ATIVIDADES INVESTIGATIVAS DE PROBABILIDADE EM LIVRO DIDÁTICO: UMA LEITURA DE FUTUROS PROFESSORES DE MATEMÁTICA

Elizabeth Soares
UniSant'Anna; Universidade Cruzeiro do Sul
elizabethzv@uol.com.br

Celi Espasandin Lopes
Universidade Cruzeiro do Sul
celilopes@uol.com.br

Resumo
Este texto apresenta uma discussão sobre a análise, empreendida por alunos de um curso de licenciatura em matemática, de uma atividade investigativa de probabilidade. Trata-se de um recorte de uma pesquisa documental e bibliográfica de doutorado em andamento, voltada a discutir o processo de ensino e aprendizagem de análise de dados e probabilidade no Ensino Fundamental, expresso em propostas didáticas apresentadas em alguns dos livros que resultaram do projeto Connected Mathematics Project (CMP), financiado pela National Science Foundation (NSF) dos Estados Unidos, visando implementar essa temática em sala de aula para estudantes de 11 a 14 anos. A atividade e a proposta de trabalho são descritas e as respostas são analisadas a partir da análise de conteúdo. Os resultados evidenciam as dificuldades de futuros professores em analisar propostas de ensino de probabilidade, em decorrência de suas próprias limitações relativas ao domínio teórico e metodológico da temática.

Palavras Chave: Chance; Probabilidade; Educação Matemática; Educação Estatística; Livro Didático.

1. Introdução

Este artigo resulta de um recorte de pesquisa de doutorado que vem sendo desenvolvida com o objetivo de analisar o processo de problematização e investigação presente em atividades de ensino de estocástica.

Consideramos que as formas interligadas de raciocínio combinatório, probabilístico e estatístico constituem o raciocínio estocástico, o qual permite compreender o uso de modelos para simular fenômenos aleatórios; entender como produzir dados para estimar probabilidades; reconhecer como, quando e por meio de quais ferramentas as inferências podem ser realizadas; e compreender e utilizar o contexto de um problema para planejar as investigações, avaliá-las e extrair conclusões (LOPES, 2012).

Tais temáticas passaram a fazer parte do currículo de matemática brasileiro com a publicação dos Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 1998), nos quais constam como parte do bloco de conteúdos denominado 'Tratamento da informação'.

Ao recomendarem o estudo da estatística e da probabilidade, os currículos de matemática buscam promover no aluno a compreensão sobre a finalidade e a lógica das investigações estatísticas, o entendimento sobre o processo da investigação estatística, o domínio sobre habilidades processuais, a compreensão sobre relações matemáticas, a compreensão da probabilidade e do acaso, o desenvolvimento de habilidades interpretativas e do letramento estatístico, o desenvolvimento da capacidade de comunicar-se estatisticamente e o desenvolvimento de apreciação do papel da chance e da aleatoriedade no mundo (GARFIELD; GAL, 1997 *apud* LOPES, 2008).

Neste texto procedemos a uma discussão sobre a análise que os alunos de um curso de licenciatura fizeram sobre uma atividade de ensino elaborada por pesquisadores americanos em um projeto que contempla as recomendações acima citadas. As propostas de investigação desenvolvidas pelos autores do projeto foram organizadas na forma de uma coleção de livros didáticos voltados a estudantes de 11 a 14 anos. Essa atividade está publicada no volume *How likely is it?: probability* (LAPPAN *et al*., 2002).

Elucidaremos os objetivos apresentados pelo projeto ao analisarmos a atividade a partir dos pressupostos de Godino, Batanero e Cañizares (1996), que consideram que focalizar a probabilidade constitui excelente oportunidade para mostrar aos estudantes como matematizar, ou seja, como aplicar a matemática para resolver problemas reais. Para isso, os autores consideram ser necessário promover um ensino das noções probabilísticas mediante uma metodologia heurística, que permita ao aluno fazer suas próprias descobertas e que também seja uma metodologia ativa, ao propor problemas concretos e a realização de experimentos reais ou simulados.

A seguir descreveremos o contexto no qual essa atividade se insere.

2. Connected Mathematics Project (CMP)

O Connected Mathematics Project (CMP) (LAPPAN *et al*., 2009) foi financiado pela instituição americana National Science Foundation (NSF) e, de 1991 a 1996 e de 2000 a 2006, desenvolveu um currículo de matemática completo para professores e estudantes, com o objetivo de auxiliar estes últimos a desenvolver a compreensão de importantes conceitos matemáticos, habilidades, procedimentos e maneiras de pensar e raciocinar sobre número, geometria, medição, álgebra, probabilidade e estatística.

