UM ESTUDO SOBRE O MÉTODO DE QUADRATURA DE PIERRE DE FERMAT

Prof. Dr. César Ricardo Peon Martins
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - IFSP
crmartins68@gmail.com

Márcia Marinelli Pereira Silva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de São Paulo - IFSP
marciamarinellips@gmail.com

Resumo:
Esse artigo apresenta resultados de uma pesquisa que buscou compreender como Pierre de Fermat (1601-1665), na primeira parte de seu tratado conhecido por *Méthode de quadrature*, 1658, quadrou qualquer tipo de parábola ($y = px^k$) e hipérbole ($y = px^{-k}$), usando uma propriedade bem conhecida da progressão geométrica, antecipando os resultados que obtemos quando calculamos a integral imprópria da função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ definida pela lei $f(x) = x^k$, onde $k \in \mathbb{Q}$, $k \neq -1$. Apresentaremos uma interpretação para essa obra tomando, em primeiro lugar, as quadraturas da hipérbole $y = \frac{1}{x^2}$ e da parábola $y^2 = x$ tal como ele propôs e que, assim entendemos, representam cada grupo de curvas que Fermat quadrou na obra. Depois propomos uma generalização desse método, considerando as ferramentas matemáticas que temos a disposição atualmente.

Palavras-chave: progressão geométrica; adequalidade; quadratura; integração.

1. Introdução

O presente texto tem o objetivo de apresentar resultados de uma pesquisa que buscou compreender como Pierre de Fermat (1601-1665), na primeira parte de seu tratado conhecido por *Méthode de quadrature*, 1658, quadrou qualquer tipo de parábola ($y = px^k$) e hipérbole ($y = px^{-k}$), usando uma propriedade bem conhecida da progressão geométrica. Em *Sur la transformation et la simplification des équations de lieux, pour la comparaison sous toutes les formes des aires curvilignes, soit entre elles, soit avec les rectilignes, et en méme temps sur l'emploi de la progression géométrique pour la quadrature des paraboles et hyperboles a l'infini* (*Sobre a transformação e a simplificação das equações de lugares, pela comparação sob todas as formas de áreas* *curvilíneas, ou entre elas, ou com áreas retilíneas, e ao mesmo tempo sobre o emprego da progressão geométrica para a quadratura de parábolas e hipérboles ao infinito*), Fermat descobriu um dos chamados métodos de integração pré-cálculo que antecipou os resultados que obtemos quando calculamos a integral imprópria da função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ definida pela lei $f(x) = x^k$, onde $k \in \mathbb{Q}$, $k \neq -1$.

A obra desse autor foi desenvolvida utilizando geometria e álgebra elementares no cálculo de áreas de figuras planas, a partir de aproximações pelas chamadas quadraturas, com a utilização de progressões geométricas.

O artigo está estruturado por quatro itens: *Introdução***,** *Fermat e o Méthode de quadrature***,** *Uma Interpretação*, *Caso geral em linguagem e notação atuais***.** A metodologia de pesquisa empregada foi a bibliográfica e optamos por um texto livre de citações. No segundo item de nosso artigo e para contextos gerais sobre o tema ao longo de todo o texto utilizamos as referencias Boyer (1949), Katz (2009), e Mahoney (1994). Na interpretação que apresentamos no item 3, utilizamos fonte primária, Fermat (1896), além de consultas específicas em Heath (1956) e Heath (2002). Em nosso último item, utilizamos as referencias Baron (1987), Katz (2009), Lima (2009) e Stewart (2011).

2. Fermat e o *Méthode de quadrature*

Pierre de Fermat nasceu em Lomagne, em 1601 e morreu em Toulouse, em 1665, ambas cidades francesas. Trabalhou como advogado no Parlamento de Toulouse e sempre tratou a Matemática como um hobby. Apesar de matemático amador, possui obras em vários campos da Matemática, sendo que sua maior contribuição foi no campo da Teoria dos Números. Por suas obras é considerado o maior matemático francês do século XVII.

No que diz respeito ao desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral, além de estabelecer técnicas inovadoras para o desenvolvimento dos métodos de integração de funções, devemos destacar que Fermat foi um dos inventores da Geometria Analítica, apresentando um trabalho recíproco ao de Descartes, e que tal obra possibilitou-lhe abordar seu método de quadratura de maneira diferenciada.

Influenciado, principalmente, pelas obras *Sobre espirais* e *A quadratura da parábola* de Arquimedes de Siracusa (287-212 a.C.) e *Cônicas* de Apolônio de Perga (250-175 a.C.), sendo que nessa última, encontram-se as propriedades específicas das hipérboles e parábolas, Fermat, no seu *Méthode de quadrature*, procurou seguir o método de quadratura de Arquimedes, que emprega o método de exaustão de Eudoxo de Cinido (408-355 a.C.), com o objetivo de calcular a área de uma região do plano delimitada por dois segmentos de reta, chamados assíntotas, e uma curva, parábola ou hipérbole. Entretanto, como iremos mostrar, Fermat percebeu a necessidade de uma modificação no método de Arquimedes no momento em que usou a ideia de infinito e associou os termos de uma dada progressão geométrica ao comprimento dos segmentos de reta que subdividiriam uma das assíntotas e que seriam bases de polígonos que inscrevem ou circunscrevem a curva dada. A soma das áreas desses polígonos seria a quadratura desejada.

