COMBINATÓRIA: ESTUDO DE UMA ABORDAGEM QUE PRIORIZA PROBLEMAS E O PRINCÍPIO FUNDAMENTAL DE CONTAGEM

Renan Gustavo Araujo de Lima
Fundação Universidade Federal de Mato Grosso do Sul
rrenan_19@hotmail.com

Resumo:
Este trabalho é um recorte da monografia do trabalho de conclusão do curso de Matemática-Licenciatura. Ele tem como objetivo investigar uma possibilidade de abordagem de conteúdos de combinatória na educação básica por meio da exploração de situações-problema e do princípio fundamental da contagem. A realização do trabalho baseou-se na Teoria das Situações Didáticas proposta por Guy Brousseau. A experimentação da pesquisa foi realizada numa escola da rede pública estadual, com alunos do 1º Ano do Ensino Médio, composta de quatro sessões de uma hora de duração. Por fim, constatamos que os alunos foram capazes de resolver problemas de Combinatória, utilizando apenas as operações básicas e o Princípio Fundamental da Contagem, mesmo ainda não tendo estudado tal conteúdo em sala de aula. Além disso, observamos que no decorrer da pesquisa os alunos apresentaram evolução nas estratégias elaboradas para a resolução dos problemas propostos.

Palavras-chave: Combinatória; Ensino Médio; Problemas.

1. Introdução

Durante a graduação me interessei pelos estudos do tema Combinatória e também pelo modo que a mesma é trabalhada nos colégios. No período que participei do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência – PIBID pude estar em contato com alunos do Ensino Médio e perceber a maneira que era abordado tal conteúdo na escola e identificar algumas dificuldades encontradas pelos alunos. Foi possível observar que, entre as dificuldades apresentadas pelos alunos, destacavam-se a não diferenciação dos problemas (permutação, arranjo, combinação), bem como na utilização de fórmulas que lhes foram passadas, e de interpretação dos resultados encontrados por eles, se limitando à execução técnica de fórmulas. Neste contexto decidi realizar este trabalho com a aplicação de uma sequência de atividades sobre o tema, visando analisar estratégias desenvolvidas pelos alunos e identificar alguma possível evolução dos mesmos ao longo da pesquisa.

De acordo com Merayo (2001, *apud* PESSOA E BORBA, 2009) a análise combinatória é a técnica de saber quantos objetos há em um conjunto sem realmente ter que contá-los, porque essa técnica não necessita listar ou enumerar todos os elementos que formam o conjunto.

Já Pessoa e Borba (2010), definem o raciocínio combinatório como um tipo de pensamento que envolve contagem, mas que vai além da enumeração de elementos de um conjunto. Além disso, eles caracterizam a combinatória, na mesma perspectiva que seguimos, da seguinte maneira:

> Na Combinatória contam-se, baseando-se no raciocínio multiplicativo, grupos de possibilidades, através de uma ação sistemática, seja pelo uso de fórmula, seja pelo desenvolvimento de uma estratégia que dê conta de atender aos requisitos desses tipos de problemas, como a constituição de agrupamentos, a determinação de possibilidades e sua contagem. (PESSOA; BORBA, 2010, p. 2)

Dessa maneira, julgamos que seria mais razoável trabalhar tal assunto, utilizando uma abordagem diferente da empregada usualmente nas escolas e apresentada em livros didáticos, ou-seja, desenvolver um estudo de combinatória por meio de resolução de problemas, sem a necessidade de se prender na utilização de fórmulas, podendo utilizar apenas as operações aritméticas básicas como adição, subtração, multiplicação e divisão, segundo Carvalho (2006).

2. Objetivos

O objetivo geral deste trabalho é investigar uma possibilidade de abordagem de conteúdos de combinatória na educação básica por meio da exploração de situações-problema e do princípio fundamental da contagem.

Os objetivos específicos são:

- Analisar como os alunos, que ainda não estudaram combinatória, resolvem problemas envolvendo o tema;
- Identificar, analisar e discutir as estratégias de resolução e tipos de repostas mais utilizados por esses alunos;

3. Escolha Teórica

A base para a análise teórica foi inspirada na Teoria das Situações Didáticas, de Guy Brousseau. Nesse modelo, uma situação didática consiste em toda interação entre o aluno, um sistema educacional (professor) e o saber. Nesta, o professor tem como função propiciar situações que favoreçam a aprendizagem de um determinado conteúdo.

