MODELAGEM MATEMÁTICA DE ROBÔS ATRAVÉS DE TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Bruna da Silva Leitzke
Universidade Federal de Pelotas
brunaleitzke@hotmail.com

Rejane Pergher
Universidade Federal de Pelotas
rejane.pergher@ufpel.edu.br

Resumo
Neste trabalho, é apresentada a descrição da posição do elemento terminal de um robô, em função das variáveis de junta, com respeito a um sistema de coordenadas de referência. Tais relações são de grande importância para a obtenção das relações entre a velocidade das juntas e as velocidades linear e angular do elemento terminal e para a obtenção das equações do movimento. Esta modelagem mostra uma aplicação de álgebra linear envolvendo matrizes e transformações lineares que pode ser usada pelo professor como motivação para os alunos aprenderem um assunto com inúmeras aplicações. Além disso, conceitos de trigonometria e operações sobre matrizes também estão inseridos nesta aplicação.

Palavras-chave: Robô; transformações lineares; modelagem; ensino e aprendizagem.

1. Introdução

A ideia de escrever este artigo surgiu depois de uma pesquisa realizada por alunos de iniciação científica, orientados pelo professor Valdecir Bottega, onde foi desenvolvido um programa em Matlab que gera animações para a simulação do movimento de um robô. Como surgiram várias questões envolvendo ensino e aprendizagem, pensamos em utilizar o modelo matemático e o sistema algébrico computacional para o estudo de problemas de multiplicação de matrizes, transformações lineares e trigonometria em sala de aula. O objetivo deste estudo é mostrar uma aplicação da álgebra linear envolvendo a robótica.

2. Conceitos de Álgebra Linear

Um dos conteúdos principais da álgebra linear é o estudo das transformações lineares e sua representação por meio de matrizes (Lay, 1999).

Definição: Uma transformação (ou aplicação) T do $\Re^n$ no $\Re^m$ é uma regra que associa a cada vetor **x** do $\Re^n$ um vetor T(**x**) do $\Re^m$. *Notação*: $T:\Re^n \to \Re^m$

Observação: $\Re^n$ é chamado de domínio de T. $\Re^m$ é o contradomínio de T e o conjunto T(**x**) é a imagem de **x**.

As transformações lineares possuem muitas aplicações, dentre elas: computação gráfica, criptografia, fractais e processamento de sinais (ANTON, 2001).

Transformações Matriciais:

Definição: Para cada **x** do $\Re^n$, $T(\mathbf{x})$ é dado por $A\mathbf{x}$, onde A é uma matriz $m \times n$.

Notação: $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$

As transformações matriciais possuem diversas aplicações. Por exemplo, as transformações de cisalhamento aparecem na física, na geologia e em cristalografia. Destacam-se ainda as transformações de projeção, reflexão, rotação, dilatação e contração.

3. Modelo Matemático de um Manipulador Robótico

Um manipulador robótico (robô) é formado por braços (elementos) e juntas (articulações). O problema fundamental da robótica consiste em programar um robô com o objetivo de executar uma determinada tarefa. Para realizar o controle de um robô é necessário o seu estudo mecânico, que se divide em dinâmica, estática e cinemática.

A dinâmica considera as causas que produzem e/ou modificam os movimentos dos corpos. Já a estática, estuda os corpos em repouso. A cinemática é o estudo do movimento dos corpos, neste caso, os robôs, desconsiderando as forças e as massas envolvidas, levando em conta apenas posição, velocidade e aceleração. Ela cria um mapeamento entre as variáveis de junta e posição e orientação de cada segmento do robô. Assim, o problema central da cinemática é como definir a posição do elemento terminal do robô. Esse problema é dividido em duas partes:

- Cinemática direta: define a posição dos braços em função das variáveis de junta (comprimentos ou ângulos).

- Cinemática inversa: determina os valores dos ângulos para que os braços atinjam a posição desejada.

Para solucionar os problemas de cinemática direta e inversa, é necessário saber computar as relações matemáticas entre as posições de cada junta. Para isso, adota-se um sistema de coordenadas por braço, utilizam-se os conceitos de álgebra linear, no que se refere a transformações lineares e conceitos de trigonometria também são explorados.

A figura 1 mostra um robô com três juntas rotacionais.