Mas Fermat foi além e apresentou nesse trabalho duas abordagens, uma geométrica e outra algébrica. Isto é, entendemos que o *Méthode de quadrature* está dividido em duas partes. Na primeira parte, Fermat apresentou seus resultados, tal como descrevemos no paragrafo anterior, levando-se em conta um padrão de pensamento geométrico, comum da época, herança dos gregos, onde mostra uma técnica para quadrar quaisquer hipérboles e parábolas, utilizando as ferramentas matemáticas que estavam a sua disposição, a saber, teoria das proporções e divisão consecutiva de uma semirreta em consecutivos segmentos de reta, cujos comprimentos estão em progressão geométrica. Na segunda parte, com pensamento algébrico, apresentou esses mesmos resultados estabelecendo uma nova forma de redução de análise, pela qual a curva a ser quadrada está dada por uma equação, utilizando a obra em que inventou a Geometria Analítica.

Ele quadrou as curvas definidas pelas funções $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{1}{x^3}$, $y^2 = x$ e $y^3 = x^2$, e ao finalizar, o que consideramos ser a primeira parte desse trabalho, Fermat generalizou seu método para todas as hipérboles e parábolas.

Apresentaremos a seguir uma interpretação da obra, tomando as quadraturas da hipérbole $y = \frac{1}{x^2}$ e da parábola $y^2 = x$, tal como ele fez, e que, assim entendemos, representam cada grupo de curvas que Fermat quadrou. Depois propomos uma generalização desse método, considerando as ferramentas matemáticas que temos a disposição atualmente.

3. Uma Interpretação

Fermat iniciou seu tratado afirmando que todo o seu método derivava de uma propriedade bem conhecida da progressão geométrica, que apresentou como teorema:

> Dada uma progressão geométrica, cujos termos decrescem infinitamente, a diferença entre dois termos consecutivos dessa progressão está para o menor termo dessa diferença, assim como o maior termo está para a soma de todos os termos seguintes.

Usando esse teorema, ele começou a desenvolver seu método de quadratura. A seguir, analisamos dois casos contidos nessa obra: a quadratura da hipérbole $y = \frac{1}{x^2}$ e a quadratura da parábola $y^2 = x$.

3.1 Quadratura da hipérbole $y = \frac{1}{x^2}$

O objetivo de Fermat era calcular a área sob a curva END a partir do ponto G. Para tanto ele provou a seguinte afirmação: "*o espaço que tem GE por sua base e que é limitada por um lado pela curva ES, e por outro lado pela assíntota infinita GOR, é igual à área retilínea dada*", sendo a *área retilínea dada,* a área do paralelogramo ABGE, conforme figura 1 abaixo.

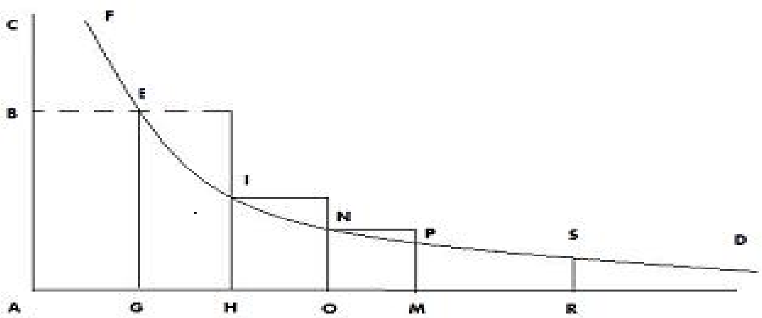

Figura 1

Para quadrar essa hipérbole, Fermat tomou como pontos de partida os seguintes aspectos:

(a) A construção da curva acima da mesma maneira que Apolônio em sua obra *Cônicas*. A figura acima obedece à propriedade dada pela igualdade constante das razões:

$$\frac{AH^2}{AG^2} = \frac{GE}{HI} \quad \text{e} \quad \frac{AO^2}{AH^2} = \frac{HI}{ON}\text{, etc.}$$

Observemos que, de acordo com a notação atual, essa propriedade é a lei que define a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, dada por $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

(b) As assíntotas RA e AC são estendidas infinitamente como a própria curva e têm um ângulo arbitrário RAC, isto é, o ângulo entre essas assíntotas não é necessariamente reto[1].

As condições assumidas indicam que os pontos G, H, O, M, ... determinam segmentos (AG, AH, AO, AM, ...), contidos na assíntota horizontal, cujas medidas estão em progressão geométrica.

Por cada um dos pontos G, H, O, M, ..., são construídos segmentos de reta GE, HI, ON, MP, e assim por diante, paralelos a assíntota AC, de tal maneira que uma extremidade desses segmentos pertença a assíntota horizontal AR e a outra extremidade pertença a curva construída.

Assim, determinam-se paralelogramos, de acordo com a figura 1.

Logo, podemos fixar:

(i) as proporções $\frac{AG}{AH} = \frac{AH}{AO} = \frac{AO}{AM} = \cdots$ razão da progressão geométrica;

(ii) as proporções $\frac{AG}{AH} = \frac{GH}{HO} = \frac{HO}{OM} = \cdots$;

(iii) as proporções $\frac{GE}{HI} = \frac{HI}{NO} = \frac{NO}{MP} = \cdots$.