Brousseau (1996) caracteriza uma situação didática como:

> O conjunto de relações estabelecidas explicitamente e/ou implicitamente entre um aluno ou grupo de alunos, um certo *milieu* (...) e um sistema educativo (o professor) para que esses alunos adquiram um saber constituído ou em vias de constituição (BROUSSEAU, 1996 apud POMMER, 2008, p.6).

Na Teoria das Situações Didáticas, Brousseau (2008), destacamos as situações adidáticas, as quais têm como principal característica a não intervenção do professor sobre o conhecimento no momento da construção dos alunos, diante da situação-problema proposta. Precedendo as situações adidáticas, temos o momento da Devolução, no qual o professor entrega a responsabilidade da construção do conhecimento ao aluno e este deve aceitar tal responsabilidade e tomá-la para si. Após este momento, os alunos devem vivenciar as fases que compõem uma situação adidática, sendo elas: AÇÃO, na qual o aluno realiza tentativas, por muitas vezes de forma intuitiva, que possam ajudar a resolver o problema; FORMULAÇÃO, caracterizada pelo momento em que o aluno formula uma conjectura que possa levá-lo a uma resolução correta e por fim a de VALIDAÇÃO, em que o aluno realiza a verificação da validade ou não da conjectura formulada na fase anterior.

Ao final deve ocorrer o momento da Institucionalização, em que é realizada a formalização e sistematização das produções dos alunos sob a condução do professor. Neste momento o professor revela o conhecimento que estava implícito no problema, caso não tenha aparecido antes. Destaca-se que esta fase não está inclusa nas situações adidáticas, pois neste momento o professor se torna responsável pelo “controle” do saber.

4. Experimentação

A experimentação foi realizada numa escola pública estadual, de Mato Grosso do Sul, composta de quatro sessões, sendo que em cada sessão era composta de dois problemas que envolviam combinatória, com diferentes níveis de dificuldades, para os alunos realizarem. A atividade foi realizada com os alunos do 1º ano do Ensino Médio do período matutino. Tais alunos não tinham estudado o conteúdo de Combinatória em sala de aula, pois o mesmo faz parte do programa do 2º ano do Ensino Médio. Assim, os alunos não teriam acesso às fórmulas para tentar resolver, sendo necessário mobilizar apenas as operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão).

A seguir será apresentado um dos problemas que foram propostos aos alunos, durante a experimentação. Mostraremos também algumas possibilidades de soluções que os alunos poderiam mobilizar, além de eventuais dificuldades que eles poderiam encontrar diante dos mesmos.

Problema 1

Mariana gosta de 5 sabores de sorvete: abacaxi, coco, limão, chocolate e graviola. Quantas possibilidades ela tem para escolher duas bolas entre os cinco sabores, sabendo que:

a) As duas bolas são do mesmo sabor?

b) As duas bolas são de sabores diferentes e não importa a ordem em que são colocadas na casquinha?

c) As duas bolas são de sabores diferentes e importa a ordem em que são colocadas na casquinha?

Este problema envolve três itens distintos. No item a, como Mariana gostaria que as duas bolas de sorvete fossem do mesmo sabor, e como ela tinha apenas cinco opções de sabores para escolher, também teria cinco opções de montar seu sorvete.

Já no item b, os sabores das bolas de sorvetes são distintos, então para uma primeira bola ela poderia escolher entre as cinco opções de sabores que gostava. Após escolhida a primeira bola, lhe restava quatro opções de sabores para colocar no sorvete, já que não queria sabores repetidos. Assim, teria um total de 5 x 4 = 20 maneiras de montar o sorvete. Porém temos que considerar que como a ordem que colocasse as bolas de sorvete não importa, por exemplo, o sorvete abacaxi/limão é o mesmo que o sorvete de limão/abacaxi, assim estaria contando duas vezes cada sorvete. Dessa forma, o número total de sorvetes que Mariana poderia montar são 10 sorvetes.

