O GEOGEBRA COMO FERRAMENTA PARA O ESTUDO DAS CÔNICAS

Enio Marques Muniz Junior
Universidade Federal de Uberlândia
munizjunior.mat@gmail.com

Heinrich da S. Santos
Universidade Federal de Uberlândia
chsolidade@mat.pontal.ufu.br

Magna P. de Souza Ferreira Instituição
Universidade Federal de Uberlândia
magna.3@hotmail.com

Ranielle F. Brito de Freitas
Universidade Federal de Uberlândia
ranielle_brito@yahoo.com

Tânia M. Machado de Carvalho
Universidade Federal de Uberlândia
tania@pontal.ufu.br

Resumo:
O objetivo é descrever uma abordagem metodológica para o estudo das cônicas e demonstrar que é possível utilizar softwares de Geometria Dinâmica (ou Matemática Dinâmica) para abordar conteúdos de teor geométrico, de uma forma leve, interessante e objetiva, de tal modo que, o conhecimento das propriedades geométricas se relacione de forma natural com as propriedades algébricas. Optou-se uma abordagem geométrica buscando justificar todas as etapas das construções e procurou-se fornecer elementos para, caso deseje, introduzir a dedução formal das equações das parábolas, elipses e hipérboles. A metodologia foi aplicada, na forma de um minicurso voltado para alunos integrantes do PIBID e professores da rede pública de Ensino.

Palavras-chave: GeoGebra; cônicas; geometria dinâmica; ensino de matemática.

1. Introdução

Na Grécia antiga, surgiram três famosos problemas clássicos, os quais foram extremamente importantes no desenvolvimento da geometria. São eles: a duplicação do cubo, a trissecção do ângulo e a quadratura do círculo.

De acordo com uma antiga lenda, o povo de Atenas teria questionado o oráculo de Delos para saber como combater uma epidemia de peste que dizimava a cidade. A resposta foi que o altar do deus Apolo deveria ser duplicado. Surgiu então um problema: o altar tinha a forma de um cubo. Segundo a lenda os atenienses teriam construído outro altar de forma cúbica cujo lado era o dobro do primeiro, mas isto não teria feito com que a epidemia retrocedesse. Surgiu daí um dos primeiros grandes problemas da matemática: *determinar o lado de um cubo cujo volume seja o dobro de um cubo dado*. Este problema ficou conhecido como o *problema de Delos*.

Atribui-se a descoberta das curvas cônicas ao matemático Menecmo (aproximadamente 380 - 320 a.C.) que encontrou uma solução do *problema de Delos*. Depois de Menecmo os matemáticos gregos dedicaram-se ao estudo destas curvas, até sua sistematização geral por parte de Apolônio, que desenvolveu uma abordagem tão completa do assunto que permaneceu praticamente inalterada até a era moderna.

Apolônio (262 a.C. – 190 a.C.) nasceu em Perga, sul da Ásia menor. Sua obra mais conhecida intitula-se *Secções Cônicas* (Tratado Sobre as Cônicas) e graças a ela, Apolônio ficou conhecido como *O grande Geômetra*. Esse *Tratado* também é considerado como uma das maiores obras científicas do mundo antigo (EVES, 2004). Basicamente, o *Tratado* fala sobre as curvas formadas quando um plano corta a superfície de um cone de base circular por vários ângulos, e as propriedades dessas curvas. Elas foram denominadas de elipse, parábola e hipérbole.

Na educação brasileira, uma pesquisa realizada por Silva (2011) mostra que embora seja um tema tão antigo, o estudo das secções cônicas é considerado um assunto complexo pelos professores. Silva observou ainda que, dificilmente o docente leva atividades propostas em oficinas de formação continuada para a sala de aula.

Após realizar uma pesquisa com alunos do Ensino Médio, Lima (1999) observou que nenhum dos alunos participantes da pesquisa foi capaz de fornecer uma definição formal para elipse, parábola ou hipérbole, mas, no entanto, conseguiam caracterizar parcialmente estes objetos por meio de desenhos ou descrições de algumas de suas propriedades. De acordo com a autora, os estudantes tendem a confundir cada uma dessas curvas com seus registros de representação. Em relação à parábola, o registro mais usado é a equação; quanto à hipérbole, porém, o gráfico tem maior evidência. A autora observou ainda que, nos livros didáticos estudados durante sua pesquisa, as definições geométricas das cônicas são postas de lado para dar lugar a equações e construções de gráficos. Na opinião da autora, este fato gera confusão por parte dos alunos devido à influência da abordagem usada na aquisição do conceito.