O CMP teve por base pesquisas em Educação Matemática e Estatística e foi testado em campo em diversos locais dos Estados Unidos, abrangendo cerca de 45 000 alunos e 390 professores. Em ambos os períodos de investigação, cada uma das unidades que compõem cada volume passaram por pelo menos três momentos de teste de campo. Pesquisas e relatórios de avaliação indicam que o CMP supera outros currículos e revela, por meio de testes que medem a habilidade de resolver problemas, maior êxito dos estudantes a longo prazo.

A premissa desse projeto foi que todos os alunos devem ser capazes de raciocinar e comunicar-se eficientemente em matemática, o que inclui dispor de conhecimento e habilidade no uso de vocabulário, formas de representação, materiais, ferramentas, técnicas e métodos intelectuais da disciplina de matemática, além da capacidade de definir e resolver problemas, valendo-se de razão, *insight*, criatividade e proficiência.

O projeto ainda está ativo e promove encontros dos pesquisadores com os professores que adotam o material, para discussões regulares e para as adequações e reformulações necessárias. A meta estabelecida pelos pesquisadores não se limita à publicação de livros com padrões diferentes de aprendizagem e ensino, mas visa também que professores, alunos e pais desempenhem diferentes papéis, trabalhando colaborativamente em relação ao processo de aprendizagem.

Os coordenadores defendem a ideia de que nas salas de aula em que se aplicam materiais do CMP os alunos atuem ativamente, investigando problemas, levantando questionamentos, procurando soluções e elaborando sínteses sobre a aprendizagem matemática ocorrida.

O CMP contempla quatro eixos matemáticos: ‘Números e operações’, ‘Geometria e medidas’, ‘Análise de dados e probabilidade’ e ‘Álgebra’. Cada eixo indica o que os alunos devem ser capazes de alcançar até o final do oitavo ano.

O Quadro 1 descreve os objetivos do eixo ‘Análise de dados e probabilidade’.

Quadro 1 – Objetivos do eixo 'Análise de dados e probabilidade'

➢ <u>Formulação de questões</u>
- Formular perguntas que possam ser respondidas através da coleta e análise de dados (do 6.º ano ao 8.º).
- Estabelecer estratégias para coletar dados a fim de responder a essas perguntas (do 6.º ano ao 8.º).
- Realizar experimentos e simulações para testar hipóteses sobre situações de probabilidade (8.º ano).

➢ <u>Coleta de dados</u>
- Implementar estratégias de coleta de dados para responder às perguntas que foram elaboradas (do 6.º ano ao 8.º).
- Distinguir entre amostra e população (8.º ano).
- Caracterizar amostras e analisar se são representativas ou não (8.º ano).
- Utilizar essas caracterizações para avaliar a qualidade dos dados coletados (8.º ano).

➢ <u>Análise de dados</u>
- Organizar, analisar e interpretar dados para fazer previsões, construir argumentos e tomar decisões (6.º ano e 7.º).
- Utilizar medidas centrais e de dispersão para descrever e comparar conjuntos de dados (6.º ano e 7.º).
- Ser capaz de ler, criar e escolher as representações de dados, incluindo gráficos de barras/colunas, setores, linhas, caule e folhas, *boxplots* e histogramas (6.º ano e 7.º).
- Avaliar informalmente a significância das diferenças entre conjuntos de dados (7.º ano e 8.º).
- Usar informações extraídas de amostras para tirar conclusões sobre populações (8.º ano).

➢ <u>Probabilidade</u>
- Distinguir entre probabilidades teóricas e experimentais e compreender a relação entre elas (6.º ano).
- Utilizar conceitos de probabilidade para tomar decisões (6.º ano).
- Encontrar o valor esperado e interpretá-lo (7.º ano).
- Calcular e comparar as chances de vários resultados, incluindo resultados de dois estágios de resultados (7.º ano).

Fonte: Elaborado pelas autoras.

Podemos observar nestes objetivos que o ensino e a aprendizagem de estatística e de probabilidade devem ser baseados em investigações e em resolução de problemas, de modo a permitir que o conhecimento matemático e estatístico possibilite ao estudante adquirir habilidades para compreender e lidar adequadamente com sua realidade (LOPES, 1998).