E no item c, como temos a restrição que a ordem em que as bolas são colocadas importa, utilizaremos o mesmo pensamento realizado no tem anterior, exceto a parte final, e concluímos que ela pode montar vinte sorvetes diferentes.

Uma das estratégias que pode ser mobilizada nesse problema será a contagem de todas as opções possíveis. Na resolução deste problema é necessário que os alunos considerem as restrições impostas em cada item do enunciado, pois, ao realizar a contagem, caso não as observem, irão ou obter uma quantidade de casos em exceto ou em falta.

5. Descrição da parte experimental e análise das produções de alguns alunos

Neste momento será apresentada, de maneira breve, a descrição de uma das sessões realizadas, no caso a primeira sessão. Num segundo momento aprofundaremos essa descrição, fazendo uma análise mais detalhada das produções de alunos para um dos problemas trabalhado na sessão, bem como das intervenções do pesquisador. Assim, apresentaremos as análises das produções desses alunos diante das atividades propostas, bem como das diferentes estratégias que foram mobilizadas por eles durante a sessão.

Descrição da primeira sessão

A primeira sessão houve a participação de 17 alunos. O objetivo desta sessão era observar como os alunos se comportavam diante de problemas que envolviam o tema de combinatória e as estratégias que eles utilizavam para resolver o problema, como a contagem dos casos, generalizações, entre outras.

Após os alunos se organizarem da maneira que achavam mais convenientes, lhes foram propostos os dois problemas e eles se mostraram interessados em resolvê-los. Desde o momento que tiveram acesso ao problema os alunos passaram a discutir do que se tratava, tentando interpretá-lo e resolvê-lo. Dessa maneira, concluímos que ocorreu a devolução, conforme Brousseau (2008). A partir de então os alunos passaram a desenvolver algumas estratégias visando encontrar o resultado e discutindo entre eles o porquê de utilizar uma determinada estratégia. À medida que ocorriam as discussões entre os alunos, as estratégias propostas por eles eram reelaboradas. Percebeu-se que três estratégias diferentes foram mobilizadas pelos alunos durante a sessão, das quais duas serão apresentadas mais adiante no momento da análise das atividades, valendo observar que com a utilização de duas delas era possível atingir o resultado considerado correto.

No final do encontro, fui ao quadro realizar o fechamento da sessão, discutindo e solicitando que os alunos apresentassem para todos os outros alunos as estratégias que utilizaram. No momento que eram apresentadas as estratégias e que os alunos justificavam o motivo que levaram a mobilizá-las, era discutida a validade das mesmas para o problema em questão. Assim, todos tiveram acesso às estratégias, podendo mobilizá-las diante de outros problemas semelhantes. A seguir serão apresentadas duas estratégias mobilizadas pelos alunos durante o segundo encontro, em um dos problemas propostos.

Análise da sessão

PROBLEMA 1

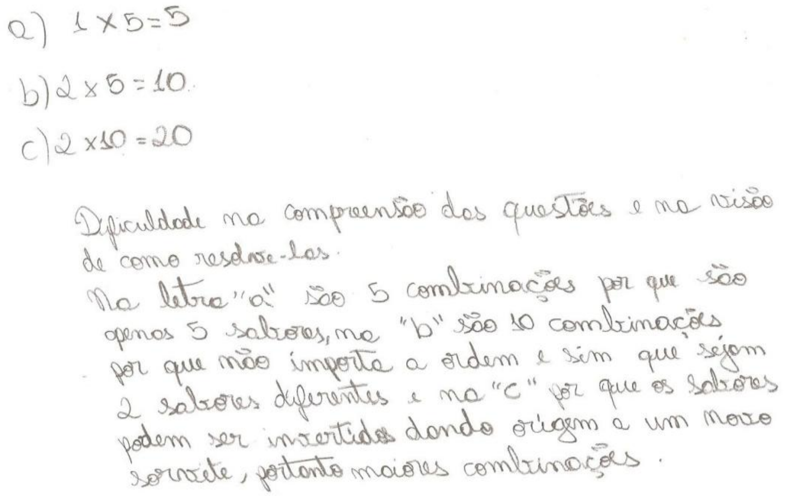
Mariana gosta de 5 sabores de sorvete: abacaxi, coco, limão, chocolate e graviola. Quantas possibilidades ela tem para escolher duas bolas entre os cinco sabores, sabendo que:

a) As duas bolas são do mesmo sabor?

b) As duas bolas são de sabores diferentes e não importa a ordem em que são colocadas na casquinha?

c) As duas bolas são de sabores diferentes e importa a ordem em que são colocadas na casquinha?

