NEGOCIAÇÃO DE SIGNIFICADOS A RESPEITO DO SUBCONSTRUTO RAZÃO NA RESOLUÇÃO E DISCUSSÃO DE UM PROBLEMA

Laís Maria Costa Pires de Oliveira
Universidade Estadual de Londrina
E-mail: laís_mariaa@hotmail.com

Tânia Marli Rocha Garcia
Universidade Estadual de Londrina
E-mail: taniamarli@hotmail.com

Resumo:
Apresentamos uma análise do processo de negociação de significados a respeito da interpretação razão da representação fracionária a/b na resolução de um problema que evidenciou como os participantes de um grupo de estudos, a Comunidade de Prática de Professores que Aprendem e Ensinam Matemática - CoP PAEM, lidam com essa ideia mobilizando aspectos do raciocínio proporcional. Por meio da análise dos diálogos transcritos foi possível identificar certa dificuldade na identificação do subconstruto razão bem como na seleção de estratégias matemáticas no intuito de apresentar uma resposta coerente ao contexto do problema resolvido e discutido.

Palavras-chave: Formação de professores; Comunidade de Prática; raciocínio proporcional; número racional; subconstruto razão.

1. Introdução

Apresentamos um estudo a respeito da mobilização de aspectos do raciocínio proporcional de professores, participantes do grupo de estudos "Comunidade de Prática de Professores que Aprendem e Ensinam Matemática - CoP PAEM", na negociação de significados suscitada na resolução e discussão de um problema.

Resolver e discutir tarefas nesse grupo faz parte do conjunto de ações vinculadas a uma pesquisa de mestrado e outra de doutorado, conduzidas respetivamente pelas autoras deste artigo e orientadas pela Profa. Dra. Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino. Esses estudos são vinculados ao Projeto Educação Matemática de Professores que Ensinam Matemática[1], e buscam investigar aspectos relativos à formação continuada desencadeados

[1] Projeto desenvolvido por docentes do Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática – PECEM e do Curso de Matemática da Universidade Estadual de Londrina, financiado pelo Observatório da Educação, por meio do Edital nº. 38/2010/CAPES/INEP.

pelo diálogo entre os participantes do grupo de estudos CoP PAEM constituído como uma Comunidade de Prática, na perspectiva de Lave e Wenger (1991)[2].

Na atividade aqui relatada a intenção das pesquisadoras foi promover no grupo um processo de negociação de significados a respeito do conceito de razão representado na forma fracionária a/b, que permitisse evidenciar indícios de mobilização do raciocínio proporcional e as formas com que os participantes lidam com esse conceito.

Segue uma breve revisão sobre *Comunidade de Prática* na perspectiva da *Teoria da Aprendizagem Situada* (LAVE; WENGER, 1991), a apresentação da CoP PAEM, da tarefa em questão, inserida no conjunto de ações das pesquisas, e de algumas ideias a respeito do raciocínio proporcional, as interpretações de a/b e sua relação com o ensino de frações e números racionais, na visão de Lamon (2005) Behr, Lesh e Post (1988), Romanatto (1999). Em seguida caracterizamos a tarefa resolvida e discutida no grupo, a dinâmica de realização, e indicamos nossos apontamentos e considerações a respeito da análise das negociações de significado sobre a ideia de razão e os indícios de mobilização de aspectos do raciocínio proporcional evidenciados.

2. Comunidades de Prática e formação de professores que ensinam Matemática

A Comunidade de Prática – CoP – na perspectiva da *Teoria da Aprendizagem Situada* (LAVE; WENGER, 1991) é considerada um contexto no qual o indivíduo desenvolve *práticas* (incluindo valores, normas e relações) e *identidades* por meio da *participação* (que envolve o desejo de pertencer a comunidade, a compreensão mútua e o "progresso" ao longo de toda a trajetória de participação).

Uma CoP é um espaço no qual se pode explorar a negociação de significados como um mecanismo para aprendizagem: o significado é fundamentalmente o que a aprendizagem produz. Wenger (1998) considera significado, prática, comunidade e identidade como componentes (interligadas e mutuamente definidoras) necessárias para caracterizar a participação enquanto processo de aprender e conhecer.