Considerando que as áreas são constituídas das razões $\frac{GE}{HI}$ e $\frac{GH}{HO}$, e $\frac{GH}{HO} = \frac{AG}{AH}$, temos que $\frac{GE \text{ X } GH}{HI \text{ X } HO}$ é constituída das razões $\frac{GE}{HI}$ e $\frac{AG}{AH}$.

Por outro lado, por construção, temos $\frac{GE}{HI} = \frac{AH^2}{AG^2} = \frac{AO}{AG}$, devido à proporcionalidade dos termos.

Portanto, para a razão das áreas dos paralelogramos, teremos $\frac{GE \text{ X } GH}{HI \text{ X } HO} = \frac{AO}{AH} = \frac{AH}{AG}$.

E, da mesma forma pode ser provado que $\frac{HI \text{ X } HO}{NO \text{ X } OM} = \frac{AO}{AH}$.

[1] Nossa análise restringir-se-á ao caso em que RAC é um ângulo reto.

Assim, Fermat estabeleceu uma série de proporções, razões das progressões geométricas formadas pelos segmentos, alturas e áreas. E continuou:

> Mas as linhas AO, AH, AG, que formam as razões dos paralelogramos, constituem-se por construção, uma proporção geométrica; daí o número infinito de paralelogramos GE X GH, HI X HO, NO X OM, etc., formarão uma progressão geométrica contínua, cuja razão é $\frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{AG}}$.

Munido de todos esses resultados parciais, Fermat utilizou o teorema que constituiu o seu método:

> A diferença entre dois termos da razão, GH, estará para o menor termo, AG, como o primeiro termo da progressão dos paralelogramos, (i.e. paralelogramo GE X GH) está para a soma de todos os outros números infinitos de paralelogramos, ou, seguindo a adequação de Arquimedes, para a figura limitada por HI, assíntota HR, e a curva estendida infinitamente IND.

Isto é, GH = AH-AG, que é a diferença entre dois termos consecutivos e

$$\frac{\mathrm{GH}}{\mathrm{AG}} = \frac{\mathrm{GE\ X\ GH}}{\mathrm{HI\ X\ HO+NO\ X\ OM+\cdots}}.$$

Se multiplicarmos $\frac{\mathrm{GH}}{\mathrm{AG}}$ por GE, então teremos $\frac{\mathrm{GH}}{\mathrm{AG}} = \frac{\mathrm{GE\ X\ GH}}{\mathrm{GE\ X\ AG}}$. Logo, $\frac{\mathrm{GE\ X\ GH}}{\mathrm{HI\ X\ HO+NO\ X\ OM+\cdots}} = \frac{\mathrm{GE\ X\ GH}}{\mathrm{GE\ X\ AG}}$.

Portanto, GE X AG = HI X HO + NO X OM +..., que corresponde à área da curva. E Fermat finalizou:

> Portanto, o paralelogramo GE X AG, que é uma área retilínea dada, é igual a figura supracitada; se somarmos GE X GH a ambos os lados, por causa das subdivisões sucessivas (dos segmentos), desaparecerão e serão reduzidas a nada, chegamos a essa verdade que seria fácil confirmar pela demonstração mais prolixa, realizada a maneira de Arquimedes: que nesse tipo de hipérbole, o paralelogramo AE é equivalente a figura limitada pela base GE, a assíntota GR, e a curva ED estendida infinitamente.

Isto é, GE X AG + GE X GH = GE X GH + HI X HO + NO X OM +...

Sendo que, quando Fermat disse *desaparecerão e serão reduzidas a nada*, referiu-se ao fato dos segmentos estabelecidos na assíntota horizontal serem subdivididos sucessivamente de forma que seus comprimentos tornaram-se aproximadamente iguais, assim como as áreas dos paralelogramos. Portanto, ele fez com que a soma das áreas dos paralelogramos fosse igual à área do primeiro paralelogramo ABEG.

3.2 Quadratura da parábola $y^2 = x$

Vejamos agora como Fermat quadrou a parábola $y^2 = x$, tomando como ponto de partida o modelo anterior.

Tomemos a curva delimitada pelos segmentos AB, que será a base da parábola ou aquilo que podemos interpretar como o eixo das ordenadas, e BC, que será seu diâmetro ou o que interpretamos como o eixo das abscissas, que goza da propriedade definida pela igualdade das razões: $\frac{AB^2}{IE^2} = \frac{BC}{CE}, \frac{IE^2}{ON^2} = \frac{CE}{CN}$, ...

Em notação atual, essa propriedade é a lei que define a função da parábola $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ dada por $f(x)^2 = x$.

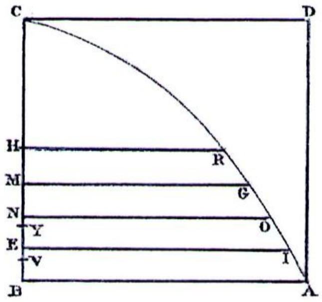

Figura 2

Nessas condições, os pontos B, E, N, M, H,... determinam os segmentos BC, EC, NC, MC, HC,... contidos no diâmetro BC, cujas medidas estão em progressão geométrica.