3. Procedimentos metodológicos

Propusemos aos alunos do 4.º semestre de uma turma de licenciatura de matemática de uma faculdade localizada na cidade de São Paulo uma atividade de probabilidade elaborada e testada pelos pesquisadores do projeto.

Essa turma, do período noturno, é composta de oito alunos, que identificaremos por letras de A a H. O aluno B concluiu o Ensino Médio há sete anos e não fez nenhum outro curso. Os demais pararam de estudar há mais de 15 anos. Todos estudaram em escolas da rede pública e somente o aluno B lembra-se de ter tido aulas de probabilidade e estatística. Somente no 6.º semestre cursarão uma disciplina que tratará de probabilidade e estatística.

O aluno C leciona em escola pública da periferia da cidade. O aluno G presta serviços domésticos e apresenta dificuldade de relacionar-se, expressar-se verbalmente, sintetizar ideias e lidar com situações novas, mas escreve bem e tem bom desempenho nas disciplinas cuja abordagem é técnica. Os demais trabalham em empresas relacionadas à prestação de serviços e pretendem lecionar, mas consideram uma segunda opção profissional.

Durante a exposição, conduzida pela pesquisadora E.S., notou-se grande dificuldade para entenderem as atividades propostas e se apropriarem da temática. Ficaram paralisados. O aluno C comentou que estava muito cansado e com dor de cabeça. O aluno G não expressou o que pensava e se retraiu. Aos poucos os demais foram se soltando e participando.

Pediu-se que entregassem na aula seguinte uma avaliação da atividade e registrassem também o sentimento que tiveram ao entrar em contato com esse tema.

Nesse contexto, este estudo visa apresentar indicadores para a formação inicial dos professores no que se refere ao ensino de probabilidade. Delineamos como questão central: “Como licenciandos em matemática resolvem uma atividade investigativa em probabilidade e como a analisam didaticamente?”.

Por se tratar de uma pesquisa de natureza qualitativa, para responder a essa questão utilizamos o método de análise de dados proposto por Bardin (1977), considerando as etapas de pré-análise, exploração do material, tratamento dos resultados, inferência e interpretação. Para descrever e interpretar o conteúdo dos registros realizados pelos alunos, buscamos nesses registros aspectos convergentes sobre as dificuldades por eles encontradas no desenvolvimento da atividade e na posterior análise didática sobre ela.

4. A atividade e seu desenvolvimento

A atividade investigativa sobre probabilidade está publicada no volume *How likely is it?: probability* (LAPPAN *et al*., 2002), direcionado ao 6.º ano e organizado em sete investigações. As investigações 1, 2 e 3 focalizam probabilidades experimentais e a ideia de chance de ocorrência de um evento. As investigações 4 e 5 introduzem formalmente os termos 'probabilidade' e 'probabilidade teórica'. As investigações 6 e 7 trazem aos alunos oportunidades de aplicar e desenvolver ainda mais seus conhecimentos sobre probabilidade em diferentes situações de interesse. Essas investigações também fazem importantes conexões entre probabilidade e números racionais, geometria, estatística, ciência e negócios.

Propusemos aos alunos a primeira dessas investigações por ser a que introduz a probabilidade experimental e a ideia de chance de ocorrência de um evento.

Investigação 1: *Um primeiro olhar sobre a chance*

Decidindo o café da manhã

A situação inicial envolve a decisão do que Kalvin, aluno do oitavo ano, comerá no café da manhã: se o cereal chamado Cocoa Blast ou o denominado Health Nut Flakes. A mãe de Kalvin prefere que ele coma o segundo, por ser mais nutritivo, mas ele prefere o primeiro. Eles decidem escolher de maneira lúdica o que Kalvin comerá no café da manhã. Para tanto, toda manhã ele lançará uma moeda: se der cara, comerá Cocoa Blast (sua preferência); se der coroa, Health Nut Flakes.

Orientação da pesquisadora: Discutam e combinem como irão coletar e anotar os dados relacionados a essa situação e respondam às questões.