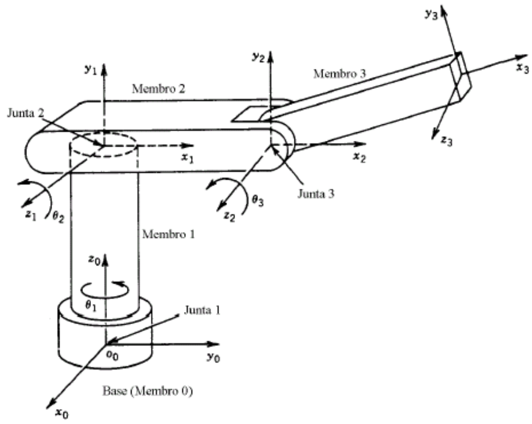
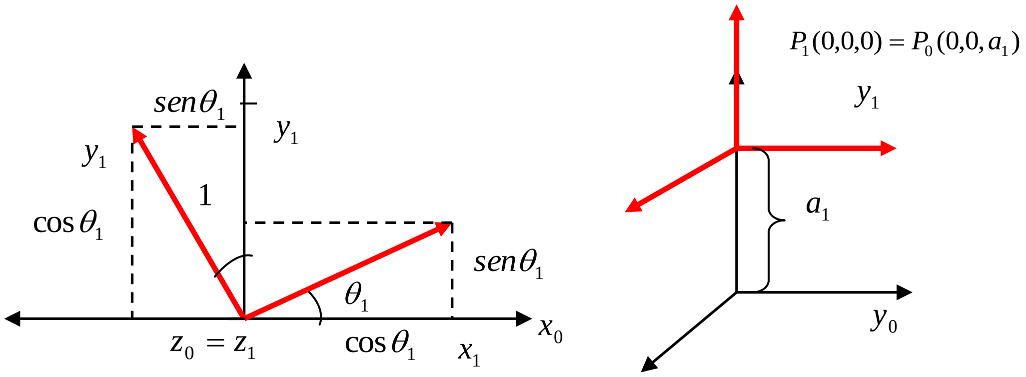


Figura 1: Robô articulado RRR.

Representa-se o sistema de coordenadas de referência em um novo sistema de coordenadas, através de rotações e translações. As rotações ocorrem quando as origens dos dois sistemas de coordenadas são coincidentes, mas os eixos não são paralelos. As translações ocorrem quando os dois sistemas de coordenadas são paralelos. Por convenção, as transformações são sempre realizadas no eixo z. Na base, ocorre uma rotação em torno do eixo z_0, como mostrado na Figura 2a. As novas coordenadas são as projeções do versor de posição em cada um dos eixos coordenados do sistema de referência. Essa rotação é transmitida para o sistema de referência na junta 2 através de uma translação sobre o eixo z_0, como mostrado na Figura 2b. A origem P_1 do sistema transladado é equivalente ao ponto P_0 do sistema de referência.



(a) (b)

Figura 2: (a) Rotação da base. (b) Translação da base para a junta 2.

A matriz de rotação em torno de z_0 é dada por

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -sen\theta_1 & 0 \\ sen\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x_1, y_1, z_1] \quad . \tag{1}$$

A relação entre P_0 e P_1 é expressa também na forma matricial

$$P_0 = P_1 + d_0 \qquad \begin{bmatrix} P_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & d_0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad .$$
$$d_0 = [0, 0, a_1] \tag{2}$$

A matriz de translação sobre z_0 é dada por

$$TR_z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad . \tag{3}$$

A figura 3 mostra a torção em *x* referente à junta 1.

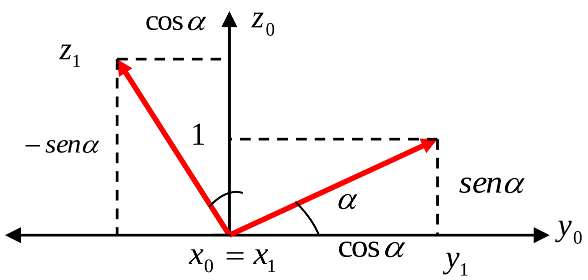


Figura 3: Torção na junta 1.