O processo de aprender é o de tornar-se membro de uma Comunidade de Prática, entendido como participação em uma prática social o que implica em um *compromisso*

[2]Lave e Wenger (1991) concebem as Comunidades de Prática como uma parte integrante de sua Teoria da Aprendizagem Situada, em que a aprendizagem não é entendida como um processo individual, mas sim como um fenômeno de participação social. É por meio da participação nas práticas da comunidade que ocorrem as aprendizagens e o desenvolvimento da identidade do indivíduo.

mútuo na busca de um *empreendimento articulado* com um *repertório partilhado*, noções que configuram a ideia de Comunidade de Prática (WENGER, 1998; WENGER, McDERMOTT, SYNDER, 2002). Assim, em uma CoP deve haver um compromisso mútuo dos participantes na procura de um empreendimento comum que envolva a preocupação com a aprendizagem de todos os seus membros.

As Comunidades de Prática de professores em formação inicial ou continuada, têm se apresentado como um espaço fecundo para impulsionar a constituição da identidade profissional bem como, para explorar os processos de aprendizagem de professores e futuros professores na articulação do empreendimento de aprender para ensinar.

3. A Comunidade de Prática de Professores que Aprendem e Ensinam Matemática – CoP-PAEM

O grupo de estudos formado por pesquisadores, futuros professores de Matemática e professores de Matemática, que atuam na Educação Básica, foi intencionalmente constituído em 2011 na busca de fomentar uma Comunidade de Prática, na perspectiva apresentada por Lave e Wenger (1991), como contexto para pesquisas sobre formação de professores que buscam investigar como contextos de formação dessa natureza colaboram para a aprendizagem de professores.

As ações de intervenção no grupo são organizadas de modo que os participantes possam analisar, explicar seu raciocínio e comunicar suas ideias matemáticas enquanto propõem, formulam, resolvem e interpretam problemas em uma variedade de situações, de acordo com os interesses do grupo. Um dos temas eleitos pelos participantes como objeto de estudo foi as frações: algo considerado difícil de ensinar e comumente trabalhado com base na reprodução de algoritmos e na resolução de listas de exercícios.

O contato com as ideias de Behr, Lesh e Post (1983, 1988), Lamon (2005) e Onuchic e Alevatto (2008), a respeito das diferentes interpretações da forma fracionária a/b motivaram a resolução e discussão de problemas no grupo. Essas interpretações são pouco exploradas no ensino das frações e dos números racionais: há uma ênfase na interpretação de a/b como relação parte-todo/medida em detrimento das interpretações quociente, operador, razão, taxa e ponto decimal, o que interfere na compreensão dos alunos a respeito destes conteúdos comprometendo o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

4. Raciocínio proporcional, número racional e fração

A expressão 'raciocínio proporcional' tem sido utilizada, dentro e fora da perspectiva da Educação Matemática, para descrever uma forma de pensar que evidencia a compreensão dos conceitos básicos da Matemática e é condição essencial para o entendimento do conceito de proporcionalidade, de suas propriedades e aplicações em diferentes contextos. Lamon (2005) descreve esse raciocínio como a capacidade de lidar com situações que envolvem relações de proporcionalidade, relações de covariância e invariância, e de justificar as afirmações feitas sobre essas relações, o que pressupõe análise cuidadosa e consciente das grandezas envolvidas indo além da aplicação mecânica das relações $a/b = c/d$.

Raciocinar proporcionalmente envolve capacidades como distinguir situações que envolvem relações de natureza proporcional daquelas que não envolvem, compreender que as relações proporcionais são de natureza multiplicativa e não aditiva e resolver problemas com variados contextos, linguagens e números sem se deixar influenciar pela maneira como são apresentados, apontando para uma maior flexibilidade de raciocínio.