As áreas dos paralelogramos AE, IN, são constituídas das proporções: $\frac{AE}{IN} = \frac{AB}{IE} X \frac{BE}{EN}$.

Segundo Fermat:

> Mas, como $\frac{AB^2}{IE^2} = \frac{BC}{CE}$, se entre BC e CE tomarmos o meio proporcional CV, e entre EC e NC o meio proporcional YC, então as linhas BC, VC, EC, YC, NC,... formarão uma progressão geométrica, e teremos $\frac{BC}{EC} = \frac{BC^2}{VC^2}$; portanto, como $\frac{BC}{EC} = \frac{AB^2}{EI^2}$, $\frac{AB}{IE} = \frac{BC}{VC}$. Consequentemente, as razões dos paralelogramos $\frac{AE}{IN}$ são compostas das razões $\frac{BC}{VC}$ ou $\frac{VC}{CE}$ ou $\frac{EC}{YC}$ e da razão $\frac{BE}{EN}$ ou, como, $\frac{BC}{EC}$. Mas a razão composta de duas razões $\frac{BC}{CE}$ e $\frac{EC}{CY}$ é igual à razão $\frac{BC}{CY}$.

Entretanto, ele percebeu, devido à limitação que modelos geométricos nos impõem, a necessidade de uma adequação no procedimento utilizado na quadratura da hipérbole.

Ele acrescentou entre os pontos B, E, N, M, H,.., uma segunda divisão do diâmetro BC nos pontos V, Y, Z,...., que podem ser vistos na figura 2. Esses pontos representam meios proporcionais entre os segmentos, isto é, CV é o meio proporcional entre CB e CE, por exemplo. Então, segue diretamente que a razão do paralelogramo AB X BE para o paralelogramo IE X EN é $\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{IN}} = \frac{\mathrm{AB\ X\ BE}}{\mathrm{IE\ X\ EN}} = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CY}}$, e assim por diante, isto é, que a razão da série geométrica é $\frac{\mathrm{CY}}{\mathrm{BC}}$.

Depois, Fermat estabeleceu uma série de proporções para calcular a razão dos paralelogramos circunscritos, de acordo com o teorema que constitui o método:

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{IRCHE}} = \frac{\mathrm{BY}}{\mathrm{YC}} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{ABXBE}}{\mathrm{IRCHE}} = \frac{\mathrm{BC-CY}}{\mathrm{CY}}.$$

E para o paralelogramo $\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AIGRCB}} = \frac{\mathrm{BY}}{\mathrm{BC}}$.

Se multiplicarmos $\frac{\mathrm{BY}}{\mathrm{BC}}$ por AB, teremos $\frac{\mathrm{BY}}{\mathrm{BC}} = \frac{\mathrm{AB\ X\ BY}}{\mathrm{AB\ X\ BC}}$, sendo que AB x BC é a área do paralelogramo BD. Portanto, por aquilo que Fermat chamou de adequalidade, que para ele significava aproximadamente igual a, por tornar os elementos envolvidos (segmentos, áreas) infinitamente pequenos:

$$\frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{ARCB}} = \frac{\mathrm{AB\ X\ BY}}{\mathrm{BD}} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{AB\ X\ BY}} = \frac{\mathrm{ARCB}}{\mathrm{BD}} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{AB\ X\ BE}}{\mathrm{AB\ X\ BY}} = \frac{\mathrm{ARCB}}{\mathrm{BD}} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{BY}} = \frac{\mathrm{ARCB}}{\mathrm{BD}} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{ARCD}} = \frac{\mathrm{BY}}{\mathrm{BE}}.$$

Após todos os procedimentos acima, ele usou a palavra arbitrariedade das linhas BV, VE, EY, para assumir que as diferenças entre os termos da progressão geométrica são aproximadamente iguais:

> Mas por causa da adequalidade e seções extremamente pequenas, no qual as linhas BV, VE, EY representam as diferenças das proporcionais que são supostas quase iguais uma a outra, BY está para BE como 3 está para 2.

Isto é, apenas quando os segmentos da primeira divisão são adequados, então, os intervalos da segunda divisão o são. Logo,

$$\mathrm{BV} \approx \mathrm{VE} \approx \mathrm{EY}$$

$$\mathrm{BY} = \mathrm{BV} + \mathrm{EV} + \mathrm{EY}, \text{e } \mathrm{BE} = \mathrm{BV} + \mathrm{EV}$$

$$\frac{\mathrm{BY}}{\mathrm{BE}} = \frac{3}{2} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{ARCD}}.$$

Portanto, $\frac{\mathrm{BY}}{\mathrm{BE}} = \frac{3}{2}$ é a razão do paralelogramo BA x BC e para a área do segmento parabólico. Fermat finalizou dizendo:

> A razão do paralelogramo BD para a figura é, portanto, a razão 3 para 2 , que está de acordo com a quadratura da parábola dada por Arquimedes, embora ele tenha usado a progressão geométrica de um modo diferente. Se, além disso, achei-o necessário para mudar o método dele e pegar uma rota fora dele, é porque tenho certeza que por seguir exatamente a trilha deste grande geômetra, acharíamos a progressão geométrica sendo inútil para a quadratura de um número infinito de outras parábolas, enquanto nosso procedimento imediatamente dá a demonstração e as regras gerais para todas as parábolas, sem exceção.