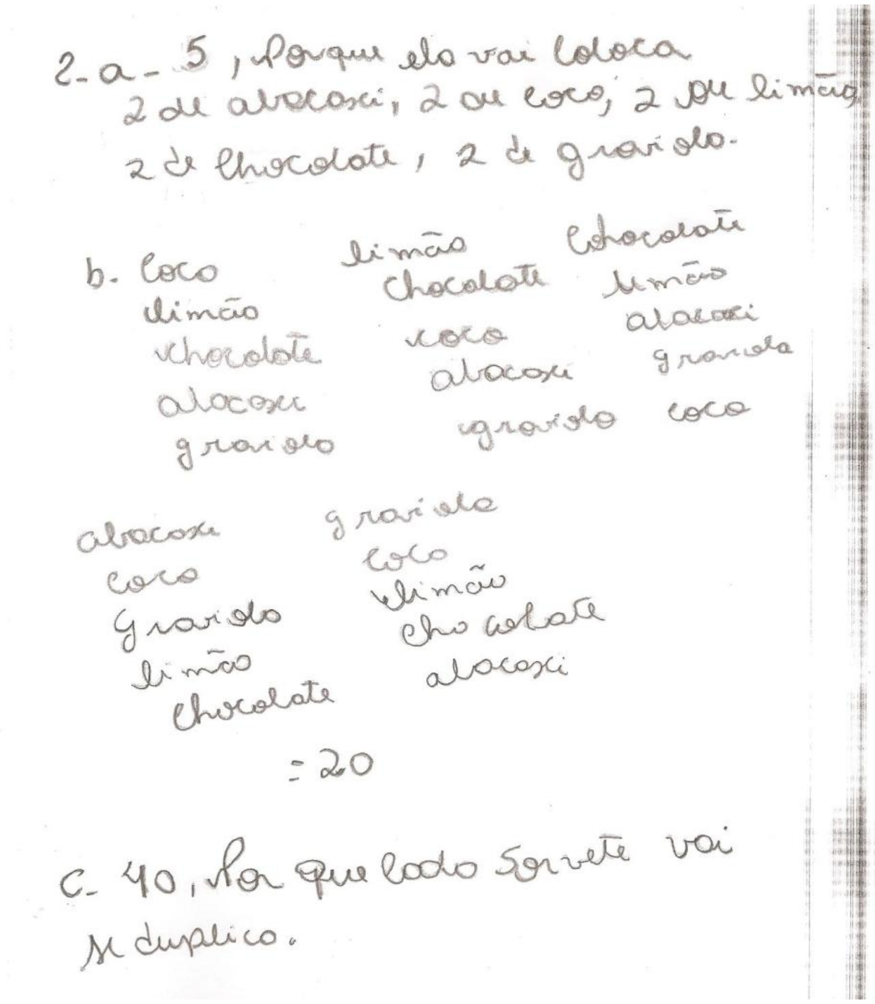
Solução 1, produzida pelo aluno B1:


a) 1 x 5 = 5
b) 2 x 5 = 10
c) 2 x 10 = 20

Dificuldade na compreensão das questões e na visão de como resolve-las.
Na letra "a" são 5 combinações por que são apenas 5 sabores, na "b" são 10 combinações por que não importa a ordem e sim que sejam 2 sabores diferentes e na "c" por que os sabores podem ser invertidos dando origem a um novo sorvete, portanto maiores combinações.