Problema 1*: Quantos dias você acha que Kelvin comerá Cocoa Blast em junho?*
Explore esta questão jogando uma moeda trinta vezes para determinar o cereal que Kalvin comerá a cada manhã de junho. Faça um calendário de junho, para anotar seus dados. Em cada dia marque o resultado do lançamento (cara ou coroa). Depois calcule o percentual de cara obtido em seu grupo. Represente também no plano cartesiano e marque no eixo x *os dias do mês, de 1 a 30, e no eixo* y *o percentual de caras obtido no grupo.*

Comentário da pesquisadora: Como houve certo incômodo e demora na decisão, sugerimos que fizessem os registros em duplas, que depois seriam compartilhados na lousa.

1.a. *Que fração dos lançamentos da classe deu cara?*
b. *Se você continuar jogando muitas vezes mais, a fração de caras chegará perto de ½?*
2.a. *Com base no que você encontrou para junho, quantas vezes você espera que Kelvin coma Cocoa Blast em julho?*
b. *Quantas vezes você esperaria que Kelvin comesse o cereal Cocoa Blast em um ano?*

3. *A mãe de Kalvin disse-lhe que a chance de sair cara num lançamento de moeda é ½. Isso significa que toda vez que você jogar uma moeda duas vezes você terá uma vez cara e uma vez coroa? Explique seu raciocínio.*

Analisando eventos

Kalvin encontra uma moeda perto de uma ferrovia. Nota que ela está um pouco torta, mas decide usá-la para determinar seu café da manhã. A mãe de Kalvin suspeita da moeda, pois no fim de junho Kalvin tinha comido Health Nut Flakes somente sete vezes. E ela sintetiza sua dúvida dizendo: "Se a moeda é honesta, sair cara e coroa são resultados igualmente prováveis." Kalvin não tem certeza sobre o significado de igualmente provável, que sua mãe lhe disse.

Ela então lhe apresenta um exemplo para explicar esse conceito. Suponha que todos na família escrevam o próprio nome em um cartão e o coloquem dentro de um chapéu. Se você retirar um cartão, lê-lo e colocá-lo de volta, cada nome terá a mesma chance de tornar a sair. Mas suponha que você tenha colocado no chapéu 10 cartões com meu nome. Então, quando você retirar um cartão do chapéu, nossos nomes não terão a mesma chance – o meu terá maior chance de ser escolhido do que os outros.

Orientação da pesquisadora: Na sequência de atividades seguinte, decidam se os diferentes eventos apresentados em uma lista são equiprováveis.

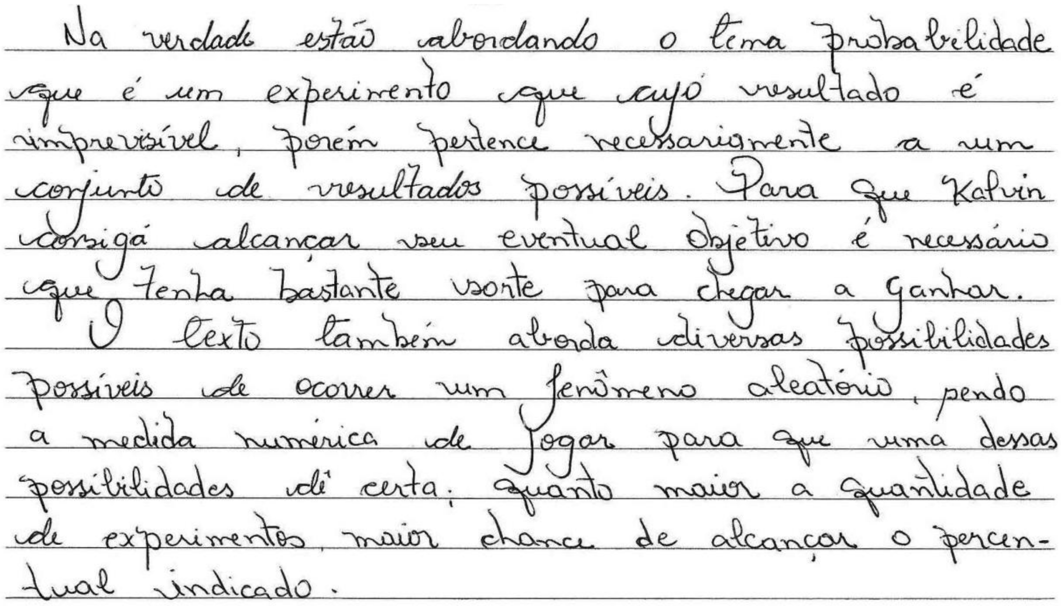
Problema 2*: De A a H, decida se o resultado de cada evento é igualmente provável e explique brevemente sua resposta.*