Onde explicou o motivo pelo qual não podia usar a quadratura de Arquimedes para outras parábolas, afirmação que fez logo no início de seu tratado.

4. Caso geral em linguagem e notação atuais

Como dissemos, o procedimento de Fermat para determinar a área sob hipérboles e parábolas é o de usar o artifício de dividir a assíntota horizontal ou aquilo que podemos interpretar como o eixo das abscissas, a partir de um ponto qualquer pertencente à assíntota horizontal, em segmentos adequados, ou aproximadamente iguais, mas que estão em progressão geométrica. Dessa forma, ele satisfaz as duas exigências do método de Arquimedes, que na realidade é o método de exaustão desenvolvido por Eudoxo e utilizado por Arquimedes em suas demonstrações: a primeira, circunscrever a área toda com paralelogramos erguidos sobre os segmentos da assíntota horizontal. A segunda, estabelecida por uma construção, é que a soma das diferenças entre os termos consecutivos da progressão geométrica definida pelas áreas dos paralelogramos, a partir do segundo, seja igual à área do primeiro paralelogramo circunscrito, que poderia ser infinitamente pequeno pela escolha de um intervalo adequadamente pequeno como base.

E a condição para fazer-se a soma das diferenças ser igual ao primeiro paralelogramo, é que ela deva ter segmentos de medidas aproximadamente iguais sobre a assíntota horizontal. A construção descrita acima satisfaz tais exigências através da adequalidade.

Vejamos, então, como transportar o método geométrico de Fermat para um raciocínio algébrico, característico dos dias atuais.

Então, o que queremos agora é calcular o valor da área sob a curva dada pela função $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}$ definida pela lei $f(x) = x^{k}$, onde $k \in \mathbb{Q}$, $k \neq -1$.

Vamos dividir em dois casos: (i) $k < 0$, $k \neq -1$; (ii) $k \geq 0$.

(i) Primeiro caso: $k < 0$, $k \neq -1$.

Vamos construir o gráfico da hipérbole dada pela função $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{+}$ definida pela lei $f(x) = \frac{1}{x^{k}}$. Em seguida, devemos dividir o eixo das abscissas tomando um ponto qualquer sobre ele, digamos x_0. Depois, à direita de x_0, determinamos os pontos $\frac{m}{n}x_{0,}$ $(\frac{m}{n})^2 x_{0,}$, $(\frac{m}{n})^3 x_{0,}$ $(\frac{m}{n})^3 x_{0,}$ ..., que estão em uma progressão geométrica de razão $\frac{m}{n}$, e que m e n sejam valores quaisquer inteiros positivos, fixos, tal que m > n, $\frac{m}{n} \rightarrow 1$, isto é, tal que o valor da razão possa ser estabelecido tão próximo de 1 quanto se deseje.

Justificamos o fato de adotarmos m > n a fim de estabelecer uma progressão geométrica crescente $(\frac{m}{n} > 1)$ para o eixo das abscissas. Aplicando a lei da função, obtemos as alturas dos paralelogramos e assim, calculamos suas áreas. Essas áreas formam uma progressão geométrica decrescente, como será mostrado a seguir, satisfazendo a condição apresentada por Fermat logo no inicio de seu tratado, em forma de teorema.

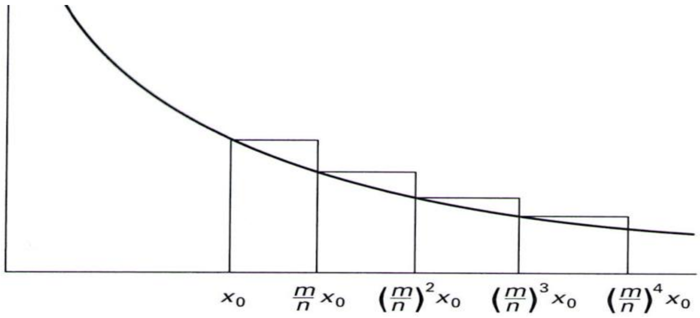

Figura 3

A seguir, calculam-se as áreas dos paralelogramos circunscritos que formam uma progressão decrescente de razão $\frac{n}{m}$, como será visto abaixo:

Por meio da lei $y = x^{-k}$, podemos calcular a área de cada paralelogramo.

O primeiro paralelogramo tem área: $A_1 = (\frac{m}{n}x_0 - x_0).y_0$.

Calculando o valor de y_0 para x_0, vem que $y_0 = x_0{}^{-k}$ e substituindo na expressão acima, temos: $A_1 = (\frac{m}{n} - 1).x_0.\ x_0{}^{-k} = (\frac{m}{n} - 1).\ x_0{}^{-k+1}$.

O segundo paralelogramo tem área: $A_2 = [\ (\frac{m}{n})^2 x_0 - (\frac{m}{n})\ x_0].\ y$.