A matriz de rotação em torno de z_0 é dada por

$$R_z = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -sen\theta_1 & 0 \\ sen\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = [x_1, y_1, z_1]. \tag{4}$$

A transformação total para a junta 1 é dada por

$$A_0^1 = R_z Tr_z R_x \,. \tag{5}$$

Ou, na forma matricial,

$$A_0^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -sen\theta_1 & 0 & 0 \\ sen\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -sen\alpha & 0 \\ 0 & sen\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \,. \tag{6}$$

Com $\alpha = 90^0$, tem-se para a matriz de transformação, equação (6),

$$A_0^1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & 0 & sen\theta_1 & 0 \\ sen\theta_1 & 0 & -\cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{7}$$

Para a junta 2, ocorre primeiro uma rotação em torno do eixo *z* e, em seguida, uma translação sobre o eixo *x*, resultando em

$$A_1^2 = R_z Tr_x \quad . \tag{8}$$

Ou, na forma matricial,

$$A_1^2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -sen\theta_2 & 0 & a_2\cos\theta_2 \\ sen\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 & a_2 sen\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{9}$$

Para a junta 3, ocorre primeiro uma rotação em torno do eixo z e, em seguida, uma translação sobre o eixo *x*, resultando em

$$A_2^3 = R_z Tr_x \quad . \tag{10}$$

Ou, na forma matricial,

$$A_2^3 = \begin{bmatrix} \cos\theta_3 & -sen\theta_3 & 0 & a_3\cos\theta_3 \\ sen\theta_3 & \cos\theta_3 & 0 & a_3 sen\theta_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} . \tag{11}$$

A transformação total do sistema é

$$T_0^3 = A_0^1 A_1^2 A_2^3 \tag{12}$$

obtendo-se

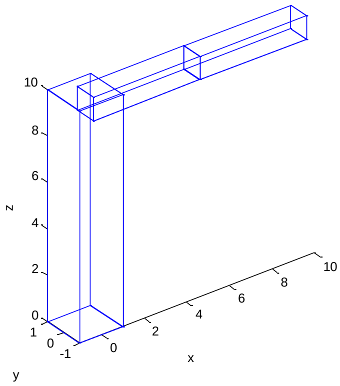
$$P_0 = T_0^3 P_3$$

(13)

onde P_0 é o ponto das coordenadas de referência e P_3 é o ponto na extremidade do robô.

4. Resultados e Simulações

Uma estrutura de paralelepípedos foi implementada em Matlab de maneira a configurar



um robô articulado RRR tridimensional. Sua posição inicial é ilustrada pela Figura 4.

Figura 4: Posição inicial do robô RRR tridimensional.

O ponto central do corpo foi colocado na origem do sistema *(x,y,z)* e o braço foi colocado em $x=0$, dentro do corpo.

Outro programa, mais complexo, foi desenvolvido por alunos de iniciação científica para que a imagem executasse o movimento, simulando um robô. Nesse caso, há um outro ângulo para o giro da base. Por exemplo, para: $\theta_1=30°$, $\theta_2= -30°$, $\theta_3=90°$, onde θ_1 é o giro da base, θ_2 é a revolução do braço e θ_3 é a revolução do antebraço, a imagem final da animação é mostrada na Figura 5.

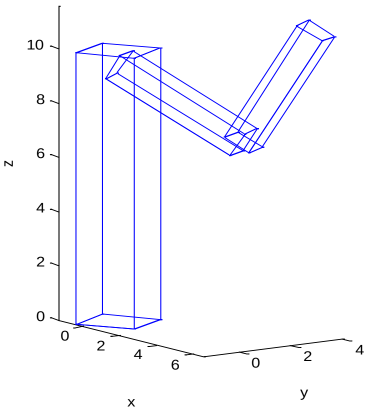


Figura 5: Animação robô RRR para θ_1=30°, θ_2= - 30° e θ_3=90°.

Com isso, a simulação executou os três movimentos possíveis, dados pelos 3 graus de liberdade do robô.

A partir da animação desenvolvida para o robô articulado RRR tridimensional, foi possível gerar também, uma animação que envolvesse cinemática inversa.

O programa desenvolvido encontra os ângulos que devem ser formados para que a posição do espaço *(x,y,z)* desejada seja alcançada.

Por exemplo, seja P o ponto do espaço tridimensional desejado. Para o ponto P(8,2,11), o robô passará de sua posição inicial, ilustrada na Figura 4, para a posição final mostrada na Figura 6. Ou seja, a posição do ponto central do elemento terminal da estrutura será o ponto P. Para isso, o programa calculou os ângulos que devem ser executados na animação resultando nos ângulos: θ_1*=14.0362°*, θ_2*=43.3639°* e θ_3*= -66.1089°*.

