

## A FÓRMULA DE PICK EM UMA EXPERIÊNCIA PEDAGÓGICA COM ATIVIDADES DE INVESTIGAÇÃO MATEMÁTICA

Raquel Gomes de Oliveira

Faculdade de Ciências e Tecnologia-FCT-Unesp

[raqueloliveira@fct.unesp.br](mailto:raqueloliveira@fct.unesp.br)

### Resumo:

Nesta experiência didática, buscou-se desenvolver uma prática pedagógica para o ensino e a aprendizagem da Fórmula de Pick, na qual orientações didáticas disponibilizadas pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo foram adaptadas, conforme princípios didáticos encontrados em tarefas de investigações matemáticas. Duas licenciandas de Matemática desenvolveram a experiência didática com uma turma de 8º ano de uma escola estadual pública em 2012. As observações e reflexões realizadas possibilitam afirmar que as futuras professoras de Matemática tiveram oportunidades de realizar uma prática pedagógica docente caracterizada pela reflexão na prática e para prática pedagógica à medida que os alunos de 8º ano tiveram condições de desenvolvimento de diferentes habilidades matemáticas, dado que estiveram envolvidos com o fazer Matemática no sentido de criar hipóteses e conjecturas, a partir de condições e necessidades encontradas, refletindo sobre a coerência dos resultados obtidos e socializando esses resultados com os colegas de turma.

**Palavras-chave:** Ensino e Aprendizagem de Conceitos Matemáticos; Teorema de Pick; Atividade de Investigação Matemática.

### Introdução

Esta experiência didática está vinculada a um projeto que foi elaborado buscando atender aos requisitos para participar do Projeto Núcleo de Ensino da Pró-Reitoria de Graduação (PROGRAD) da Universidade Estadual Paulista-UNESP. Desde a escolha do tema, como da metodologia para seu desenvolvimento, foram consideradas ações que primassem pela formação inicial de professores de Matemática para a Educação Básica e também pela formação continuada do professor de Matemática, através de observação e de intervenção na prática pedagógica de Matemática, desenvolvendo e aplicando material didático. Especificamente, essas ações buscaram priorizar questões de ensino e aprendizagem pertinentes ao conceito de área de figuras geométricas planas, utilizando a Fórmula de Pick, além de considera atuais orientações curriculares para o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos na escola.

Atualmente, é possível identificar no currículo de Matemática do Estado de São Paulo pressupostos sobre o ensino e aprendizagem do conceito de área de figuras geométricas planas que já eram encontrados na Proposta Curricular de 1986 e nos PCNs de 1997. Entre estes pressupostos está a ideia na qual o estudo de medidas, além de

possibilitar a compreensão de relações geométricas básicas, deverá consolidar o entendimento do conceito de número pelo aluno, Portanto, nossa prática pedagógica buscou acatar essa ideia, procurando saber também sobre a aprendizagem do conceito de áreas utilizando referenciais de aprendizagem que subsidiam uma Atividade de Investigação em Matemática e que estão sistematizados em uma aula do Portal do Professor do MEC.

## 1. Fundamentação teórica

Para o desenvolvimento do projeto, dois conceitos foram extremamente relevantes: atividade de investigação matemática e a Fórmula de Pick. Basicamente, uma investigação é realizada quando:

... formulamos as nossas próprias questões e procuramos responder-lhes, de modo tanto quanto possível fundamentado e rigoroso. Em contexto de ensino, aprendizagem ou formação, investigar não significa necessariamente lidar com problemas na fronteira do conhecimento nem com problemas de grande dificuldade. Significa, apenas trabalhar a partir de questões que nos interessam e que se apresentam inicialmente confusas, mas que conseguimos clarificar e estudar de modo organizado. (PONTE, 2003, p.2).