Para o problema em questão, o aluno sentiu dificuldade na interpretação do enunciado. Após a compreensão ele percebeu que no item a, o sorvete teria que ser do mesmo sabor e como só tinha cinco opções, teria como montar apenas cinco sorvetes. Já no item b, o aluno relacionou a resposta do item anterior, e verificou o fato de poder colocar dois sabores diferentes. Foi então que optou por multiplicar o resultado anterior por dois e que resultou nos dez sorvetes possíveis. E por fim, no item c, percebeu o fato que a ordem que colocar as bolas de sorvete iria diferenciar. Portanto, o número de sorvetes possíveis seria o dobro do item anterior, formando vinte sorvetes no total.

Solução 2, produzida pelo aluno A4:



2-a- 5, Porque ele vai coloca 2 de abacaxi, 2 de coco, 2 de limão 2 de chocolate, 2 de graviola.

b. coco
limão
chocolate
abacaxi
graviola

limão
chocolate
coco
abacaxi
graviola

chocolate
limão
abacaxi
graviola
coco

abacaxi
coco
graviola
limão
chocolate

graviola
coco
limão
chocolate
abacaxi

= 20

c- 40, Por que cada sorvete vai se duplico.

No momento da resolução do problema, o aluno realizou a contagem das possibilidades do item a, obtendo um total de cinco sorvetes possíveis. No item b, percebe-se que o aluno fixava o primeiro sabor e combinava com os sabores que poderiam ser acrescentados, porém não se atentou ao fato, por exemplo, de que o sorvete coco/limão é o mesmo sorvete que o sorvete limão/coco. Assim, acabou contando casos repetidos, resultando em vinte combinações possíveis. Por fim, no item c, ele percebe que ao trocar as bolas forma um novo sorvete e que o número total corresponde ao dobro do anterior, obtendo quarenta sorvetes diferentes. Podemos notar que o pensamento utilizado no item c está correto, porém, devido ao fato de não ter atingido a resposta correta no item b, sua resposta não atingirá a resposta considerada correta.

6. Considerações Finais

O desenvolvimento desta pesquisa nos permitiu concluir que os alunos são capazes de resolver problemas que envolvem combinatória, utilizando apenas as operações básicas e o Princípio Fundamental da Contagem, mesmo aqueles que não haviam estudado o conteúdo em sala de aula. Podemos notar que, ao longo das sessões, além de resolver os problemas propostos, os alunos perceberam que, em diversos problemas, a estratégia de contagem dos casos se tornava ineficaz, e passaram a mobilizar uma estratégia que mobilizasse uma estratégia mais genérica, utilizando o Princípio Fundamental da Contagem, mesmo que de maneira intuitiva.

Também constatamos que os alunos apresentaram algumas dificuldades, dentre elas, na interpretação dos problemas propostos, bem como na organização, no momento de realizar a contagem das possibilidades. Porém, no decorrer das sessões, algumas dessas dificuldades foram superadas.

Dessa maneira, esperamos que esta pesquisa contribua para outros estudos sobre o tema, investigando de maneira mais aprofundada as dificuldades e estratégias apresentadas pelos alunos, na busca de outras abordagens que contribuam para a aprendizagem do tema de Combinatória.

Acreditamos que, de modo geral, os objetivos foram atingidos ao longo da pesquisa, pois os alunos se envolveram nas atividades propostas e foram capazes de resolver os problemas sem a utilização de fórmulas prontas. Além disso, com base em relatos dos alunos, os resultados dos problemas passaram a ter algum significado para eles.

7. Referências

BROUSSEAU, G. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas: Conteúdos e métodos de ensino**. São Paulo: Ática, 2008.

CARVALHO, P.C.P. **Médodos de contagem e probalibilidade**, disponível no site http://www.de.ufpe.br/~leandro/APOSTILA_CONTAGEM.pdf, acesso no dia 28/03/2012.

PESSOA, C. A. dos S.; BORBA, R. E. de S. R. **O DESENVOLVIMENTO DO RACIOCÍNIO COMBINATÓRIO NA ESCOLARIZAÇÃO BÁSICA**. In. EM TEIA - Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, vol. 1, n. 1, 2010.

PESSOA, C; BORBA, R. **Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série**. In. ZETETIKÉ – Cempem, Campinas, v. 17, n. 31, 2009.

POMMER, W. M. **Brousseau e a ideia de Situação Didática**. In: SEMA - Seminários de Ensino de Matemática/ FEUSP. São Paulo, 2008.