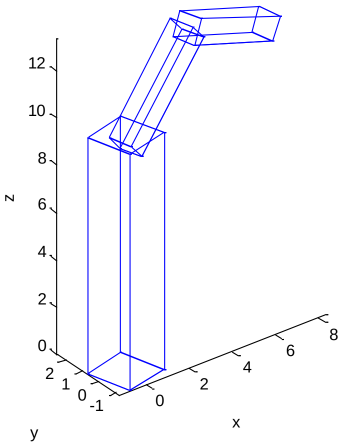


Figura 6: Posição do elemento terminal do robô, por cinemática inversa, para a posição desejada P(8,2,11).

5. Robótica como Método de Ensino através da Modelagem Matemática

Com o uso da matemática podemos modelar diversas circunstâncias, e com isso podem ser resolvidas várias situações problemas do cotidiano. Além disso, a modelagem matemática pode ser também utilizada como metodologia de ensino, pois ajuda e estimula os alunos ao aprendizado.

A Robótica lida com esses dois propósitos, pois tenta ser capaz de dar conta de problemáticas da realidade e também está diretamente ligada à tecnologia e a conteúdos de matemática. Esses podem ser trabalhados tanto no Ensino Médio, como no Ensino Superior e servem de grande incentivo aos alunos, pois ao se trabalhar com conteúdos relacionados, principalmente, à trigonometria e à álgebra linear podemos citar a robótica como uma motivação e junto a isso, podemos citar jogos e tecnologias que, atualmente fazem parte do interesse de muitos desses alunos. A ideia aqui é que os alunos do ensino médio interajam com o programa desenvolvido, modificando parâmetros e observando os resultados. Já para os alunos do ensino superior, espera-se estimular o aprendizado dos conceitos envolvidos e até mesmo incentivar o desenvolvimento de novos programas.

Uma metodologia diferenciada serve, não só para se conseguir uma aprendizagem significativa, mas também serve para o estimulo à continuação dos estudos e uma autonomia quando se fala em questionamento e pensamento crítico por parte do aluno. A modelagem matemática é um grande aliado para que isso se torne realidade, assim como BARBOSA destaca:

> Modelagem pode ser entendida em termos mais específicos. Do nosso ponto de vista, trata-se de uma oportunidade para os alunos indagarem situações por meio da matemática sem procedimentos fixados previamente e com possibilidades diversas de encaminhamento. (2001, p.5)

6. Considerações Finais

O objetivo do trabalho desenvolvido foi mostrar uma aplicação da álgebra linear, a fim de gerar animações que simulassem o movimento de um robô, envolvendo cinemática direta e inversa. Um sistema algébrico computacional foi utilizado para desenvolver uma simulação que encontrasse a posição do elemento terminal do robô em função dos ângulos formados entre os braços. As matrizes de transformação e seus cálculos foram implementados em Matlab (GILAT, 2006), passo a passo e comprimentos hipotéticos foram arbitrados para os diferentes elementos do robô. Com isso, conseguiu-se rapidez na realização desses cálculos e êxito nas respostas obtidas (BOTTEGA, 1998). Surgiram problemas de multiplicação de matrizes e trigonometria que podem ser explorados pelo professor.

7. Agradecimentos

Agradecemos ao prof. Dr. Valdecir Bottega pela orientação deste trabalho e à Universidade Federal de Pelotas, em especial ao Instituto de Física e Matemática pelo apoio.

8. Referências

ANTON, H. e Rorres, C., *Álgebra linear com aplicações*, Bookman, 2001.

BARBOSA, Jonei Cerqueira. *Modelagem na Educação Matemática: Contribuições para o debate teórico*. In: REUNIÃO ANUAL DA ANPED, 24, 2001 Caxambu. *Anais*. Caxambu: ANPED, 2001 a. 1a CD-ROM. Disponível em: <http://www.uefs.br/nupemm/anped2001.pdf>. Acessado em 20 de março de 2013.

BOTTEGA, V., *Controle de Sistemas Mecânicos Não-Lineares Aplicado a Um Manipulador Robótico*, Dissertação de Mestrado, UFRGS/CPGMAP, Porto Alegre, 1998.

GILAT, A., *Matlab com aplicações em engenharia*, Bookman, 2006.

LAY, D. C., *Álgebra linear e suas aplicações*, LTC, 1999.