No que segue, descreve-se uma abordagem metodológica para o estudo das cônicas utilizando softwares de Geometria Dinâmica (ou Matemática Dinâmica). A atividade foi apresentada, na forma de oficina, para um público de alunos de licenciatura integrantes do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação à Docência (PIBID) e professores da rede pública de Ensino. O software de nossa escolha foi o GeoGebra, mas qualquer outro programa computacional, com as mesmas características, pode ser utilizado, o Cabri Geomètre, Cinderela, etc. Abordou-se os conteúdos do ponto de vista geométrico, de forma objetiva, procurando imprimir leveza e buscando despertar o interesse dos participantes. Optou-se por uma abordagem que permitisse conhecer as propriedades geométricas dos objetos, relacionando-as, de forma natural, com as propriedades algébricas, justificando todas as etapas das construções, e, procurando fornecer elementos para, caso se desejasse, introduzir a dedução formal das equações das parábolas, elipses e hipérboles.

2. As atividades da oficina

Iniciou-se a oficina com atividades nas quais, os participantes realizavam construções para inferir propriedades e conceitos. Os conceitos que se pretendia introduzir eram r*etas perpendiculares*, b*issetriz de um ângulo*, *Mediatriz de um segmento*. Não se utilizou as ferramentas do GeoGebra para esta atividade. As regras acordadas entre os participantes permitiam apenas a utilização da ferramenta *reta definida por dois pontos*, *segmento definido por dois pontos* e a ferramenta *compasso*. A estratégia foi utilizar estas ferramentas como se fossem régua e compasso e a área de trabalho como folha de papel.

Aplicou-se o procedimento descrito, para a construção do ponto médio de um segmento. Para esta atividade primeiramente construiu-se um segmento de reta AB na área de trabalho. Utilizou-se a ferramenta *compasso* para traçar as circunferências $c(A,\overline{AB})$ e $d(B,\overline{AB})$, onde $c(A,\overline{AB})$ é a representação simbólica do círculo de centro em A e raio de medida $\overline{AB}$. Em seguida foi solicitado que se utilizasse a função ponto sobre objeto para marcar os pontos nos quais as duas circunferências se interceptavam. Observe que, propositadamente não utilizou-se a ferramenta ponto de interseção, pois fazia parte da estratégia levar os participantes a questionar a existência de uma ferramenta específica para isto. Marcados os pontos de interseção C e D entre as duas circunferências, foi solicitado que se construísse a reta determinada por estes dois pontos. É claro que aproveitou-se a oportunidade para discutir quantas retas poderiam existir passando por estes dois pontos.

Após a construção iniciou-se uma discussão sobre o ponto de interseção da reta com o segmento AB. Este ponto divide o segmento em dois segmentos de mesma medida? Passou-se então à fase de justificativa da construção e após a conclusão das atividades propôs-se aos participantes que pensassem num método para traçar uma reta perpendicular a um segmento AB, em um ponto qualquer, sem usar a ferramenta reta perpendicular.

Após a discussão das justificativas da construção da reta perpendicular a um segmento, passando por um ponto sobre a reta, modificou-se a atividade propondo agora a construção de uma reta perpendicular ao segmento, passando por um ponto fora da reta. Realizou-se então discussão no sentido de levar os participantes a perceberem que a reta procurada deveria passar pelo ponto médio do segmento determinado pelos pontos de interseção da circunferência com o segmento AB.

Para justificar este fato solicitou-se que os participantes marcassem os pontos de interseção E e F da circunferência *c* com o segmento AB (aqui já se permitiu utilizar a ferramenta *interseção de dois objetos*). Iniciou-se então discussão no sentido verificar que a partir deste ponto, para construir a reta perpendicular procurada bastava usar a construção do ponto médio do segmento EF. Aproveitou-se então, para se introduzir o conceito de mediatriz de um segmento, visto que a reta perpendicular construída é exatamente a mediatriz do segmento EF. Foram realizadas atividades com o intuito de levar os participantes a perceberem que a mediatriz pode ser olhada como um conjunto de *pontos que equidistam dos extremos do segmento*.

Após as discussões sobre esta propriedade, passou-se à demonstração de que isto de fato ocorre. Argumentou-se então que se poderia utilizar a construção da reta perpendicular por um ponto de um segmento, relembrando que, para traçar a mediatriz de um segmento AB, basta traçar uma reta m, perpendicular a esse segmento, passando pelo ponto médio M.