A representação fracionária a/b pode indicar diferentes interpretações e mesmo partindo de bases epistemológicas ou critérios diferentes para determiná-las há um consenso entre os autores de que as ideias centrais no estudo de frações e números racionais são: quociente, razão, operador e relação parte–todo. Elaboramos um quadro com descrições sucintas das interpretações de a/b segundo autores como Behr et al, Romanatto e Lamon:

Quadro 1: interpretações da forma fracionária

Interpretação da forma fracionária a/b	*Breve descrição apresentada nas pesquisas a respeito das diferentes interpretações da forma fracionária a/b*
Relação parte todo	Designa um número de partes iguais de uma unidade em relação ao total de partes iguais em que a unidade é dividida. Nesse caso *igual* significa mesmo número, tamanho, área etc., dependendo da natureza do inteiro (Lamon, 2005).
Medida	Indica distâncias de pontos na reta numérica, a partir do zero, utilizando uma unidade de medida qualquer (Lamon, 2005). Apesar dos números racionais, na forma a/b, aqui serem tratados como pontos na reta numérica, eles representam medidas de distância.
Operador	Considera os números racionais na forma a/b como um 'transformador' que ao ser operado com um conjunto ou região transforma-o em outro conjunto ou região equivalentes. (Lamon, 2005)
Quociente	É o resultado de uma divisão. A partição, o ato de fracionar um inteiro, é a ação por meio da qual as frações surgem. As partes do todo não são sobrepostas e tudo que está no conjunto ou unidade considerados está incluído em uma das partes. (Lamon 2005)

Razão	"relação expressa entre duas quantidades de uma mesma espécie." (Behr et al 1983 apud NEPEM/USF, 2004, p.56)
Taxa	"define uma nova quantidade como uma relação entre duas outras quantidades [...], não necessariamente são da mesma espécie." (Behr et al 1983 apud NEPEM/USF, 2004, p.57)
Probabilidade	"uma comparação entre chances favoráveis ou necessárias e as chances possíveis." (Romanatto, 1999, p.44)
Número	Significa um ponto na reta numérica. (Romanatto, 1999)
Decimal do número racional	"enfatiza as propriedades desse tipo de número *[racional]*, na sua representação decimal, associadas ao sistema de numeração decimal." (Behr et al. 1983 apud NEPEM/USF, 2004, p. 57).

Consideramos relevante propostas de ensino que promovam a negociação desses significados em diferentes contextos para que seja possível desenvolver aspectos do raciocínio proporcional dotando alunos e professores da capacidade de desenvolver estratégias e aplicar relações que vão além da reprodução mecânica de fórmulas.

5. A resolução e discussão da tarefa

A tarefa, com quatro problemas adaptados do texto "When can you meaningfully add rates, ratios and fractions?" de Simon Mochon (1993, p. 19), envolve situações com algumas interpretações do número racional que sugerem a ideia de somar quantidades representadas por frações. Nos problemas 2, 3 e 4, ½ e ¼ podem ser interpretados como razão: "uma comparação entre duas quantidades" (Lamon 2005, p. 182, tradução nossa).

Quadro 2: problemas adaptados de Simon Mochon

1. Andei ½ km hoje e ontem tinha andado ¼ km. Quanto andei nos dois dias?
2. Se um jogador de basquete encesta uma bola a cada duas tentativas num jogo, e se no outro jogo ele encesta uma bola em cada quatro tentativas, qual a fração que representa o desempenho do jogador nos dois jogos?
3. ½ do cereal "Dulce" é açúcar. ¼ do cereal "leve" é açúcar. Se misturarmos porções iguais de ambos os cereais, que fração dessa mistura é de açúcar?
4. Numa sala de aula ½ dos alunos são rapazes e noutra sala ¼ dos alunos são rapazes. Se pusermos os dois grupos juntos, que fração de rapazes obtemos?

Ao propor a tarefa para o grupo o objetivo foi desencadear um processo de negociação de significados em que os participantes percebessem que estavam lidando com razões e as distinguissem dos outros subconstrutos em sua natureza e na forma de operá-las e que ao resolver os problemas, mobilizassem aspectos do raciocínio proporcional.