Uma atividade de investigação matemática pode ser identificada enquanto uma proposta de trabalho para o ensino e aprendizagem de conceitos matemáticos escolares que é caracterizada, de acordo com Ponte, Ferreira, Varandas, Brunheira Oliveira (1999), por quatro momentos principais, que requerem do aprendiz ações específicas:

**Quadro 1- Momentos na realização de uma investigação matemática**

<b>Momentos de uma Investigação Matemática</b>	<b>Ações a serem realizadas</b>
I. Formulação de questões	<ul style="list-style-type: none"><li>• Reconhecer uma situação problemática</li><li>• Explorar a situação problemática</li><li>• Formular questões</li></ul>
II. Formulação de conjecturas	<ul style="list-style-type: none"><li>• Organizar dados</li><li>• Formular conjecturas</li></ul>
III. Teste e reformulação de conjecturas	<ul style="list-style-type: none"><li>• Realizar testes</li><li>• Refinar uma conjectura</li></ul>
IV. Justificativa, argumentação e avaliação	<ul style="list-style-type: none"><li>• Justificar uma conjectura</li><li>• Avaliar o raciocínio ou o resultado do raciocínio</li></ul>

Fonte: quadro elaborado a partir de Ponte et al. 1999.

Tomar as atividades de investigação na Matemática escolar enquanto uma tendência metodológica alternativa ao que se denomina “modo tradicional de ensinar”

supõe que as atividades de investigação têm por princípio outros entendimentos sobre a origem e a natureza do saber matemático, que se identificam com a Matemática enquanto uma construção impregnada de necessidades e condições humanas sujeita a explorações, investigações, conjecturas, testes, provas, refutações e argumentações. Portanto, situações pedagógicas para o ensino e a aprendizagem de conceitos matemáticos, por meio de tarefas de investigação, são caracterizadas pela participação do aluno no processo de construir conhecimento matemático. Processo que acaba propiciando dúvidas, erros, conjecturas (levantamento de hipóteses), criações, argumentação, induções e deduções, que antecedem a sistematização desse conhecimento.

Como afirmado anteriormente, outro conceito relevante ao nosso projeto é a Fórmula de Pick<sup>1</sup>. De acordo com O'Connor e Robertson (2010), a Fórmula de Pick versa sobre geometria reticular. O plano torna-se uma rede na qual são criados dois sistemas de linhas paralelas igualmente espaçadas no mesmo. Pick (1859-1942) chama estas linhas de "principais linhas reticulares" e seus pontos de interseção são chamados de "pontos reticulares". Um ponto sempre deve distar de uma mesma unidade em relação ao próximo ponto sobre uma linha imaginada na posição vertical ou horizontal. A ideia fundamental da Fórmula de Pick é mostrar que é possível calcular a área de um polígono simples a partir da contagem de pontos do reticulado no qual este polígono está inscrito.

Na figura 1 tem-se que B (os pontos de fronteira de P) = 26 pontos, I (os pontos interiores de P) = 60 pontos. Aplicando a Fórmula de Pick chega-se que o valor da área da superfície P é de 72 unidades de medida.

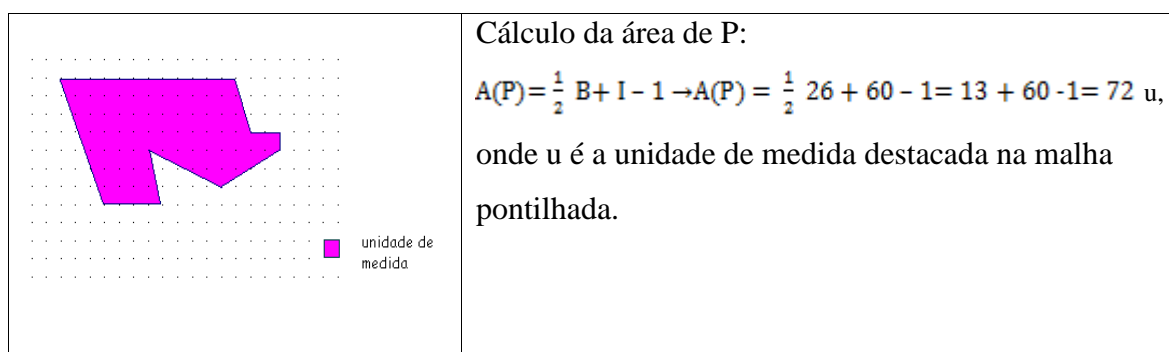


Figura 1: exemplo de contexto de aplicação da Fórmula de Pick

Como toda fórmula matemática, a fórmula de Pick é uma síntese dos processos de raciocínio que foram utilizados para se determinar a área de figuras regulares e não