Calculando o valor de y para $x = \frac{m}{n}x_0$, vem que $y = (\frac{m}{n}x_0)^{-k}$ e substituindo na expressão acima, temos:

$$A_2 = [\ (\frac{m}{n})^2 x_0 - (\frac{m}{n})\ x_0]\ .\ (\frac{m}{n}\ x_0)^{-k}$$

$$A_2 = (\frac{m}{n})\ (\frac{m}{n} - 1)x_0.\ (\frac{n}{m})^k\ x_0{}^{-k} = \left(\frac{m}{n}\right).(\frac{n}{m})^k.(\frac{m}{n} - 1)x_0.\ x_0{}^{-k}$$

$$A_2 = (\frac{n}{m})^{k-1}.(\frac{m}{n} - 1).\ x_0{}^{-k+1}.$$

Mas $(\frac{m}{n}$ - $1).x_0{}^{-k+1}$ é a área do primeiro paralelogramo. Então, substituindo na expressão, temos que: $A_2 = (\frac{n}{m})^{\,k-1}\,A_1$.

De maneira análoga a determinação de A_2, deduzimos a área do terceiro paralelogramo com altura $[(\frac{m}{n})^{-2k}.\,x_0^{-k}]$:

$$A_3 = [\,(\frac{m}{n})^3 x_0 - (\frac{m}{n})^2\,x_0]\,.[(\frac{m}{n})^{-2k}.\,x_0^{-k}] = (\frac{m}{n})^2.\left(\frac{m}{n} - 1\right).x_0.(\frac{n}{m})^{2k}\,x_0{}^{-k}$$

$$A_3 = (\frac{m}{n})^2.(\frac{n}{m})^{2k}.\left(\frac{m}{n} - 1\right).x_0.x_0{}^{-k} = (\frac{n}{m})^{2(k-1)}.\left(\frac{m}{n} - 1\right).x_0{}^{-k+1}$$

Como a área do primeiro paralelogramo é $(\frac{m}{n}$ - $1)x_0{}^{-k+1}$, temos:$A_3 = (\frac{n}{m})^{2(k-1)}A_1$.

Logo, as áreas dos paralelogramos formam a progressão geométrica:

$$(A_1,\,(\frac{n}{m})^{\,k-1}\,A_1,\,(\frac{n}{m})^{2(k-1)}\,A_1,\,(\frac{n}{m})^{3(k-1)}A_1\ \ldots.)\ \text{de razão}\ (\frac{n}{m})^{\,k-1}.$$

A soma das áreas de todos os paralelogramos circunscritos é:

$$A = A_1 + (\frac{n}{m})^{\,k-1}\,A_1 + (\frac{n}{m})^{2(k-1)}\,A_1 + (\frac{n}{m})^{3(k-1)}A_1\ \ldots$$

$$A = A_1\,[1 + (\frac{n}{m})^{\,k-1} + (\frac{n}{m})^{2(k-1)} + (\frac{n}{m})^{3(k-1)}\ldots]$$

Nesse ponto chegamos a uma progressão geométrica infinita e aplicando a conhecida fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica decrescente $S = \frac{a_1}{1-q}$, obtemos: $A = \frac{1}{1-(\frac{n}{m})^{k-1}}\,A_1$.

Substituindo-se A_1 ficamos com: $A = \frac{1}{1-(\frac{n}{m})^{k-1}}\,(\frac{m}{n}$ - $1)\ x_0{}^{-k+1}$. Reescrevendo a expressão $A = [\frac{1}{1-(\frac{n}{m})^{k-1}}\,(\frac{m}{n} - 1)]$, teremos:

$$\frac{1}{(1-\frac{n}{m})^{k-1}}(\frac{m}{n} - 1) = \frac{\frac{m}{n}(1-\frac{n}{m})}{[1-\left(\frac{n}{m}\right)^{k-1}]} = \frac{(\frac{n}{m}-1)}{\frac{n}{m}\,[\left(\frac{n}{m}\right)^{k-1}-1]} = \frac{(\frac{n}{m}-1)}{[\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{n}{m}\right)^{k-1}-\frac{n}{m}]} = \frac{1}{\frac{\left[\left(\frac{n}{m}\right)\left(\frac{n}{m}\right)^{k-1}-\frac{n}{m}\right]}{\left(\frac{n}{m}-1\right)}}$$

Esse último resultado pode ser interpretado como a soma dos (k-1) termos da progressão geométrica finita de primeiro termo $\frac{n}{m}$ e razão $\frac{n}{m}$. De fato, dado que:

$$(a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^{n-1}) = S_n = \frac{a_1.q^n - a_1}{q-1}\text{, vem que}$$

$$A = \frac{1}{[\frac{n}{m}+\left(\frac{n}{m}\right)^2+\left(\frac{n}{m}\right)^3 + \ldots + (\frac{n}{m})^{k-1}]}\,\frac{1}{x_0{}^{k-1}}.$$

Quando em seu tratado diz *serão reduzidas a nada*, ele fez com que $\frac{n}{m}$ se aproximasse de 1, encontrando, assim, o valor da soma. Portanto, o valor da soma das áreas: $A = \frac{1}{(k-1)\,x_0{}^{k-1}} = \frac{1}{k-1}\,x_0 y_0$.