Ação	***Possibilidade do resultado do evento***	***Resposta e comentário***
A. Você lança uma lata de refrigerante.	*A lata cai de lado ou virada para cima ou para baixo.*	
B. Você joga um dado numerado.	*1, 2, 3, 4, 5 ou 6.*	
C. Você verifique a meteorologia no Alasca em um dia de dezembro.	*Neva, chove ou não chove nem neva.*	
D. O time Pittsburgh Steelers joga uma partida de futebol.	*O Pittsburgh Steelers ganha, perde ou empata.*	
E. Nasce um bebê.	*O bebê é um menino ou uma menina.*	
F. Nasce um bebê.	*Ele é canhoto ou destro.*	
G. Você chuta a resposta de uma questão com duas alternativas: verdadeiro ou falso.	*A resposta está certa ou a resposta está errada.*	
H. Você lança uma bola ao cesto.	*Você faz a cesta ou você erra.*	

5. **Os dados construídos e a análise**

Os alunos apresentaram significativa dificuldade no entendimento e no desenvolvimento da atividade. Observamos que eles não apresentavam domínio sobre conceitos relativos a probabilidade e isso se constituiu em obstáculo para a análise didática da atividade. Os alunos C, D e E não entregaram seus registros da avaliação. A seguir, discutiremos os comentários apresentados pelos demais alunos.

O aluno A (Figura 1) não consegue fazer qualquer consideração quanto à perspectiva didática da atividade e expressa dificuldades sobre os conceitos envolvidos.



Na verdade estão abordando o tema probabilidade que é um experimento que cujo resultado é imprevisível, porém pertence necessariamente a um conjunto de resultados possíveis. Para que Kalvin consigá alcançar seu eventual objetivo é necessário que tenha bastante sorte para chegar a ganhar.
O texto também aborda diversas possibilidades possíveis de ocorrer um fenômeno aleatório, sendo a medida numérica de jogar para que uma dessas possibilidades dê certa; quanto maior a quantidade de experimentos, maior chance de alcançar o percentual indicado.

Figura 1 – Registro do aluno A.

O aluno B, por sua vez (Figura 2), demonstra não dispor de entendimento conceitual que lhe permita reconhecer a probabilidade como medida de chance. Relaciona-a apenas ao movimento aleatório.

Como é dificil pensar Matematicamente, principalmente um assunto como a Probabilidade, que o tempo todo pode mudar, fica só no talvez ou no eu acho, depende da situação acaba com aquela mistica que a matematica é exato...
No começo percebi que todos ficaram encomodados pelas perguntas, mas com o passar do tempo adquirimos um raciocinio rapido, para analizar a situação antes de responder as perguntas
Entendo que conseguimos evoluir nesta aula, ter uma visão mas amplo sobre o pensamento matematico e conseguir relacionar a matematica com coisas que para muitos fica longe do probalidade que esta ao nosso redor.

Figura 2 – Registro do aluno B.

O aluno F (Figura 3) não faz menção nenhuma aos conceitos estudados de probabilidade e consequentemente não faz referência aos aspectos metodológicos abordados na proposta.

Na aula de 07/03/2013, foi abordado o tema Probabilidade, no meu ponto de vista foi um tema interessante, pois assim tivemos a oportunidade de comprovar alguns cálculos.

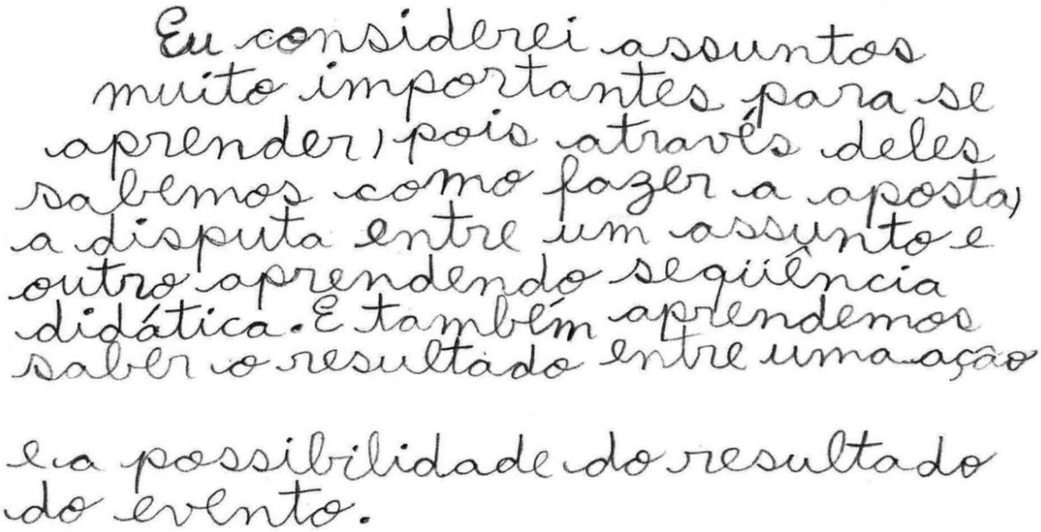
Receio que a aula tenha ficado um pouco repetitiva, pois tivemos que repetir muitas vezes os testes para comprovar a veracidade da informação.