Abriu-se então nova discussão no sentido de verificar que, de fato, na construção realizada, todos os pontos da reta perpendicular ao segmento passando pelo ponto médio (mediatriz), equidistam dos extremos do segmento. As discussões foram conduzidas com o propósito de levar os participantes a entenderem que tomando um ponto P, qualquer na reta m, os triângulos AMP e BMP são congruentes (Figura 1), pelo caso lado, ângulo, lado (L.A.L.) de congruência de triângulos e, consequentemente, $PA = PB$.

Chamou-se a atenção para o fato de que o ponto P pode ser qualquer ponto sobre a reta. A interatividade do software é muito útil, pois permite exibir as medidas dos dois segmentos ao fazer o ponto P percorrer a reta, deixando claro que, a cada posição do ponto a medida de ambos os segmentos é sempre igual, melhorando o entendimento da prova apresentada.

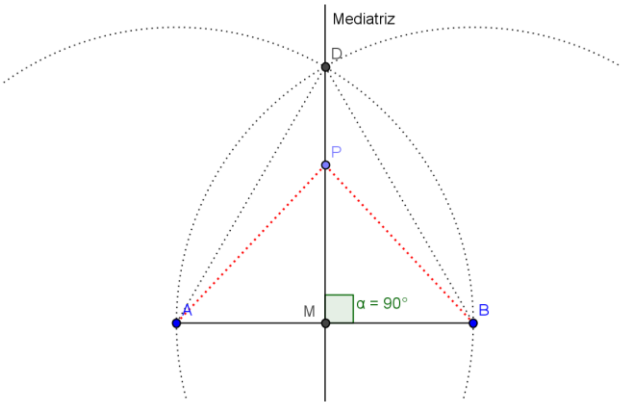

Figura 1: Mediatriz de um segmento.

Explicou-se então, que é comum denominar por *lugar geométrico* o conjunto dos pontos do plano que satisfazem alguma condição dada. Utilizou-se o GeoGebra para mostrar geometricamente que o eixo x pode ser visto como o lugar geométrico dos pontos que possuem a 2ª coordenada igual a 0 e que uma circunferência é o lugar geométrico dos pontos que equidistam de um ponto fixado, denominado centro. Após isto, procurou-se levar os participantes a concluírem que a mediatriz pode ser olhada como o *lugar geométrico dos pontos que equidistam dos extremos do segmento*.

O objetivo destas primeiras construções foi relembrar conceitos que viriam a ser utilizados no estudo das cônicas, quando consideradas como lugar geométrico, que foi o tema central da oficina.

3. As cônicas como lugar geométrico

Parábola

Aproveitou-se a discussão sobre lugares geométricos para introduzir a parábola, como um lugar geométrico. Primeiramente, utilizou-se o GeoGebra para demonstrar os principais elementos de uma parábola; foco, diretriz e eixo; discutindo suas principais propriedades. Construiu-se um ponto P sobre a parábola; um segmento ligando este ponto ao foco e outro segmento ligando-o, perpendicularmente, à reta diretriz; utilizou-se a ferramenta *exibir valor* para exibir as medidas dos dois segmentos enquanto fazíamos o ponto P percorrer a parábola, demonstrando que, se olharmos uma parábola como um conjunto de pontos, e fixarmos um ponto F e uma reta r, uma parábola pode ser interpretada como um conjunto de pontos P do plano cuja distância a um ponto fixado F, denominado foco, é igual à distância a uma reta r, denominada diretriz. Aproveitou-se para introduzir a simbologia $d(P, F) = d(P, r)$.

Após definida a parábola, passamos para o problema de efetuar sua construção geométrica. Foi solicitado então que cada participante fizesse sua própria construção seguindo os seguintes passos: Criar na área de trabalho um ponto F e uma reta r definida por dois pontos (utilizando a função exibir objeto para ocultar os pontos A e B); criar um novo ponto C sobre a reta r; traçar a mediatriz b do segmento FC; traçar uma reta c, perpendicular à reta r passando pelo ponto C; marcar o ponto de interseção P entre a reta c e a mediatriz b.

Solicitou-se, por fim, que todos utilizassem a função habilitar rastro, aplicada ao ponto P e movessem o ponto C sobre a reta r, obtendo a parábola de foco F e diretriz a. Em seguida solicitou-se que utilizassem a ferramenta lugar geométrico sobre os pontos C e P para verificar o resultado obtido, verificando que a parábola obtida desta forma coincidia com aquela obtida pela aplicação do *rastro* (Figura 2).