(ii) Segundo caso: $k \geq 0$

Para determinar a área sob a parábola definida pela lei $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{+}$dada por $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x^k}$, devemos usar o artifício de dividir aquilo que podemos interpretar como o eixo das abscissas, em segmentos adequados.

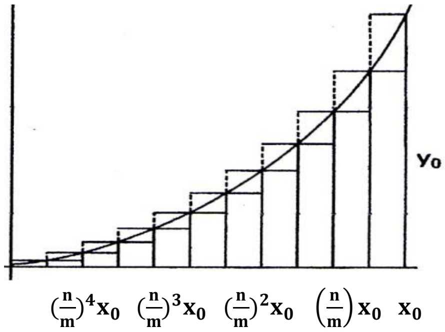

Figura 4

Em princípio, vamos construir o gráfico de uma parábola e dividir o eixo das abscissas tomando um ponto qualquer, digamos x_0, sobre ele. Em seguida, à direita de x_0, determinamos os pontos, $\frac{n}{m} x_0$, $(\frac{n}{m})^2 x_0$, $(\frac{n}{m})^3 x_0$, ..., que formam uma progressão geométrica de razão $\frac{n}{m}$, e que m e n sejam valores quaisquer inteiros positivos, fixos, com m > n, $\frac{n}{m} \to 1$, isto é, tal que o valor da razão possa ser estabelecido tão próximo de 1 quanto se deseje.

Dessa forma, ao efetuarmos a divisão do eixo das abscissas da direita para a esquerda, estabelecemos uma progressão decrescente cuja razão é menor que 1 ($\frac{n}{m} < 1$). Ao aplicar a lei da função obtemos as alturas dos paralelogramos e, assim, calculamos suas áreas, como demonstraremos abaixo. Essas áreas formam uma progressão geométrica decrescente, o que está de acordo com a propriedade da progressão geométrica, enunciada por Fermat, no início de seu tratado a partir do qual ele desenvolveu todo seu método.

Por meio da lei $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x^k}$, podemos calcular a área de cada paralelogramo.

O primeiro paralelogramo tem área: $A_1 = (x_0 - x_0 \frac{n}{m})\, y_0$.

Calculando o valor de y para x_0, segue que, aplicando a lei da parábola, temos que $y_0 = x_0^k$ e substituindo na expressão acima: $A_1 = (1-\frac{n}{m})\, x_0 .\, x_0^k = (1-\frac{n}{m})\, x_0^{k+1}$.

O segundo paralelogramo tem área: $A_2 = [\, (\frac{n}{m})\, x_0 - (\frac{n}{m})^2\, x_0]. \mathrm{y}$.

Calculando o valor de y, por aplicar a lei da parábola: $\mathrm{y} = (\frac{n}{m} x_0)^k$ e substituindo na expressão acima, temos: $A_2 = (\frac{n}{m})\, (1-\frac{n}{m})\, x_0 (\frac{n}{m}\, x_0)^k = (\frac{n}{m})\, (1-\frac{n}{m})\, x_0 . (\frac{n}{m})^k\, x_0{}^k$

$$A_2 = \left(\frac{n}{m}\right) . \left(\frac{n}{m}\right)^k \left(1-\frac{n}{m}\right) x_0 . x_0{}^k = \left(\frac{n}{m}\right)^{k+1} \left(1-\frac{n}{m}\right) . x_0{}^{k+1}$$

Como a primeira área vale $(1-\frac{n}{m}).x_0^{k+1}$, substituímos na expressão acima:

$$A_2 = \left(\frac{n}{m}\right)^{k+1} A_1$$

De maneira análoga a determinação de A_2, deduzimos a área do terceiro paralelogramo com altura $y = [(\frac{n}{m})^2 x_0]^k$:

$$A_3 = \left[\left(\frac{n}{m}\right)^2 x_0 - \left(\frac{n}{m}\right)^3 x_0\right] . y = \left(\frac{n}{m}\right)^2 \left(1-\frac{n}{m}\right) x_0 \left(\frac{n}{m}\right)^{2k} x_0{}^k = \left(\frac{n}{m}\right)^2 . \left(\frac{n}{m}\right)^{2k} \left(1-\frac{n}{m}\right) x_0 . x_0{}^k$$

$$A_3 = \left(\frac{n}{m}\right)^{2(k+1)} \left(1-\frac{n}{m}\right) . x_0{}^{k+1} \Leftrightarrow A_3 = \left(\frac{n}{m}\right)^{2(k+1)} A_1 .$$

Logo, as áreas dos paralelogramos formam a progressão geométrica:

$$\left(A_1, \left(\frac{n}{m}\right)^{k+1} A_1, \left(\frac{n}{m}\right)^{2(k+1)} A_1, \left(\frac{n}{m}\right)^{3(k+1)} A_1 \ldots\right), \text{ de razão } \left(\frac{n}{m}\right)^{k+1}.$$

A soma das áreas de todos os paralelogramos circunscritos é:

$$A = A_1 + \left(\frac{n}{m}\right)^{k+1} A_1 + \left(\frac{n}{m}\right)^{2(k+1)} A_1 + \ldots = A_1 \left[1 + \left(\frac{n}{m}\right)^{k+1} + \left(\frac{n}{m}\right)^{2(k+1)} + \cdots\right].$$

Nesse ponto, chegamos a uma progressão geométrica infinita. Aplicando a conhecida fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica decrescente $S = \frac{a_1}{1-q}$, obtemos: $A = \frac{1}{1-(\frac{n}{m})^{k+1}} A_1$.