Entendo a necessidade da repetição, mas poderíamos ter diminuído o tempo dessa atividade e aplicado outra que comprovasse essa tese e assim o aluno se interessasse em explorar mais o tema. Mas por outro lado, também proporcionou aos alunos uma sensação de não estar no controle, e isso acredito que seja ilegal em relação à Prática de Ensino, pois é assim que iremos aprender a desvendar a aula que iremos aplicar. Sempre uma caixinha de surpresa.

Confesso que fiquei um pouco confusa sobre o que pensar dessa aula, gerando assim dúvidas sobre se as sensações, se são boas ou ruins. Acredito que o desconforto gerado, veio para que possamos controlar essa sensação no futuro, quando nós formos dar aula.

Figura 3 – Registro do aluno F.

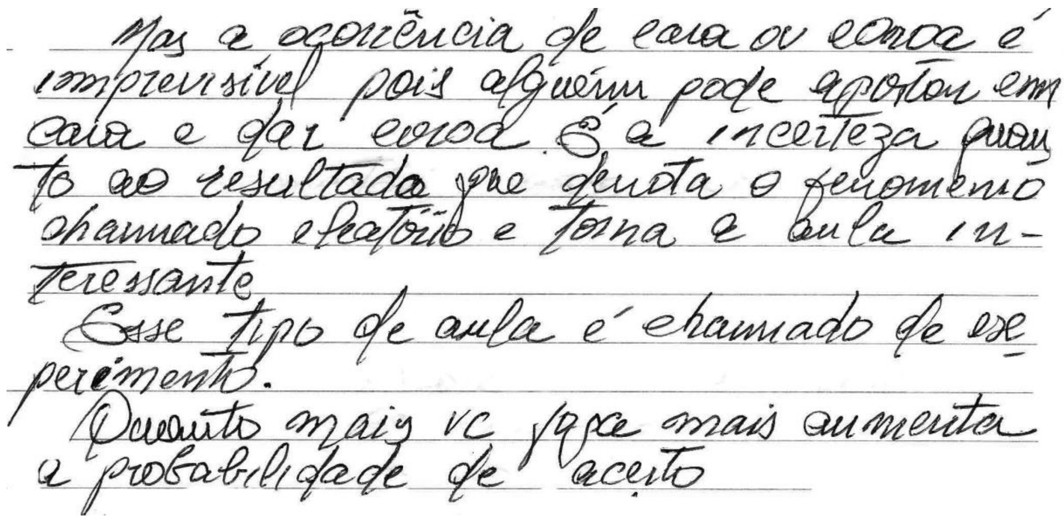
A Figura 4 evidencia que o aluno G parece ter tido contato com o assunto pela primeira fez e, portanto, não apresenta domínio conceitual sobre probabilidade. Isso não lhe permite analisar didaticamente a atividade desenvolvida.



Eu considerei assuntos muito importantes para se aprender, pois através deles sabemos como fazer a aposta, a disputa entre um assunto e outro aprendendo seqüência didática. E também aprendemos saber o resultado entre uma ação e a possibilidade do resultado do evento.

Figura 4 – Registro do aluno G.

O aluno H (Figura 5) revela alguma apropriação do que foi discutido em aula sem explicitar conceitos probabilísticos, o que o impossibilita de realizar uma análise didática da atividade.



Mas a ocorrência de cara ou coroa é imprevisível pois alguém pode apostar em cara e dar coroa. É a incerteza quanto ao resultado que denota o fenômeno chamado aleatório e torna a aula interessante

Esse tipo de aula é chamado de experimento.