<sup>1</sup> O matemático George Alexander Pick nasceu na Áustria, em Viena, em 10 de agosto de 1859 e morreu em um campo de concentração nazista em 26 de julho de 1942.

regulares em determinados contextos. Logo, a fórmula de Pick traz em si a estética da elaboração matemática e a funcionalidade em termos de encurtamento de tempo a fim de que sejam cumpridos certos objetivos, como exemplo, determinar a área de uma região fotografada por um satélite.

## **2. Procedimentos metodológicos**

A experiência didática foi desenvolvida por duas alunas do curso de licenciatura em Matemática de uma universidade pública do Estado de São Paulo, com 10 alunos de uma turma de 8º ano de uma Escola Estadual Pública também do Estado de São Paulo. As ações desenvolvidas contaram com a supervisão da professora universitária, que era a coordenadora do projeto no qual se propunha o desenvolvimento dessa experiência, do apoio da direção, dos coordenadores pedagógicos e dos funcionários da referida escola.

A necessidade de se respeitar tanto a agenda escolar, como o desenvolvimento curricular do 8º ano fez com que o trabalho com área de figuras geométricas e com a Fórmula de Pick não ocorresse logo nos primeiros meses do ano letivo. Isto permitiu que fossemos parceiras da professora de Matemática no trabalho didático com outros conteúdos ao observarmos a sala de aula a fim de investigar quais eram as dificuldades dos alunos em alguns conceitos matemáticos, auxiliando a professora da escola, esclarecendo individualmente dúvidas dos alunos durante a resolução das atividades, e desta forma adquirindo maior proximidade para com os alunos a fim de que essas dificuldades fossem superadas.

Com o objetivo de saber sobre os conhecimentos e dificuldades que os alunos possuíam, quanto aos conceitos de área de figuras geométricas planas que estavam sobre uma malha quadriculada, foi aplicado um pré-teste que era composto de três questões que abordavam o cálculo de figuras geométricas planas conhecidas e não conhecidas pelos alunos. Os alunos puderam escolher dentre três métodos para o cálculo de área, esses métodos eram: Método de cálculo de área através de um Exemplo Dado; Método de cálculo de área através de Contagem e Método de cálculo de área através de Aproximação.

De maneira geral, os resultados encontrados no pré-teste confirmaram a ideia já existente na qual apresentar a Fórmula de Pick, no modo sistematizado, seguido de um exemplo de uma aplicação prática para depois pedirmos exercícios semelhantes ao exemplo dado, certamente, para esses alunos não seria proveitoso didaticamente. Isto







porque os resultados do pré-teste apontaram dificuldades primárias ligadas: 1) ao cálculo da área de figuras geométricas conhecidas, tais como: retângulo, quadrado, triângulo; 2) à utilização da contagem de uma dada unidade de medida para se chegar à área de uma região e 3) à interpretação de um exemplo dado para o cálculo de área por aproximação.

Por fim, foi realizada uma pesquisa de material didático para encontrar pressupostos do trabalho com Atividade de Investigação Matemática na qual pesquisamos materiais didáticos e sugestões de aula de Matemática que estão hospedados no Portal do Professor do MEC. Escolhida a sugestão de aula, reelaboramos a mesma em termos do tempo que tínhamos para trabalhar nas aulas de Matemática na escola, especificamente com o assunto Fórmula de Pick.