A resolução e discussão da tarefa aconteceram no encontro do grupo do dia 12 de junho de 2012, estavam presentes cinco professoras de Matemática que lecionam no Ensino Fundamental, cujas identidades foram preservadas, e os pesquisadores Márcio, Tânia e Laís. Os participantes receberam a folha da tarefa com os quatro problemas, o enunciado foi lido, eles se organizaram em dois pequenos grupos (com 4 e 3 participantes) e foi solicitado que as tentativas de resolução fossem registradas na folha da tarefa.

Encerrado o momento das resoluções deu-se início às discussões no grande grupo: os participantes se organizaram de modo que um representante de cada pequeno grupo registrasse no quadro negro, quando necessário, a resolução do problema a ser discutido respeitando a sequência da folha da tarefa. As interações dos participantes foram gravadas em áudio e as transcrições, juntamente com os registros escritos das e resoluções de cada participante, constituíram o conjunto de dados para esta análise.

Apresentamos e analisamos parte das negociações de significados evidenciadas na resolução e discussão do problema 2.

Quadro 3: problema 2 resolvido e discutido na CoP PAEM

Se um jogador de basquete encesta uma bola a cada duas tentativas num jogo, e se no outro jogo ele encesta uma bola em cada quatro tentativas, qual a fração que representa o desempenho do jogador nos dois jogos?

Os diálogos a seguir mostram a apresentação da resolução desse problema pela participante Iara e as interações entre alguns participantes:

> Iara: [...] eu pensei assim ele acerta 1 em 2 no primeiro jogo, então [...] a cada dois arremessos um acerto, então, na razão de 1 para 2 daí no outro jogo ele acerta...
> Outros: 1 em 4.
> Iara: 1 em 4, um acerto em 4...eu fiz assim ó somei lá também e deu os ¾ então o acerto dele, a cada 4, juntar ali os dois jogos a cada 4 arremessos [...]
> Laís: Ele acerta 3.

Apesar de ter utilizado a palavra razão para se referir à relação entre os acertos e os arremessos do jogador, e perceber que a resposta do problema envolvia a soma de duas razões, Iara realizou essa operação utilizando as regras aritméticas para a soma de frações, e em princípio ficou satisfeita com a resposta, a mesma estratégia foi utilizada por outros participantes. Em geral, isso ocorre com pessoas acostumadas à aplicação de regras e algoritmos para resolver um problema, o que pode apontar indícios da ausência de aspectos do raciocínio proporcional: a soma das razões baseou-se nas regras da aritmética das frações o que levou a um resultado numérico e a uma identificação do subconstruto não coerentes com a situação.

Porém, ao expor sua estratégia de resolução para o grande grupo, Iara percebeu que algo estava errado e resolveu reavaliar sua resolução.

> Iara: Mas eu acho que tá errado agora pensando bem.

> Tânia: Por quê?
> Iara: Seria uma média né?
> Tânia: Porque que você acha que tá errado?
> Iara: Porque são 2 jogos diferentes...
> [...]
> Tânia *(dirigindo-se ao grupo)*: o que vocês acham?
> Bia: eu também pensei [*assim*]
> Iara: então isso aqui ainda ia dividir por 2, pra fazer a média, qual a média de arremesso dele? Não é 2 jogos?
> Tânia: e daí o resultado daria quanto?
> Iara: vai dar $3/8$? Se for a média... Porque eles não fazem assim, média de pontos?

Em sua reavaliação Iara considerou a ideia de aplicar o conceito de média aritmética, levando em conta que se tratava de dois jogos, mas ainda não estava certa se isso seria válido. Outra participante discorda do primeiro resultado apresentado por Iara, e argumenta:

> Bia: é porque no primeiro jogo ele acertou metade dos arremessos já no segundo ele acertou $1/4$, ele acertou bem menos que a metade... Então não pode dar $3/4$!

