASIL, Ministério da Educação, Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros curriculares nacionais**: ensino médio. Brasília: MEC, 1999.

BROETTO, G. C. **Resolução de problemas e desempenho escolar em matemática no ensino fundamental**. 2004. 225f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Centro de Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

_______________. Resolução de problemas e desempenho escolar em matemática no ensino fundamental. In: **Anais do 3º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Fortaleza, 2012.

CAI, J. What research tell us about teaching through problem solving. In: LESTER, F. K. (ed.) **Teaching mathematics through problem solving**: Prekindergarten – Grade 6 Reston VA: NCTM, 2003, p. 241-253.

CAMARGO, R. P. **Tarefas investigativas de Matemática: uma análise de três alunas de 8ª série do ensino fundamental**. 2006. 128f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba.

D'AMBROSIO, B. S. Como ensinar matemática hoje? **Temas e Debates**, Ano II, n. 2. Brasília: SBEM, 1989, p. 15-19.

GAROFALO, J.; LESTER, F. K., Jr. Metacognition, cognitive monitoring, and mathematics performance. **Journal for Research in Mathematics Education**, 1985, 16(3), p. 163-176.

GOMEZ-CHACÓN, I. M. **Matemática emocional – os afetos na aprendizagem matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2003.

LESTER, F. K. Jr. **The role of metacognition in mathematical problem solving:** a study of two grade seven classes. School of Education, Indiana, 1989.

______________. Musings about mathematical problem-solving research: 1970-1994. **Journal for Research in Mathematics Education**, Vol. 25, No. 6, 25th Anniversary Special Issue, 1994, p. 660-675.

ONUCHIC, L. de la R. Ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V. (org.). **Pesquisa em educação matemática**: concepções & perspectivas. São Paulo: Editora UNESP, 1999, p. 199-218.

ONUCHIC, L. R.; ALLEVATO, N. S. G. Pesquisa em resolução de problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. **Bolema – Boletim de educação matemática,** v. 25, n. 41, dez/2011. Rio Claro: UNESP, 2011.

_______________. Novas reflexões sobre o ensino-aprendizagem de matemática através da resolução de problemas. In: BICUDO, M. A. V.; BORBA, M. C. (org.). **Educação matemática – pesquisa em movimento.** 3. ed. São Paulo: Cortez, 2009.

POLYA, G. **A arte de resolver problemas**. Tradução e adaptação de Heitor Lisboa de Araújo. 2ª reimpressão, 1ª ed. brasileira em 1975. (A obra foi publicada originalmente em inglês em 1945.). Rio de Janeiro: Interciência, 1995.

PONTE, J. P. da; OLIVEIRA, H.; CUNHA, M. H.; SEGURADO, M. I. **Histórias de investigações matemáticas**. Lisboa: Instituto de Inovação Educacional, 1998.

PONTE, J. P. da; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

ROCHA, M. M. **Um estudo do desenvolvimento de atividades investigativas na aprendizagem de matemática no ensino médio**. 2009. 211f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação, Centro de Educação, Universidade Federal do Espírito Santo, Vitória.

SANTOS, V. M. P. dos. Consciência metacognitiva de futuros professores primários numa disciplina de matemática e um exame de seu conhecimento, concepções e consciência metacognitiva sobre frações. **Série Documental**: Eventos, Brasília, INEP, n. 4, 2ª parte, p. 1-20, abr.1994.

_____________. Matemática – conhecimento, concepções e consciência metacognitiva de professores em formação e em exercício. In: NASSER, Lilian (ed.). **Anais do 1o Seminário Internacional de Educação Matemática do Rio de Janeiro**. Rio de Janeiro: Instituto de matemática da UFRJ, p. 117 - 132, 1995. (Trabalho apresentado neste seminário em julho de 1993).

_____________. **Avaliação de aprendizagem e raciocínio em matemática**: métodos alternativos. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, Instituto de Matemática, UFRJ, 1997.

SANTOS-WAGNER, V. M. P. dos. Resolução de problemas em matemática: uma abordagem no processo educativo. **Boletim GEPEM**, n. 53, jul./dez. 2008, p. 43-74. 2008.

SCHOENFELD, A. Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In: GROUWS, D. A. (ed.). **Handbook of research on mathematics teaching and learning**. Nova Iorque: MacMillan Publishing Company, 1992. p. 334-370.

SINGER, F. M.; ELLERTON, N.; CAI, J.; LEUG, E. C. K. Problem posing in mathematics learning and teaching: a research agenda. In: UBUZ, B. (ed.). **Proceedings of the 35th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education**, Vol. 1. Ankara, Turkey: PME, 2011, p. 137-166.