## 2.1 A experiência didática com a Fórmula de Pick

Nosso trabalho didático com a Fórmula de Pick buscou desenvolver as atividades do quadro 2. O trabalho foi realizado na sala de informática da escola e teve duração de 4 aulas de Matemática

**Quadro 2: roteiro de atividades utilizado para o trabalho pedagógico com a Fórmula de Pick**

Atividade 1: calcule a área das figuras abaixo:					
					
figura 1		figura 2			
Atividade 2: determinar área dos polígonos convencionais					
Numero de lados do polígono	de	Cálculo da área do polígono pela fórmula	Número de pontos que estão do lado de dentro da figura	Número de pontos pelos quais passa o contorno da figura	Fórmulas tradicionais
					<i>Base X altura</i>
					$\frac{(B.maior+b.menor) \times altura}{2}$
					$\frac{base \times altura}{2}$
					$\frac{base \times altura}{2}$
<ol style="list-style-type: none"> <li>1. Existe alguma relação entre o valor encontrado para a área da figura e os valores de I e de B?</li> <li>2. Se existe, é possível expressar essa relação na forma de uma fórmula matemática? Como seria essa fórmula? Acessar : <a href="http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_277_g_1_t_3.html">http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_277_g_1_t_3.html</a></li> </ol>					

Durante a atividade de preenchimento da tabela foram feitas questões, tais como: “Como vocês chegaram ao valor da área da figura 2?”; “Há algo de diferente?”, cujas respostas dos alunos foram, por exemplo: “Utilizamos o mesmo método de cálculo de área da figura 1, mas agora não dá para achar a área porque “está” faltando partes no desenho”, “... esse desenho é mais difícil, porque os quadradinhos estão pequenos demais”.

Para calcular a área da figura 1, alguns alunos quadricularam a figura para contar os quadrados e assim obter o valor da área. A figura 2 também foi quadriculada. Mesmo assim, não conseguiram encontrar o valor exato da área. Esse modo de agir promoveu um conflito nos alunos, pois perceberam que não eram formadas metades do quadrado na figura, o que impossibilitava a contagem da unidade de medida. Esse conflito foi primordial para o significado da atividade 2. Já para a atividade 2, os alunos foram orientados a utilizar um geoplano virtual. Percebemos que alguns alunos construíram seus polígonos encontrando as áreas rapidamente, no entanto houve alunos que demoraram muito para desenhar o polígono e encontrar a área, pois apresentaram dificuldade em entender como calcular a área do polígono a partir da fórmula dada.

Para finalizar o preenchimento da tabela foi necessário trabalhar com os alunos os conceitos de ponto interior e ponto de fronteira de uma figura (ponto que estava sobre o contorno da figura), explorando conceitos do espaço interno e externo das figuras. Finalizando, perguntamos aos alunos se existia alguma relação entre o valor encontrado para a área de um polígono e os valores de pontos interiores e de fronteira desse mesmo polígono, com o objetivo de levar os alunos a refletirem sobre a utilização dos pontos externos e internos da figura no cálculo de sua superfície: - “Existe uma forma única de expressarmos a área desses polígonos, trabalhando apenas com os seus pontos?”. Os alunos demonstraram não acreditar que existisse uma única fórmula para a área dos polígonos, pois o que o colega havia falado parecia ter sentido.

Após afirmarmos a existência de uma única fórmula, propusemos aos alunos que a partir dos dados da tabela a encontrassem. Ao término do tempo estipulado, muitos alunos disseram não ter conseguido encontrar a fórmula. Aqui vivenciamos o momento IV do quadro 1, com a afirmação de um aluno: “- Vamos encontrar área somando os pontos de dentro com os de contorno!”. Esta afirmação do aluno foi considerada uma regra que deveria então ser testada e validada por todos os alunos da turma.

Sobre os pontos de fronteira e os pontos internos do retângulo, os alunos disseram: “- Quatro pontos de dentro e quatorze pontos de contorno”, nós dissemos aos alunos: “ -

Vamos somar os pontos, será que resultará no valor da área do retângulo?”, nesse momento um aluno disse: - “Quatro mais 14 é 18, mas a área é 10”. Assim, perceberam que não tinham uma fórmula: era preciso pensar em outra! Nesse momento, um aluno sugeriu que fizéssemos a subtração entre os pontos de fronteira e os pontos interiores. Para o primeiro polígono tivemos  $14 - 4 = 10$ , que era uma relação válida.