A observação de Bia colaborou para que Iara e os demais se convencessem que ¾ não poderia ser a resposta e que o problema envolvia a ideia de razão que, segundo Lamon (2005) "é uma comparação de quaisquer duas quantidades [e] pode ser utilizada para transmitir uma ideia que não pode ser expressa como um único número" (p. 225, tradução nossa).

> Iara: É a, é razão mesmo né?
> Ada: É, é razão... É razão mesmo...

Então Laís apresenta outra possibilidade para abordar o problema.

> Laís: eu lembrei de probabilidade [...]

Laís mostrou seus cálculos, mas também não estava segura e desistiu de sua exposição, dizendo que ao aplicar o cálculo pensado (com a ideia de probabilidade) o resultado destoou muito do contexto do problema e que usar probabilidade não seria coerente. Então Bia apresenta sua estratégia, que também envolve a ideia de média.

> Bia: olha eu imaginei o seguinte, metade são 50%, $1/4$, 25% 50 mais 25 são 75, dividido por 2, 37,5%... Ali é, $3/8$, o que que são $3/8$? Também $100/8$ que vai dar 12,5 vezes 3 também vai dar 37,5%

Bia utiliza a representação das razões por meio de porcentagem e mostra sua resposta coincide com o resultado que Iara obteve anteriormente: $3/8$. A argumentação de Bia convence alguns membros do grupo, inclusive Iara, mas não ao Márcio. Ele ainda defende que o desempenho do jogador deve ter sido $3/4$ nos dois jogos e apresenta sua estratégia, que incluía simulações com números x e y aleatórios para os arremessos nos jogos, calcular os acertos do jogador em cada um deles e chegar ao resultado por meio da média dos valores. Em seguida Tânia mostra ao grupo uma simulação em que o número de arremessos em cada jogo era diferente, Márcio reconsidera sua estratégia e faz novas simulações.

> Tânia: Nos dois jogos, ele considerou 10 arremessos no primeiro jogo e [...] 8 arremessos no segundo [...] fazendo a média ele achou um resultado diferente...
> Márcio: Será, então teria que considerar a mesma quantidade Tânia?
> Tânia: E aí?
> Márcio: Por exemplo, 10, 10? De repente... Eu vou colocar 8 aqui também só pra gente ver [...]
> Márcio: Vai dar.
> Tânia: Aham.
> Márcio: É... $3/8$. [...] Quer dizer, teria que ser a mesma quantidade aqui.
> Márcio: [...]... Aqui eu coloquei assim ó 8 arremessos no primeiro jogo aí como ele acerta 1 em cada 2, ele acertou 4, é no segundo ele acerta 1 em cada 4 eu coloquei também 8 arremessos aí ele teria acertado 2, aí pensando em termos de média, 4 mais 2, que ele acertou, 8 mais 8 16, então ele teria acertado 6 em 16 o que dá $3/8$ que é a média, [...]

Nessa negociação os participantes perceberam que expressar o desempenho do atleta em dois jogos distintos por uma única razão, obtida pela soma de razões, só é possível se considerarmos o mesmo número de arremessos em cada jogo, pois são eventos distintos e a razão indicada em cada um pode representar outras situações. Depois dessas negociações, Tânia procurou sintetizar as ideias envolvidas nas estratégias apresentadas, e o grupo passou a discutir as resoluções do problema 3.

Nas negociações, evidenciadas nas falas dos participantes, é possível destacar dois aspectos relevantes relacionados às operações com o subconstruto razão: saber aplicar matematicamente a ideia de 'juntar' (adicionar) quantidades relativas, e determinar a unidade contínua ou conjunto discreto com o qual se opera. Também é possível identificar indícios de que o raciocínio proporcional esteve presente na discussão, nas situações em que os participantes recorrem à média, à representação em porcentagem e também às simulações em tabelas. Existe certa dificuldade em compreender e explicitar o subconstruto razão nos problemas e limitar as possibilidades de escolha dos algoritmos matemáticos pertinentes para lidar com essa personalidade do número racional: é comum o emprego de estratégias incorretas como a aplicação de operações válidas para o subconstruto medida em problemas que tratam do subconstruto razão, o que gera respostas incoerentes com o contexto do problema.