Quanto mais vc joga mais aumenta a probabilidade de aceito

Figura 5 – registro do aluno H.

Coutinho (2001) destaca que na Educação Básica os alunos precisam vivenciar efetivamente os processos de experimentação científica do ponto de vista do desenvolvimento do raciocínio probabilístico: a apreensão do acaso, a ideia de experiência aleatória e o conceito de probabilidade. Vimos nos registros coletados que esses futuros professores de matemática terão dificuldades para analisar e elaborar atividades para o ensino de probabilidade, pois se evidencia quanto seu raciocínio probabilístico não está ainda suficientemente desenvolvido.

5. Considerações finais

Esta análise inicial permite constatar a necessidade de investir em propostas de estudo sistemáticas para o desenvolvimento do raciocínio probabilístico de futuros professores de Matemática.

Um importante passo inicial para esse investimento é o de envolver os licenciandos em atividades investigativas centradas na realização de experimentos, simulações e problematizações.

Se considerarmos os objetivos do projeto CMP, que apontam a necessidade de que os alunos aprendam a ser capazes de raciocinar e de comunicar-se eficientemente em matemática, definindo e resolvendo problemas, percebemos a urgência de inserir nos cursos de formação inicial de professores um trabalho sobre probabilidade que dialogue com essa perspectiva.

Outro aspecto que merece destaque nessas recomendações para o estudo probabilístico nos cursos de licenciatura em matemática diz respeito aos diferentes significados que têm sido associados ao conceito de probabilidade, como grau de crença e como cálculo estável de frequências dos sucessos aleatórios (HACKINGS, 1975).

Para tanto, é preciso envolver os futuros professores de matemática em processos de ensino que, como expõe Lopes (2003), priorizem o desenvolvimento do pensamento probabilístico, o qual requer o reconhecimento de situações de acaso na vida quotidiana e no conhecimento científico, bem como a formulação e comprovação de conjecturas sobre o comportamento de fenômenos aleatórios simples e a planificação e realização de experiências nas quais se estude o comportamento de fatos que abarquem o acaso.

Outro aspecto a ser considerado é a necessidade de produção de textos didáticos para a formação de professores e também para as aulas do Ensino Fundamental no que se refere à probabilidade.

Referências

BARDIN, L.. *Análise de conteúdo*. Lisboa: Edições 70, 1977.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais*: Matemática – ensino de 5.ª a 8.ª série. Brasília: MEC, 1998.

COUTINHO, C.Q.S. *Introduction aux situations aléatoires dès le Collège*: de la modélisation à la simulation d'expériences de Bernoulli dans l'environnement informatique Cabri-géomètre II. Tese (Doutorado) – Université Grenoble I, Grenoble**,** 2001.

GODINO, J.D.; BATANERO, C.M.; CAÑIZARES, M.J. *Azar y probabilidad*. Madrid: Sínteses, 1996.

HACKINGS, I. *The emergence of probability*. Cambridge: Cambridge University Press, 1975.

LAPPAN, G.; FEY, J.T.; FITZGERALD, W.M.; FRIEL, S.N.; PHILLIPS, E.D. *How likely is it?*: probability. Glenview (IL, USA): Prentice Hall, 2002. (Connected Mathemathics.)

LAPPAN, G.; FEY, J.T.; FITZGERALD, W.M.; FRIEL, S.N.; PHILLIPS, E.D. *Connected mathematics project*. 2009. Disponível em: <www.connectedmath.msu.edu>. Acesso em: 30 jun. 2011.

LOPES, C.A.E. *A probabilidade e a estatística no ensino fundamental*: uma análise curricular. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.

LOPES, C.E. *O conhecimento profissional dos professores e suas relações com estatística e probabilidade na educação infantil*. Tese (Doutorado) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2003.

LOPES, C.E. Reflexões teórico-metodológicas para a educação estatística. In: LOPES, C.E.; CURI, E. (Orgs.). *Pesquisas em educação matemática*: um encontro entre a teoria e a prática. São Carlos: Pedro & João, 2008.

LOPES, C.E. O desenvolvimento do pensamento estatístico e probabilístico na infância. *Reveduc*, maio 2012. Disponível em: <http://www.reveduc.ufscar.br/index.php/reveduc/issue/current>. Acesso: 15 mar. 2013.