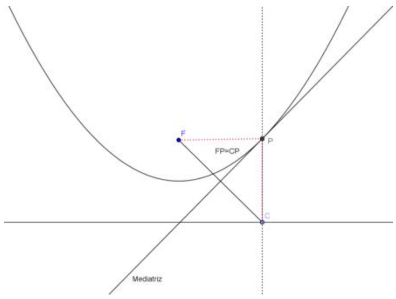

Figura 2: A parábola como lugar geométrico

Passou-se então à discussão da justificava da construção. Solicitou-se que se traçassem os segmentos $\overline{PC}$ e $\overline{PF}$. Em seguida utilizassem a ferramenta propriedades para alterar a cor destes segmentos e exibir suas medidas e então movessem o ponto C ao longo da reta r. A maioria dos participantes não teve dificuldades em enxergar que, para cada ponto C da diretriz, obtém-se uma nova mediatriz do segmento $\overline{FC}$ e que o ponto P é sempre ponto da mediatriz obtida, o que nos diz que cada ponto P obtido desta forma terá a propriedade de que $d(P,F) = d(P,C) = d(P,r)$, já que o ponto C é o pé da perpendicular baixada do ponto P até a reta r.

No que segue descrevemos de forma técnica o tópico *elipse*, sendo que a metodologia utilizada para a abordagem dos tópicos foi a mesma descrita anteriormente, sempre priorizando as discussões antes de proceder às demonstrações.

Elipse

O objetivo desta atividade foi levar os participantes ao entendimento de que uma elipse é o lugar geométrico dos pontos P do plano, cuja soma das distâncias de P a dois pontos fixados, denominados focos, é igual a uma constante e, portanto, podemos olhar para uma elipse como sendo o conjunto dos pontos P do plano que satisfazem a relação $d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a$, onde F_1 e F_2 são pontos fixados denominados focos e a é um número real tal que $a > d(F_1,F_2)$. O número real a determina o comprimento do semieixo maior da elipse.

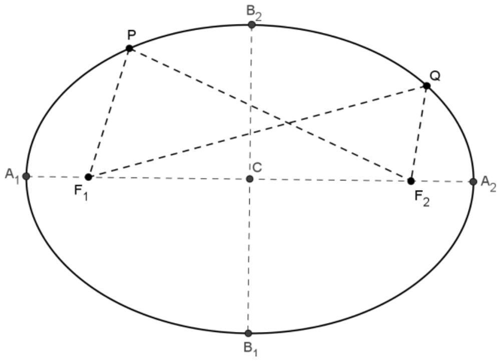

Figura 3: A elipse

Utilizou-se a Figura 3, movendo o ponto P ao longo da elipse, para visualizar geometricamente a definição dada. Para isto foi criada uma variável $soma = PF_1 + PF_2$, a qual a cada posição do ponto P, retornava o total da soma dos comprimentos dos segmentos unindo o ponto P a cada um dos focos.

Aproveitou-se ainda a Figura 3 para introduzir os principais elementos da elipse: focos, eixo maior, eixo menor, vértices e distância focal. A seguir listamos os passos da construção realizada: criar dois pontos F_1 e F_2 na área de trabalho; criar uma circunferência c com centro em F_1 e raio r maior que $d(F_1, F_2)$, qualquer. Observar que surgirá um ponto A sobre a circunferência c. Utilizar a função exibir objeto para "escondê-lo". Criar um novo ponto B sobre a circunferência c e traçar os segmentos que unem F_1 a B e F_2 a B. Renomear estes segmentos como $\overline{F_1B}$ e $\overline{F_2B}$, respectivamente. Traçar a mediatriz m do segmento $\overline{F_2B}$ e determinar a interseção P da mediatriz m com o segmento $\overline{F_1B}$. Medir os segmentos $\overline{PB}$ e $\overline{PF_2}$ para verificar que ambos têm a mesma medida. Habilitar o rastro do ponto P e mover o ponto B, fazendo-o percorrer a circunferência c. Observar que ao fazer o ponto B percorrer a circunferência c, o ponto P descreve uma elipse de focos F_1 e F_2 que passa pelo ponto P. Utilizar a ferramenta lugar geométrico sobre os pontos B e P para verificar o resultado obtido (Figura 4).