O significado do subconstruto razão foi construído de maneira significativa após as interações em grande grupo, momento em que foi indispensável a interferência de Tânia: por meio de questões lançadas para discussão e apontamentos feitos, a negociação de significados foi possível fazendo com que a interpretação razão da forma fracionária $^a/_b$ fosse construída de maneira adequada, conveniente à cada problema discutido. Percebeu-se a transição entre os significados e percepções explicitados no início das discussões, e como, por meio da negociação de significados, o subconstruto razão foi de certo modo construído e passou a ser identificado no contexto dos problemas.

6. Algumas considerações

Com este estudo notamos que a razão, subconstruto do número racional, não é uma ideia familiar aos professores em contextos matemáticos, apesar do pensamento proporcional, exigido na resolução de problemas envolvendo conceitos de proporcionalidade, especialmente aqui a razão, ser algo comumente utilizado para encontrar soluções convenientes para situações problema fora do campo de saberes matemáticos.

Por meio das análises iniciais das discussões observamos as dificuldades dos professores com relação à construção do significado de razão para o número racional. Pensamos que isso se deve, em parte, ao fato de que a exploração do tema números racionais, com foco na personalidade ‘razão’, tem sido enfatizada apenas como um conceito base para a resolução de problemas de proporcionalidade por meio do algoritmo do produto cruzado, ‘regra de três’. A presença do subconstruto razão, explicitada em contextos diversos não tem recebido suficiente atenção nas práticas docentes, que costumam priorizar a reprodução mecânica de dispositivos algébricos em detrimento da investigação e interpretação de situações problema que estimulem o pensar proporcionalmente. Como alternativa para contornar tal situação, pensamos ser importante a resolução e discussão de tarefas promovendo a negociação de significados construídos pelos indivíduos participantes.

7. Referências bibliográficas

BEHR, Merlyn J. et al. Rational Number Concepts. In: LESH, Richard; LANDAU, Marsha (Ed.). *Acquisition of mathematics concepts and processes*. New York: Academic Press, p. 91-125, 1983.

LAMON, Susan. J. *Teaching fractions and ratios for understanding*: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers. 2nd ed. Lawrence Erlbaum Associates, Publishers. Mahwah, New Jersey. 2005.

LAVE, Jean; WENGER, Etienne. *Situated Learning*: Legitimate Peripheral Participation. Cambridge: Cambridge University Press, 1991.

LESH, Richard; POST, Thomas; BEHR, Merlyn. Proportional reasoning. In Hiebert, James, Behr, Merlyn (Eds.) *Number Concepts and Operations in the Middle Grades* Reston, VA: Lawrence Erlbaum &National Council of Teachers of Mathematics, p. 93-118, 1988.

MOCHON, Simon. When can you meaningfully add rates, ratios and fractions?. *For the Learning of Mathematics*. FLM Publishing Association, Vancouver, British Columbia, Canada, v. 13, n. 3, p. 16-21, nov. 1993.

NEPEM/USP**.** Números racionais: aspectos conceituais, o papel da linguagem e dos materiais manipulativos**.** *Horizontes*, Bragança Paulista, v. 22, n. 1, p. 53–64, jan/jun. 2004.

ONUCHIC, Lourdes de la Rosa; ALLEVATO, Norma Suely Gomes As Diferentes 'Personalidades' do Número Racional Trabalhadas através da Resolução de Problemas. *Bolema*, Rio Claro (SP), v 21, n. 31, p. 79–102, 2008.

ROMANATTO, Mauro C. Número racional: uma teia de relações. *Revista Zetetiké*, v.7, n.12, p. 37–49, jul/ dez. 1999

WENGER, Etiene. *Communities of Practice*: Learning, Meaning, and Identity. New York: Cambridge University Press, 1998.

WENGER, Etienne; MCDERMOTT, Richard A.; SNYDER, William M. *Cultivating communities of practice: A guide to managing knowledge*. Harvard Business Press, 2002.