Perguntamos aos alunos se essa era realmente a fórmula, pois o resultado era o esperado, nesse momento explicamos aos alunos que quando procuramos uma fórmula precisamos entender que esta também deve ser válida para outros casos e não somente em um caso determinado, assim os alunos foram levados a concluir que se a fórmula procurada para encontrar a área era a fórmula que consistia em subtrair os pontos de fronteira dos pontos interiores, essa fórmula também teria que ser válida para encontrar a área dos outros polígonos da tabela, o que já não aconteceu para o trapézio, pois  $10 - 4 = 6$ : “- Então obtivemos o valor da área do trapézio?” Os alunos responderam: - “Não professora, porque a área é oito!”.

Desse modo perceberam que a fórmula encontrada não podia ser aquela que havíamos testado por último: “- Será que é necessário utilizar não só as operações de soma e subtração, mas as outras operações existentes, a multiplicação ou a divisão?”.

Nesse momento os alunos voltaram às tentativas para encontrar a fórmula, muitos alunos pensaram em contas diferentes, alguns alunos demonstravam ideias instigantes como multiplicar o número de pontos interiores com os pontos de fronteira, outro aluno usou uma tentativa de dividir o número dos pontos interiores com o número de pontos de fronteira, porém quando verificavam seus resultados percebiam que suas relações não eram válidas para encontrar a área. Assim, fizemos a seguinte questão: - "E se utilizarmos a quantidade de pontos de fronteira ou pontos do contorno do primeiro polígono da tabela e dividirmos por algum número e somarmos com o número de pontos interiores, resulta em algo útil?”.

Os alunos pensaram nessa possibilidade, mas não diziam nada, então induzimos o número, pois falamos: - “E se dividirmos o número de pontos de fronteira do retângulo por dois e somarmos o número resultante com o número de pontos interiores, teremos então quatorze dividido por dois que resulta em sete, sete mais quatro que resulta em onze, notemos que não obtivemos o valor da área do retângulo”.

Mesmo não obtendo o valor da área insistimos em utilizar a relação induzida para o segundo polígono, o trapézio. Utilizamos novamente a relação testada anteriormente no

retângulo e trapézio no triângulo resultando o número quatro que também não era a área do triângulo, nesse momento fizemos a seguinte relação no resultado obtido por último obtemos o valor de quatro, mas a área do triângulo é três para chegar ao valor da área do triângulo o que precisamos fazer?

Numa investigação matemática, parte-se de uma questão muito geral ou de um conjunto de informações pouco estruturadas a partir das quais se procura formular uma questão mais precisa e sobre ela produzir diversas conjecturas. Depois, testam-se essas conjecturas, algumas das quais, perante contra-exemplos, poderão ser desde logo abandonadas. Outras, sem se revelarem inteiramente correctas, poderão ser aperfeiçoadas. Neste processo, por vezes formulam-se novas questões e abandonam-se, em parte ou no todo, as questões iniciais. As conjecturas que resistirem a vários testes vão ganhando credibilidade, estimulando a realização de uma prova que, se for conseguida, lhes conferirá validade matemática. (PONTE, 2003, p.2)

Deixamos que os alguns pensassem por alguns instantes e após isso dissemos: - “Se subtraímos o número um de quatro temos três, será que isso é válido para os resultados que obtivemos para o retângulo e o trapézio em relação as suas áreas?”. Nesse momento os alunos pensaram e concordaram que precisava apenas subtrair o número 1 das contas estabelecidas pela fórmula para chegar aos valores de áreas esperados, ou seja, encontraram uma regularidade que permitiu deduzirem a fórmula, que foi sistematicamente apresentada para eles da seguinte forma:  $A = B/2 + I - 1$ , onde B representa a quantidade de pontos de fronteira e I representa a quantidade de pontos internos ao polígono.

Esse momento foi pedagogicamente muito interessante, pois todos os alunos participaram ativamente e conjuntamente na atividade, ouviram atentamente os aspectos envolvidos com a fórmula apresentada, além disso, vimos que os alunos ficaram muito surpresos com a fórmula, pois inicialmente muitos não acreditavam existir uma única fórmula para calcular a área de polígonos diferentes.