Substituindo-se A_1, ficamos com: $A = \frac{1}{1-(\frac{n}{m})^{k+1}} (1-\frac{n}{m}).x_0{}^{k+1}$. Reescrevendo a expressão $A = \frac{1}{1-(\frac{n}{m})^{k+1}} (1-\frac{n}{m})$, teremos:

$$\frac{1}{1-(\frac{n}{m})^{k+1}} \left(1-\frac{n}{m}\right) = \frac{(1-\frac{n}{m})}{[1-\left(\frac{n}{m}\right)^{k+1}]} = \frac{1}{\frac{\left[\left(\frac{n}{m}\right)^{k+1}-1\right]}{\left(\frac{n}{m}-1\right)}}.$$

Esse último resultado pode ser interpretado como a soma dos (k+1) termos de uma progressão geométrica finita de primeiro termo $\frac{n}{m}$ e razão $\frac{n}{m}$. De fato, dado que:

$$(a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \cdots + a_1 q^{n-1}) = S_n = \frac{a_1 . q^n - a_1}{q-1}, \text{ vem que}$$

$$A = \frac{1}{[\frac{n}{m} + \left(\frac{n}{m}\right)^2 + \left(\frac{n}{m}\right)^3 + \ldots + (\frac{n}{m})^k]} x_0^{k+1} .$$

Quando em seu tratado diz *serão reduzidas a nada*, ele fez com que $\frac{n}{m}$ se aproximasse de 1, encontrando, assim, o valor da soma. Portanto, o valor da soma das áreas:

$$A = \frac{x_0{}^{k+1}}{(k+1)} = \frac{1}{k+1} x_0 y_0 .$$

6. Resultados da pesquisa

Esse texto apresentou os resultados de uma pesquisa que buscou compreender como Pierre de Fermat (1601-1665), quadrou qualquer tipo de parábola ($y = px^k$) e hipérbole ($y = px^{-k}$). Nosso estudo procurou estabelecer uma comparação do que Fermat apresentou-nos quando da publicação da obra e o que podemos realizar sobre esse assunto com ferramentas matemáticas de nossos dias. Para encontrar a área sob uma curva, Fermat construiu essa curva, dividiu a assíntota horizontal de forma com que ela formasse uma progressão geométrica, fez uso de proporções para estabelecer as razões dessas progressões formadas pelos segmentos, alturas e áreas, usou uma propriedade da progressão geométrica, e, por fim, fez uso do conceito de adequalidade. Para fazermos a comparação com os procedimentos da obra, usando um raciocínio algébrico atual, construímos a curva, estabelecemos uma divisão semelhante ao da assíntota horizontal para o eixo das abscissas, calculamos as áreas dos paralelogramos que formaram uma progressão geométrica, aplicamos a fórmula da soma dos termos de uma progressão decrescente cujo resultado pode ser interpretado como a soma dos termos de uma progressão geométrica finita, e, para finalizar, fizemos com que a razão se aproximasse de 1, calculando, assim, a área sob essa curva.

Queremos destacar a criatividade com que Pierre de Fermat chegou aos resultados aqui apresentados. Sabendo de antemão da necessidade de quadrar uma curva que se estende infinitamente, ele resolveu um atual problema de integração por meio de álgebra e geometria elementares, desenvolvendo um procedimento que se adaptasse com a utilização de um resultado conhecido da progressão geométrica. Se por um lado essa proposta não foi aproveitada no estabelecimento dos conceitos do Calculo Diferencial e Integral, por outro, encaixa-se como um exemplo de desenvolvimento histórico de um conceito matemático, mostrando que a Matemática é uma produção humana, sujeita a tentativas, acertos e erros para seu desenvolvimento.

7. Referências

BARON, Margaret E. *The origins of the infinitesimal calculus*. New York: Dover Publications, 1987.

BOYER, Carl B. *The history of the calculus and its conceptual development.* New York: Dover Publications, 1949.

FERMAT, Pierre de. *Varia Opera Mathematica – Ouvres de Fermat.* Paris: Gauthier-Villars et fils, Impremiurs Libraires, 1896. v. 3, p. 216-224. Disponível em: <http://wlym.com/~animations/fermat/>. Acesso em: 10 jan. 2012.

HEATH, T. L. Euclid: *The thirteen books of the elements.* 2. ed. New York: Dover Publications, Inc, 1956. v.1

HEATH, T.L. *The works of Archimedes*. New York: Dover Publications, 2002.

KATZ, Victor J. *A history of mathematics an introduction*. 3. ed. Boston: Pearson Education, 2009.

LIMA, Elon Lajes. *Logaritmos*. 4. ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2009.

MAHONEY, Michael Sean**.** *The Mathematical Career of Pierre de Fermat 1601 – 1665*. 2. ed. New Jersey: Princenton University Press, 1994.

STEWART, James. *Cálculo.* Trad. Antonio Carlos Moretti, Antonio Carlos Gilli Martins. São Paulo: Cengage Learning, 2011. v.1