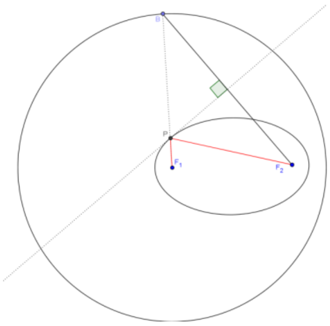

Figura 4: A elipse como lugar geométrico

Passou-se então à justificativa da construção considerando um número real a positivo, e uma circunferência c de raio $2a$, com centro no ponto F_1 (um dos focos). Usou-se o terceiro passo da construção anterior, para concluir que o ponto B é um ponto do círculo c. Utilizando a notação $d(B,F_1)$ para designar a distância do ponto B ao ponto F_1, concluiu-se que $r = d(B,F_1) = 2a$ e pelo quarto passo da construção, P é o ponto de interseção entre $\overline{BF_1}$ e a mediatriz m do segmento $\overline{BF_2}$, isto permitiu usar a definição de mediatriz para concluir que $d(P,F_2) = d(P,B)$.

De fato $d(P,B) + d(P,F_1) = d(P,F_2) + d(P,F_1) = 2a$, pois P é um ponto interior do segmento $\overline{F_1B}$, e, portanto, $d(B,P) + d(P,F_1) = d(B,F_1) = 2a$. Ou seja, a soma das distâncias do ponto P a cada um dos focos é sempre igual a $2a$ e pela definição, P é ponto da elipse de semieixo maior igual a a. Desta forma, fazendo o ponto B percorrer a circunferência c, o ponto P descreverá uma elipse, pois a cada posição que P assume, esta propriedade se mantém.

Nesse ponto foi possível introduzir o conceito de *círculo diretor* da elipse, como sendo a circunferência c da construção, ou seja, uma circunferência centrada em um dos focos e com raio igual ao eixo maior da elipse. Foram realizadas algumas medições no sentido de observar que qualquer ponto da elipse é equidistante a um dos focos e ao círculo diretor referente ao outro foco.

As atividades com a hipérbole seguiram a mesma metodologia, que por motivo de brevidade não exporemos aqui.

4. Considerações Finais

O estudo das *cônicas* é apaixonante e o professor de hoje tem ferramentas para elaborar aulas com metodologias diversificadas sobre o tema. Mas para isso são necessárias duas coisas: domínio do conteúdo e domínio das ferramentas utilizadas. Os softwares de Geometria dinâmica são ótimos laboratórios de aprendizado, tanto para o docente como para o aluno. Para que esta ferramenta se torne útil, é necessária uma preparação cuidadosa dos conteúdos e uma escolha adequada da abordagem que se pretende, tendo sempre em vista o objetivo que se pretende atingir. A escolha do momento adequado de se aprofundar um tópico ou introduzir o formalismo matemático requerido é fundamental. Aliás, esta é uma armadilha a ser evitada, a de se embevecer com a magia da ferramenta, imputando-lhe maior importância do que ao conteúdo estudado.

5. Agradecimentos

Este trabalho faz parte das atividades do Grupo de Estudos e Aplicação do GeoGebra ao Ensino da Matemática (GEAGEM). Agradecemos à FAPEMIG e ao MEC/SESu pelo apoio financeiro. Agradecemos também a todos os membros do grupo PET Matemática Pontal pelo apoio e pelo auxílio nas atividades práticas.

6. Referências

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas: Editora Unicamp, 2004.

HEATH, T. *A History of Greek Mathematics*, New York: Dover publications, 1981.

KNORR, W. *The Ancient Tradition of Geometric Problems*. New York: Dover publications, 1993.

LIMA, E. L. *Álgebra Linear*. 3ª ed. Rio de Janeiro: SBM, 1998. (Coleção Matemática Universitária).

LIMA, E. L. *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento*. Rio de Janeiro: IMPA, 1998. (Projeto Euclides).

LIMA. R. N. *Resolução de equações de terceiro grau através de cônicas*. 173p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUCSP), São Paulo. 2011.

MAGNAGHI, C. P. *Análise e Tradução Comentada da Obra de, Arquimedes Intitulada "Método Sobre os Teoremas Mecânicos"*. 167p. Dissertação (Mestrado em Física) - Instituto de Física Gleb Wataghin, Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, Campinas, Maio de 2011.

SILVA, M. B. *Secções Cônicas: atividades com Geometria dinâmica com base no currículo do estado de São Paulo*. 155p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo (PUCSP), São Paulo. 2011.

SOUZA, J. M. R. *Trissecção do Ângulo e Duplicação do Cubo: as Soluções na Antiga Grécia*. 114p. Dissertação de Mestrado. – Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, Porto, Portugal, 201. Disponível em: <http://www.prof2000.pt/users/miguel/tese/capa.htm>. Acesso em: 08/02/2013.

VASCONCELOS, F. *História das Matemáticas na Antiguidade*. Paris: Aillaud e Bertrand, 1925.