O trabalho com a Fórmula de Pick nos levou a situações didáticas nas quais os alunos puderam: reconhecer uma situação problemática, explorar essa a situação, formular questões, organizar dados e formular conjecturas, isto é, levantar hipóteses. Além disso, puderam argumentar sobre resultados encontrados e partilhá-los com os outros colegas. Ou seja, vivenciamos princípios e momentos de uma atividade de investigação matemática no sentido de Ponte, Ferreira, Varandas, Brunheira Oliveira (1999).

Quando aplicamos um pós-teste, que continha 3 questões sobre área de figuras planas sobre uma malha quadriculada, observamos que nenhum aluno deixou de usar a fórmula de Pick para exibir o valor de área, pois nenhum aluno adotou para cálculo de



área, fórmulas já conhecidas ou métodos intuitivos de aproximação para cálculo da área assim como utilizados por esses alunos na primeira atividade diagnóstica (Pré-Teste). Mesmo existindo erros de cálculo em algumas situações, os alunos no pós-teste evidenciaram reconhecer um contexto de trabalho com a Fórmula de Pick, o que possibilitou perceber que devem também ter entendido a ideia de uma fórmula matemática enquanto significativo e proveitoso instrumento de trabalho.

## 2. Considerações Finais

Na caracterização de uma atividade de investigação matemática é possível perceber pontos comuns entre uma atividade de investigação e as atuais referências pedagógicas (PCNs, 1997) quando se trata de aprender Matemática na escola. Um destes pontos diz respeito ao oferecimento de oportunidades para que o aluno aprenda Matemática na escola, a partir do envolvimento com o fazer Matemática, ou seja, intuindo, errando, levantando hipóteses, compartilhando ideias, buscando por regularidades e padrões, testando e validando resultados, chegando enfim, a formalizações, como, por exemplo, a Fórmula de Pick. Portanto, o que se pretendeu desenvolver com este projeto procurou atender tanto às atuais diretrizes curriculares para o ensino e aprendizagem de Matemática, como também oportunizar ao futuro professor de Matemática, condições de pensar e vivenciar uma prática pedagógica a partir das condições e necessidades escolares.

Através deste trabalho tivemos a oportunidade de incorporar a investigação matemática na nossa prática enquanto professor. Vivenciar uma experiência desta foi uma ótima oportunidade de formação profissional, pois pudemos refletir sobre algumas crenças e mitos acerca da profissão de professor. Experiências de sucesso ou insucesso nas atividades desenvolvidas pelos alunos trouxeram a possibilidade de trabalharmos na superação do medo que eles demonstravam em se expressar, e também na compreensão da matemática. Além disso, pudemos juntamente com os alunos perceber que uma fórmula matemática tem uma história de erros, acertos, partilhas e aceitações, o que certamente leva a ter atitudes muito mais participativas quando se ensina e se aprende Matemática.

## 3. Referências

BRASIL. **Ministério da Educação**. Portal do Professor. Disponível em: <http://portaldoprofessor.mec.gov.br>. Acesso em: 10 de set. 2011.

**BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental.** Parâmetros Curriculares Nacionais: introdução aos parâmetros curriculares nacionais/ Secretaria de Educação Fundamental. – Brasília: MEC/SEC, 1997.

O’CONNOR, J.; ROBERTSON, E. **Georg Alexander Pick**. Disponível em: <http://www-groups.dcs.st-and.ac.uk/~history/Biographies/Pick.html>. Acesso em: 14 de set. 2012.

PONTE, J. P. et. al. **A relação professor-aluno na realização de investigações matemáticas**. Lisboa: Projecto MPT e APM, 1999.

PONTE, J. P. Investigação sobre Investigações Matemáticas em Portugal. **Investigar em Educação**, 2, p. 93-169, 2003.

SÃO PAULO (Estado). SE/CENP. **Proposta Curricular para o Ensino de Matemática: 1º Grau**, 1986.